

数値解析による非定形浅水波の波数周波数特性

石田 昭*・広沢 遵**・西垣嘉行***

1. 緒 言

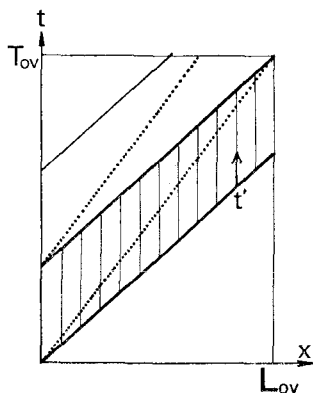
浅水域に進入した波、あるいは潜堤上を通過する波などは、波形変形を生ずる。従来波の変形問題を扱う場合には、波形そのものは変化しないで、定形波のままで、波高、波速だけが変化するものと仮定して理論的にも実験的にも研究がなされてきた。しかしながら実際には波形が非対称となって時々刻々変化するはずであるから、非定形波現象としての変形問題を扱う必要がある。石田ら³⁾は一様水深の浅水領域における非定形波形を、実験および KDV 方程式に基づく数値解析によって求め、計算方法に問題点があるにもかかわらず両者がかなり良く一致すること、したがって KDV 方程式はこのような浅水領域での非定形波現象をかなりよく説明するものであることなどを報告してきた。本研究では正弦波形を持つ波が一様水深の浅水域に進入したときの非定形波形を KDV 方程式に基づく数値解析によって求め、得られた時空間波形の波数周波数スペクトル解析の結果から非定形波の特性を調べたものである。

2. 数値解析の方法

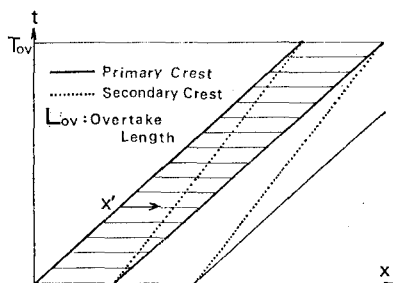
KDV 方程式に基づく数値解析の方法についてはすでに Zabusky ら^{1),2)}が述べている。石田ら³⁾は Zabusky らの差分方法によって造波板前面での時間波形を空間波形に置き変えたものを初期波形とした数値実験を行い、水槽実験と数値実験の波形がかなりよく一致することを報告してきた。この方法は空間波形の周期性を仮定する必要があるが、時間波形だけに周期性が期待される水槽内の現象とは矛盾するものではあるが、解析結果の空間波形を逆に時間波形であると解釈すると、現象をうまく説明できるので、本研究においても Zabusky らの差分手法を使用することにした。初期空間波形を正弦波形として、初期波のアーセル数 $U_T = H_0 L^2 / h^3$ が 26 から 360 までの間の 18 ケースについて変形の様子を調べた。 H_0 は初期波の波高で 2~18 cm, h は水深で 10~30 cm,

L は波長で 198~490 cm である。この波が長波の線形波速 $\sqrt{gh}$ で進行すると仮定する周期のほうが解析波形から求める周期よりも大きな値となる。

時空間波形から波数周波数スペクトルを求める方法は、時間軸の取り方を変えて行う水槽実験波の解析方法⁴⁾と基本的に同じである。すなわち水槽波の場合には主峯の平均移動速度で動く点を考え、この点が通過する時刻を始点とする時間波形を図-1(a)のように二次波峯の追い越し間隔 L_{ov} 内で求めると、時空間内での周期性を持った波形が得られるので重調解析が可能となる。数値解析波の場合には空間波形に周期性があって、時間波形は非周期的である。しかし同様に空間軸の取り方を変えて、主峯の平均速度で移動する点を始点とする空間波形を図-1(b)のように二次波峯の追い越



(a) 時間軸 t' の取りかた (水槽実験の場合)



(b) 空間軸 x' の取りかた (数値解析実験の場合)

