

琵琶湖南湖における拡散特性

今 本 博 健*・道 上 正 規**

近年における水管理の問題は、単に量的なものにとどまらず、質的なものへと広がりつつあり、拡散特性を解明することが重要な課題の一つに挙げられている。

本研究は、拡散解析法の基礎事項について述べるとともに、最近行われた琵琶湖南湖における観測資料^{1),2)}を用いて、拡散特性について検討したものである。

1. 拡散解析法

1.1 ラグランジュ的拡散理論

等方性一様乱流場において、原点から次々と放出された粒子の t 時間後の平均位置からの変位が (x, y) となる確率 $p(x, y)$ はガウス分布によって表わされるとすると

$$p(x, y) = (1/2\pi\sigma^2) \exp \{ -(x^2 + y^2)/2\sigma^2 \} \quad \cdots (1)$$

となる。ここに、 σ^2 は x あるいは y 方向の分散であって、次のように表わされる³⁾。

$$\sigma^2 = 2\bar{u}^2 \int_0^t \int_0^{t_1} R_L(\xi) d\xi dt_1 \quad \cdots (2)$$

ここに、 $\bar{u}^2$: 乱れ速度の自乗平均値、 $R_L(\xi)$: ラグランジュの相関係数であって、ラグランジュの寿命時間 $T_L = \int_0^\infty R_L(\xi) d\xi$ を用いると、次のように書き直される。

$$\sigma^2 = \bar{u}^2 t^2 \quad (t \ll T_L), \quad \sigma^2 = 2\bar{u}^2 T_L t \quad (t \gg T_L) \quad \cdots (3)$$

また、拡散係数 K は

$$K = (1/2) d\sigma^2/dt \quad \cdots (4)$$

と定義され、式 (3) より次式が得られる。

$$K = \bar{u}^2 t \quad (t \ll T_L), \quad K = \bar{u}^2 T_L \quad (t \gg T_L) \quad \cdots (5)$$

以上は固定源型拡散といわれるものについてであって、浮遊源型拡散については拡散時間 t が小さい場合の $\bar{u}^2$ はある評価時間 T_e のもとでの値 $\langle \bar{u}^2 \rangle$ に置換える必要がある⁴⁾。

$\langle \bar{u}^2 \rangle$ は主として $f_e = 1/T_e$ より大きな周波数成分によって定まり、次のように表わされる。

$$\langle \bar{u}^2 \rangle \sim \int_{f_e}^\infty S_L(f) df \sim f_e S_L(f_e) \quad \cdots (6)$$

ここに、 $S_L(f)$: ラグランジュ的スペクトルであって、

$$S_L(f) = \bar{u}^2 T_L \quad (f \ll 1/T_L) \quad \cdots (7)$$

$$S_L(f) \sim \epsilon f^{-2} \quad (1/T_L \ll f \ll (\epsilon/\nu)^{1/2}) \quad \cdots (8)$$

$$S_L(f) \sim (\epsilon^3/\nu)^{1/2} f^{-3} \quad (f \gg (\epsilon/\nu)^{1/2}) \quad \cdots (9)$$

と表わされる。ただし、 ϵ : エネルギ一逸散率、 ν : 動粘性係数である。

一方、 T_e は初期の粒子間隔 l_0 に関係する時間 T_{0e} と拡散時間 t の和であるが⁵⁾、近似的に次のように表わされる。

$$T_e = T_{0e} \quad (t \ll T_{0e}), \quad T_e = t \quad (t \gg T_{0e}) \quad \cdots (10)$$

いま T_{0e} は、 $l_0 \ll \eta$ ($=(\nu^3/\epsilon)^{1/4}$: 局所スケール) の場合には ϵ, ν および l_0 の 3 量によって定まり、 $\eta \ll l_0 \ll L$ (平均スケール) の場合には ϵ および l_0 の 2 量によって定まるとすると、次元解析より次の関係式が得られる。

$$T_{0e} \sim l_0/(\epsilon\nu)^{1/4} \quad (l_0 \ll \eta), \quad T_{0e} \sim (l_0^3/\epsilon)^{1/3} \quad (\eta \ll l_0 \ll L) \quad \cdots (11)$$