図-1

* 正会員 工博 名古屋工業大学助教授 工学部土木工学科

** 名古屋工業大学研究員

*** 岐阜県庁

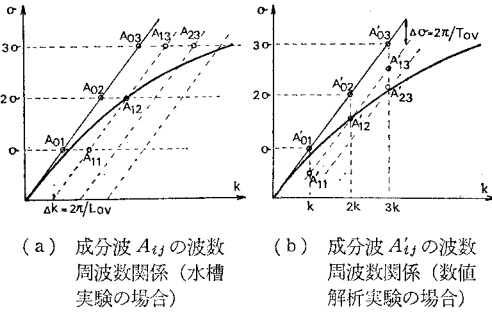


図-2

し時間 T_{ov} 内において求めると、やはり時空間内での周期性を持った波形となるので重調解析が可能となる。新しい時間軸、空間軸の取り方は図-1に示す通りである。したがって水槽波の場合のスペクトル A_{ij} と解析波のスペクトル A'_{ij} とは図-2(a), (b)に示すように波数周波数平面上で若干違う場所にプロットされるわけであるが、 $\Delta\sigma$, Δk は非常に小さな値であること、また前述した理由などによって A_{ij} と A'_{ij} は同じ性質の波であると解釈することができる。解析波形は図-3のように長波の線形波速で移動しながらみた波であるので、これから平均波速で移動した時の波となるように位相を補正する必要がある。

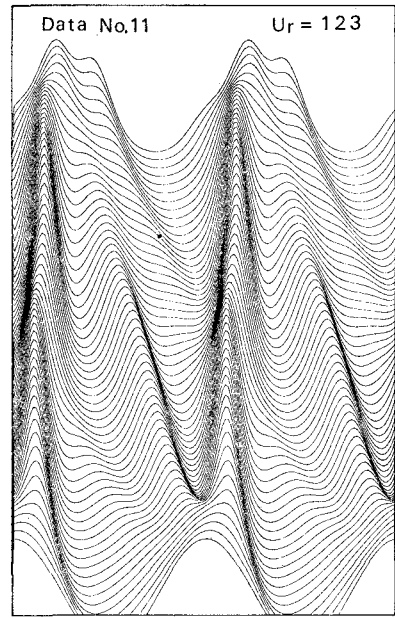
3. 解析結果

(1) 非定形波形

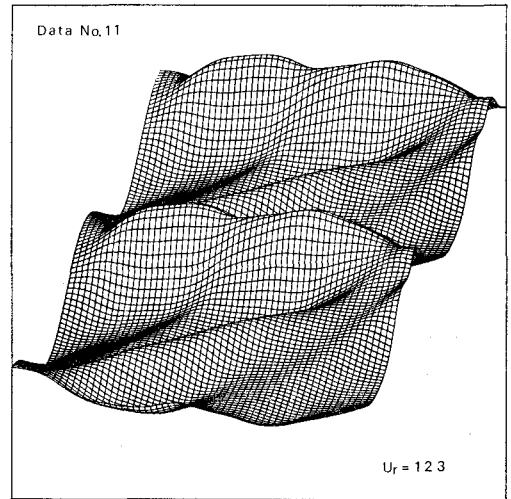
図-3(a), (b)はアーセル数が123のData No. 11を示したもので、(a)図は横軸に空間軸を取り、縦軸に時間軸を取ってある。この場合 $1/4 \cdot T_{ov}$ と $3/4 \cdot T_{ov}$ 付近で3個の soliton に分裂していること、 $1/2 \cdot T_{ov}$ では対称形の波形となり、かつ $1/4 \cdot L$ と $3/4 \cdot L$ に谷が位置すること、 $1/4 \cdot T_{ov}$ では波形の前面が急傾斜となり、 $3/4 \cdot T_{ov}$ では後面が急傾斜となることなどがわかる。(b)図は同じ波形を横軸に時間軸、縦軸に空間軸を取って立体的に示したもので、主峯の高さは $1/4 \cdot T_{ov}$ と $3/4 \cdot T_{ov}$ 付近で最大になり、 $1/2 \cdot T_{ov}$ では初期波形よりは高いが若干低くなることがわかる。図-3のように U_r がかなり大きくなると波形の再帰性は完全ではなくなるが、各モード(波数解析)の時間的变化はかなり正確な再帰性がある。ただ各モードで再帰時間が若干違うために波形の再帰性が弱められるようである。

(2) 波数周波数スペクトル成分

図-4(a), (b)は波数周波数振幅スペクトルの成分を基本成分波の振幅 A_{01} に対する比率で示したもので、図-2(a)に示す波として解釈している。石田⁷⁾はこれまで、水槽波の場合には波高水深比が一定値に近い実験であったこともあって、水深波長比 h/L によって表示してきたが、 U_r で表示した方がよいことが図からわか



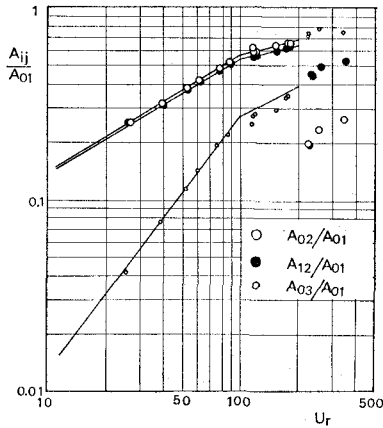
(a) (横軸が空間軸の場合)



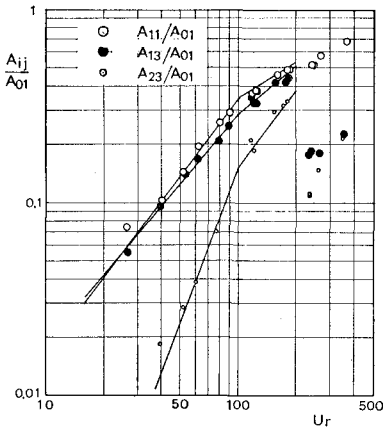
(b) (横軸が時間軸の場合)

図-3 数値解析波形の一例

る。 A_{01} , A_{02} , A_{03} の一群はすべて同位相であり、第3近似のストークス波の成分波に対応している。この3波で構成される波を主波と呼ぶことにする。したがって主波の波高は $H_m = 2(A_{01} + A_{03})$ である。また A_{12} はピストン型の造波板から発生する二次の自由波として Fontanet⁵⁾ が理論的に導いた波で、Hulsbergen⁶⁾ は Fontanet Wave と呼んでいる。その波高 H_s は $2A_{12}$ で与えられる。 A_{11} と A_{13} は主波と二次の自由波の二次干渉によって発生する差の波と和の波と考えることができる。図-4をみるとこれまでに石田⁷⁾ および Hulsbergen⁶⁾ が述べてきた A_{01} , A_{02} , A_{03} , A_{11} , A_{12} , A_{13} という6個の



(a)



(b)

図-4 各成分波の振幅比 A_{ij}/A_{01} と U_r の関係

成分波が大きな値を持つということのほかに、アーセル数が85を越えると A_{23} という三次の波が大きくなって基本成分波の1割以上になることがわかる。また、どの成分波に関しても $U_r < 100$ と $100 < U_r < 200$ ではそれぞれ直線上にプロットされ、両直線はほぼ $U_r = 100$ で接続させることができる。しかし $U_r = 200$ 付近では不連続となり、 $U_r > 200$ では A_{02} 、 A_{12} 、 A_{13} 、 A_{23} の値が急に小さくなり、 A_{11} は若干の減少、 A_{03} は急激に大きくなって基本成分波の8割近くにまでなることなどがわかる。このように不連続となる原因としては、さらに高次の非線型干渉によって三次の自由波を始めとする新しい成分波が発生すること、および分裂波の波高が大きくなって碎波することなどが考えられる。後でも述べるように正弦波の分裂現象であるために A_{02} と A_{12} は $U_r < 200$ の範囲ではほとんど同じ値である。また主波と二次の自由波によって発生する A_{11} と A_{13} および A_{03} はほとんど同じ値である。 $U_r < 100$ と $100 < U_r < 200$ の領域で $\alpha_{ij} = A_{ij}/A_{01}$ を U_r の関数で表示すると表-1のようになる。非定形波形 $\eta(x, t)$ は次式のように表示す