式 (6)~(11) を式 (3) の第 1 式に用いるとともに、得られた結果を式 (4) に用いると、 $t \ll T_L$ における浮遊源型拡散の σ^2 および K の表示式として次式が得られる。

i) $l_0 \ll \eta$ の場合:

$$\sigma^2 \sim (\epsilon/\nu) l_0^2 t^2, \quad K \sim (\epsilon/\nu) l_0^2 t \quad (t \ll l_0/(\epsilon\nu)^{1/4}) \quad \cdots (12)$$

$$\sigma^2 \sim (\epsilon^3/\nu)^{1/2} t^4, \quad K \sim (\epsilon^3/\nu)^{1/2} t^3 \quad (l_0/(\epsilon\nu)^{1/4} \ll t \ll (\nu/\epsilon)^{1/2}) \quad \cdots (13)$$

$$\sigma^2 \sim \epsilon t^3, \quad K \sim \epsilon t^2 \quad ((\nu/\epsilon)^{1/2} \ll t \ll T_L) \quad \cdots (14)$$

ii) $\eta \ll l_0 \ll L$ の場合:

$$\sigma^2 \sim (\epsilon l_0)^{2/3} t^2, \quad K \sim (\epsilon l_0)^{2/3} t \quad (t \ll (l_0^3/\epsilon)^{1/3}) \quad \cdots (15)$$

$$\sigma^2 \sim \epsilon t^3, \quad K \sim \epsilon t^2 \quad ((l_0^3/\epsilon)^{1/3} \ll t \ll T_L) \quad \cdots (16)$$

iii) $l_0 \gg L$ の場合:

$$\sigma^2 = \bar{u}^2 t^2, \quad K = \bar{u}^2 t \quad (t \ll T_L) \quad \cdots (17)$$

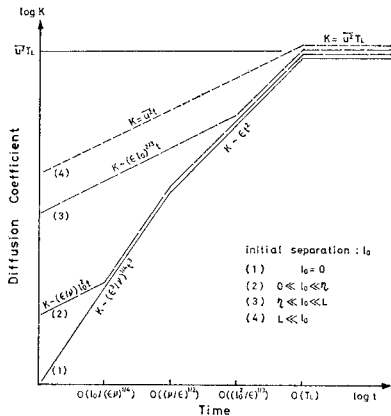
また $t \gg T_L$ の場合には $T_e = t \gg T_L$ となり、 l_0 に関係なく式 (3) および (5) の第 2 式が適用され、次のようになる。

$$\sigma^2 = 2\bar{u}^2 T_L t, \quad K = \bar{u}^2 T_L \quad (t \gg T_L) \quad \cdots (18)$$

図—1 は式 (12)~(18) の関係を示したものであって、従来⁵⁾ より知られている (ii) の場合のほか、(i) および (iii) によって記述される場合もありうる事が知れる。ただし、それらはいずれも l_0 および t がきわめて小さい場合についてであって、実用上はさほど重要ではない。

* 正会員 工博 京都大学教授 防災研究所

** 正会員 工博 鳥取大学教授 工学部土木工学科

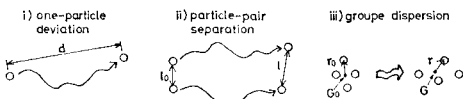


図—1 浮遊型拡散における初期間隔の効果

1.2 拡散係数の推定

(1) 多数個粒子の拡散

多数個の粒子が放出された場合の拡散追跡法として図—2 に示される3種の方法がよく用いられる。すなわち、



図—2 多数個粒子の拡散追跡法

i) 各粒子移動法: 各粒子ごとの移動距離の分散 $\bar{d}^2$ に基づくものであって、個々の粒子が式 (1) に示されるような運動をする場合、 $\bar{d}^2$ および K_d は次のように表わされる。

$$\bar{d}^2 \approx \bar{d}_x^2 + \bar{d}_y^2 = 2\sigma^2, \quad K_d = (1/4)d(\bar{d}^2)/dt \dots (19)$$