表-1 振幅比 α_{ij} の表示

α_{ij}	$U_r < 100$	$100 < U_r < 200$
$\alpha_{02} = \frac{A_{02}}{A_{01}}$	$e^{-3.313 \cdot U_r^{0.593}}$	$e^{-1.761 \cdot U_r^{0.256}}$
$\alpha_{03} = \frac{A_{03}}{A_{01}}$	$e^{-7.569 \cdot U_r^{1.359}}$	$e^{-4.440 \cdot U_r^{0.680}}$
$\alpha_{11} = \frac{A_{11}}{A_{01}}$	$e^{-7.028 \cdot U_r^{1.300}}$	$e^{-3.827 \cdot U_r^{0.605}}$
$\alpha_{12} = \frac{A_{12}}{A_{01}}$	$e^{-3.327 \cdot U_r^{0.596}}$	$e^{-1.646 \cdot U_r^{0.231}}$
$\alpha_{13} = \frac{A_{13}}{A_{01}}$	$e^{-6.862 \cdot U_r^{1.232}}$	$e^{-4.292 \cdot U_r^{0.674}}$
$\alpha_{23} = \frac{A_{23}}{A_{01}}$	$e^{-14.270 \cdot U_r^{2.700}}$	$e^{-7.680 \cdot U_r^{1.270}}$

ることができる。

$$\begin{aligned} \eta(x, t)/A_{01} = & \cos(kx - \sigma t) + \alpha_{02} \cos 2(kx - \sigma t) \\ & + \alpha_{03} \cos 3(kx - \sigma t) \\ & + \alpha_{11} \cos \{(k + \Delta k)x - \sigma t\} \\ & + \alpha_{12} \cos \{(2k + \Delta k)x - 2\sigma t + \pi\} \\ & + \alpha_{13} \cos \{(3k + \Delta k)x - 3\sigma t + \pi\} \\ & + \alpha_{23} \cos \{(3k + 2\Delta k)x - 3\sigma t + \pi\} \\ & \dots \dots \dots (1) \end{aligned}$$

(3) 二次の自由波の振幅

Fontanet⁴⁾ はピストン型造波機によって造波させるとき、2倍周波数を持った自由波が発生することを理論的に導き、その振幅および2倍の拘束波即ち A_{02} との造波板の位置における位相差をそれぞれ相対水深 h/L との関係で示している。図-5の実線は Fontanet の理論を示したもので Hulsbergen の文献から引用した。解析波の値をプロットすると U_r が大きくなるほど理論値より小さくなる傾向があるが、 $U_r < 150$ ではかなりよく一致していると見てよい。

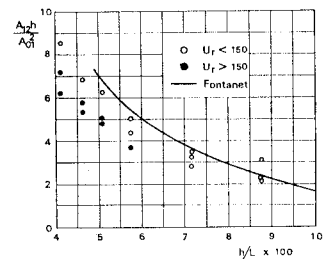


図-5 二次自由波の振幅 (Fontanet 理論との比較)

(4) 二次干渉によって発生する拘束波

2つの自由波の非線型干渉によって発生する差の波 A_{11} と和の波 A_{13} について、Kravtchenko & Santon⁹⁾ および浜田⁹⁾の理論によって検討を加えた。いずれの理論も、 A_{ij}/A_{01} の値には A_{01} が含まれるため、初期波高 H_0 と A_{01} との関係を求めておく。式(1)において $H_0 = \eta(0, 0) - \eta(0, T/2)$ とすると、

$$\frac{H_0}{A_{01}} = 2(1 + \alpha_{03} + \alpha_{11} - \alpha_{13} - \alpha_{23}) \dots \dots \dots (2)$$

が得られる。図-6の実線は式(2)を示したもので、 U_r が200まではほぼ妥当な式といえる。この関係式を使って初期波のアーセル数に対する理論値を示すと図-1

7 のようになる。

A_{02} については両方の理論は同一で浜田の理論だけを示してあるが、 U_r が大きくなるほど理論値の方が解析波より大きくなっている。 A_{11} 、

A_{13} については浜田の理論は U_r だけの関数となり解析波の場合と一致するが、Kravtchenko らの理論は相対水深によっても変化している。いずれの理論でも干渉波の振幅が U_r の増加と共に増加する傾向は解析波と同じであるが、その値はかなり大きくなっている。

図-6 初期波高 H_0 と基本成分波の振幅 A_{01} との関係

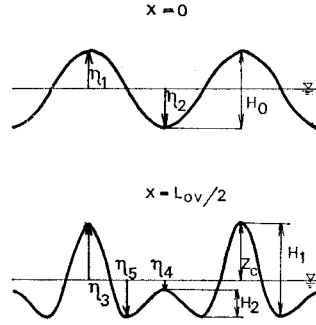
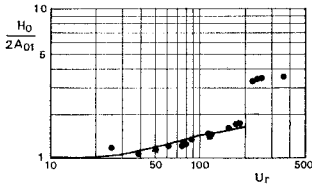


図-8 5個の情報量の取りかた

表示される。

$$\eta_1/A_{01} = 1 + \alpha_{02} + \alpha_{03} + \alpha_{11} - \alpha_{12} - \alpha_{13} - \alpha_{23} \quad (3)$$

$$\eta_2/A_{01} = -1 + \alpha_{02} - \alpha_{03} - \alpha_{11} - \alpha_{12} + \alpha_{13} + \alpha_{23} \quad (4)$$

$$\eta_3/A_{01} = 1 + \alpha_{02} + \alpha_{03} - \alpha_{11} + \alpha_{12} + \alpha_{13} - \alpha_{23} \quad (5)$$

$$\eta_4/A_{01} = -1 + \alpha_{02} - \alpha_{03} + \alpha_{11} + \alpha_{12} - \alpha_{13} + \alpha_{23} \quad (6)$$

$$\eta_5/A_{01} = -\alpha_{02} - \alpha_{12} \quad (7)$$

正弦波のように $\eta_1 + \eta_2 = 0$ となるのは $\alpha_{02} = \alpha_{12}$ の場合だけであることがわかる。この関係から 図-9 に示す諸量を求めると次式のようになる。

$$\frac{Z_c}{Z_0} = \frac{\eta_3}{\eta_1} = \frac{1 + \alpha_{02} + \alpha_{03} - \alpha_{11} + \alpha_{12} + \alpha_{13} - \alpha_{23}}{1 + \alpha_{02} + \alpha_{03} + \alpha_{11} - \alpha_{12} - \alpha_{13} - \alpha_{23}} \quad (8)$$

$$\frac{H_1}{H_0} = \frac{\eta_3 - \eta_5}{\eta_1 - \eta_2} = \frac{1 + 2\alpha_{02} + \alpha_{03} - \alpha_{11} + 2\alpha_{12} + \alpha_{13} - \alpha_{23}}{2(1 + \alpha_{03} + \alpha_{11} - \alpha_{13} - \alpha_{23})} \quad (9)$$

$$\frac{H_s}{H_m} = \frac{-\eta_1 - \eta_2 + \eta_3 + \eta_4}{\eta_1 - \eta_2 + \eta_3 - \eta_4} = \frac{\alpha_{12}}{1 + \alpha_{03} - \alpha_{23}} \quad (10)$$

$$\frac{H_s}{H_0} = \frac{-\eta_1 - \eta_2 + \eta_3 + \eta_4}{\eta_1 - \eta_2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{\alpha_{12}}{1 + \alpha_{03} + \alpha_{11} - \alpha_{13} - \alpha_{23}} \quad (11)$$