この方法は各粒子が同一の固定点源から放出されたと仮定することに対応している。

ii) 粒子対間隔法: 任意の2個の粒子対間隔の自乗平均値 $\bar{l}^2$ に基づくものであって、式 (1) が適用される場合、 $\bar{l}^2$ および K_l は次のように表わされる。

$$\bar{l}^2 = \bar{l}_x^2 + \bar{l}_y^2 = \bar{l}_0^2 + 4\sigma^2, \quad K_l = (1/8)d(\bar{l}^2)/dt \dots (20)$$

iii) 粒子群分散法: 多数個の粒子の平均位置からの変位の自乗平均値 (分散) $\bar{r}^2$ に基づくものであって、やはり式 (1) が適用される場合、 $\bar{r}^2$ および K_r は次のようになる。

$$\bar{r}^2 = \bar{r}_x^2 + \bar{r}_y^2 = \bar{r}_0^2 + 2\sigma^2, \quad K_r = (1/4)d(\bar{r}^2)/dt \dots (21)$$

(2) 濃度の拡散

一様な2次元平面内における拡散基礎式は

$$\partial C / \partial t = (1/r) \partial (Kr \partial C / \partial r) / \partial r \dots (22)$$

と表わされる。ここに、 C : 濃度、 r : 原点からの距離である。いま、 K を一定とし、原点に M という拡散物質量が瞬間的に供給される場合、および単位時間当たり m という物質量が連続的に供給される場合について考えると、それぞれに対する式 (22) の解および r 方向の分散 σ_r^2 は次のようになる。

$$C = (M/4\pi Kt) \exp(-r^2/4Kt), \quad \sigma_r^2 = 4Kt \quad (\text{瞬間源}) \dots (23)$$

$$C = (m/4\pi K) \int_0^t (1/\tau) \exp(-r^2/4K\tau) d\tau, \quad \sigma_r^2 = 2Kt \quad (\text{連続源}) \dots (24)$$

(3) オイラー的乱れ特性量による表示

オイラー・ラグランジュ的システム間の関係として

$$T_L/T_E = \alpha(U/u') \dots (25)$$

ここに、 T_E : オイラー的通過時間、 U : 平均速度、 $u' = \sqrt{\bar{u}^2}$: 乱れ速度、 $\alpha = 0.4$: 普遍定数、という Hay-Pasquill⁶⁾ の変換式を式 (5) の第2式に用いると次式が成立する。

$$K = \alpha u' U T_E = \alpha u' L \dots (26)$$

ここに、 $L = U T_E$: オイラー的平均スケールである。

また、 u' , L およびエネルギー逸散率 ϵ の間には

$$\epsilon = C u'^3 / L \dots (27)$$

の関係が成立する⁷⁾。ここに、 C : 普遍定数であって、2次元開水路流れにおける実験値⁸⁾を用いると $C = 1.7$ である。式 (27) を式 (26) に用いると次式が得られる。

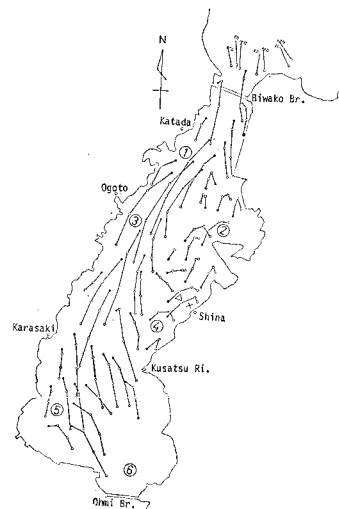
$$K = (\alpha/C^{1/3}) \epsilon^{1/3} L^{2/3} \dots (28)$$