$$\frac{H_2}{H_0} = \frac{\eta_4 - \eta_5}{\eta_1 - \eta_2} = \frac{-1 + 2\alpha_{02} - \alpha_{03} + \alpha_{11} + 2\alpha_{12} - \alpha_{13} + \alpha_{23}}{2(1 + \alpha_{03} + \alpha_{11} - \alpha_{13} - \alpha_{23})} \quad (12)$$

$$\frac{H_2}{H_1} = \frac{\eta_4 - \eta_5}{\eta_3 - \eta_5} = \frac{-1 + 2\alpha_{02} - \alpha_{03} + \alpha_{11} + 2\alpha_{12} - \alpha_{13} + \alpha_{23}}{1 + 2\alpha_{02} + \alpha_{03} - \alpha_{11} + 2\alpha_{12} + \alpha_{13} - \alpha_{23}} \quad (13)$$

$$\frac{Z_t}{Z_c} = \frac{\eta_4}{\eta_3} = \frac{-1 + \alpha_{02} - \alpha_{03} + \alpha_{11} + \alpha_{12} - \alpha_{13} + \alpha_{23}}{1 + \alpha_{02} + \alpha_{03} - \alpha_{11} + \alpha_{12} + \alpha_{13} - \alpha_{23}} \quad (14)$$

上式は初期波形が正弦波以外でも、一般的に式 (1) のような 7 個の成分波で表示される非定形波には適用できる式であり、それぞれの場合に α_{ij} を求めておけばよい。近似的には各式の最初の関係を使うと $\eta_1 \sim \eta_5$ の 5 個の情報から非定形波の特性をほぼ知ることができる。

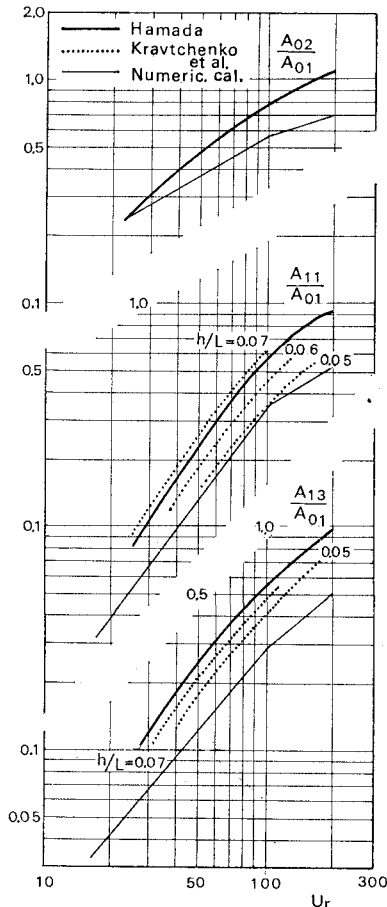


図-7 拘束波の振幅比 (理論値との比較)

4. 非定形波形の特性

U_r が 200 までの非定形波形が式 (1) のように表示できることを利用して、非定形波の諸特性をしらべてみる。図-8 に示すような初期波の crest と trough の値 (η_1, η_2) および二次波峯発生点 ($x=L_{0v}/2$) における crest と trough および中間点の値 (η_3, η_5, η_4) は次式のように

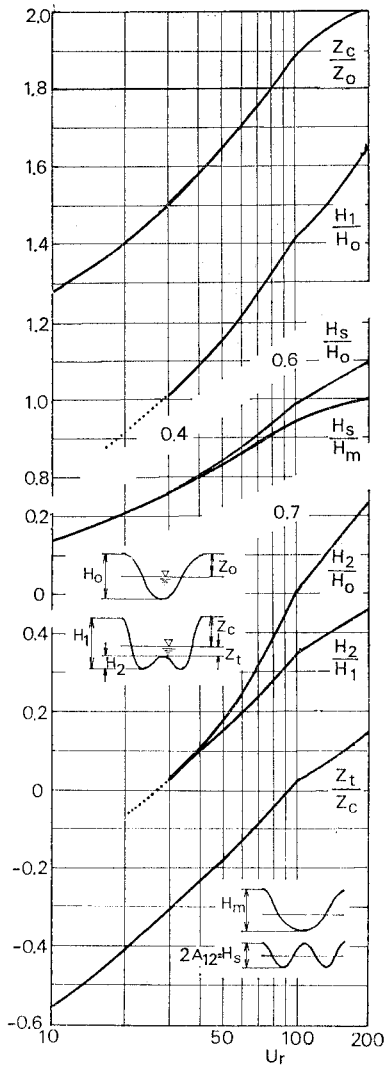


図-9 非定形波の諸特性

図-9 は式 (8) から式 (14) に表-1 の値を代入して計算したものである。ただし U_r が小さい場合には二次波峯が明瞭には発生しないので η_0 が正確には trough を示さない。したがって H_1 と H_2 に関する式は U_r が大きい場合にだけ使用できる。図-9 から二次波峯現象を伴う正弦波の分裂現象の概略がつかめると思う。例えば分裂した波高 H_1 は $U_r=200$ では初期波の 1.65 倍にまで達する。Data No. 6 ($U_r=118$), No. 12 ($U_r=184$) などは初期波の波高水深比 H_0/h が 0.6 であっても、 $L_{00}/2$ においては H_1/h が 0.8 を越えており、水槽実験なら

ばその途中で碎波が生ずるであろう。また二次波峯の波高 H_2 は $U_r=200$ で初期波高の 0.74 倍にまで達し、 U_r が 90 を越えると平均水面より上に波峯が現われること、二次の自由波の振幅 H_s は初期波の 0.6 倍にまで達することなどもわかる。

5. 結 語

正弦波形を初期波とする数値実験を行うことによって次のようなことが明らかとなった。

1) 非定形波形の波数周波数スペクトルをみると、従来報告してきた 6 個の有意成分波のほかに A_{23} という成分波の振幅が大きくなり、とくに $U_r > 85$ では A_{01} の 1 割以上になる。

2) α_{12} , α_{11} , α_{13} などを Fontanet の理論、Kravtchenko & Santon の理論および浜田の理論によって検討したが、いずれも解析値は理論値より小さい。しかし U_r と共に増加する傾向は一致している。

3) 正弦波形から分裂する非定形波の諸特性を明らかにすることができた。

4) 水槽内で実験を行う場合には 5 個の観測値 $\eta_1 \sim \eta_5$ を組合せることによって非定形波の特性を知ることができる。

参 考 文 献

- 1) Zabusky, N. J. and M. D. Kruskal: Interaction of "Solitons" in a collisionless plasma and the recurrence of initial states, Phys. Rev. Letters, Vol. 15, No. 6, pp. 240~243, 1965.
- 2) Zabusky, N. J. and C. J. Galvin: Shallow-water waves, the Korteweg-de Vries equation and solitons, J.F.M., Vol. 49, pp. 811~824, 1971.
- 3) 石田 昭・石田和生: 浅水領域における波形の分裂現象—二次波峯現象と Soliton について—, 第 20 回海岸工学講演会論文集, pp. 403~409, 1973.
- 4) 細井正延・石田 昭: 二次波峯現象における非線型性の解析, 第 17 回海岸工学講演会論文集, pp. 47~52, 1970.
- 5) Fontanet, P.: Théorie de la génération de la houle cylindrique par un batteur plan, La Houille Blanche No. 1, pp. 3~31, No. 2, pp. 174~197, 1961.
- 6) Hulsbergen, C. H.: Origin, effect and suppression of secondary waves, Proc. of 14th Conference on Coastal Eng., pp. 392~411, 1974.
- 7) 石田 昭: 浅水領域での分裂波 Soliton の特性について, 第 22 回海岸工学講演会論文集, 1975.
- 8) Kravtchenko, J. and L. Santon: Nouvelles recherches sur la houle de laboratoire, Proc. of I.A.H.R. 1957.
- 9) Hamada, T.: The secondary interactions of surface waves, Report of Port and Harbour Technical Research Institute, No. 10, 28 p., 1965.