2. 南湖における拡散解析

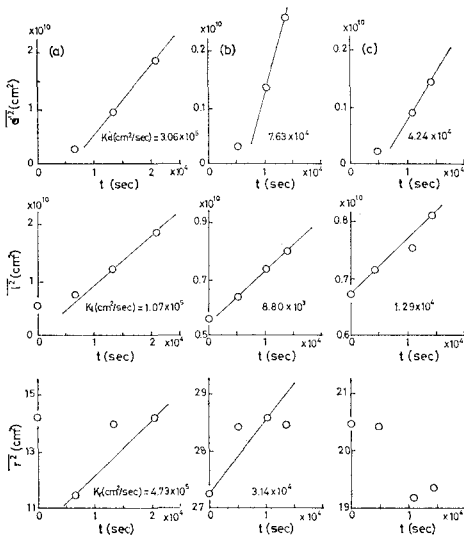
2.1 漂流板の航空写真観測による拡散解析

南湖における湖流観測を目的として、漂流板を用いた航空写真観測が実施され、図—3 に示されるような追跡図が得られている。

このような漂流板追跡結果をもとにして、既述の3方法をを用いた拡散解析を行なった。ただし、粒子対間隔法については、近隣の漂流板を結んだ三角形メッシュの辺長のみが粒子対間隔として採用されている。

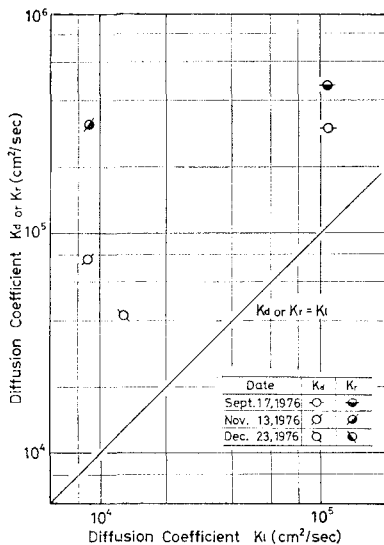


図—3 漂流板追跡図 (昭 51.9.17) —①: ベルゲン流速計設置点, △: 後漂地点, ×: 超音波流速計設置点



図—4 漂流板の拡散過程—(a) 昭51.9.17, (b) 同11.13, (c) 同12.23

解析結果は図—4 のようであって、各観測における漂流板追跡回数は4回と少なく、また観測値にはかなりのばらつきがあるものの、次の事項が知れる。すなわち、 $\bar{d}^2$ は拡散時間 t が大きくなるにしたがって増加しており、 t の大きな領域では $\bar{d}^2$ が t の1次式として表わされることが知れる。同様のことは $\bar{l}^2$ および $\bar{r}^2$ と t との関係についてもいえるが、とくに $\bar{r}^2$ の観測値のばらつきは大きく、 t の増加に対し $\bar{r}^2$ は必ずしも増加していない。これは、本観測では漂流板がほぼ一定間隔で南湖全域に配置され、偏流などによる集合化が生じたことによるものと考えられる。なお、漂流板の初期間隔は400~500m とかなり大きく、初期間隔の効果に関する検討は困難である。



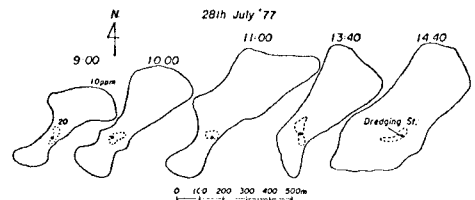
図—5 漂流板追跡法による拡散係数の比較

いま、 t の比較的大きな観測値を重視してそれぞれに直線関係をあてはめ、その勾配より拡散係数を推定すると、図中に示された値が得られる。

図—5 は3種の追跡法による拡散係数を比較したものであって、各粒子移動法による Ka および粒子群分散法による Kr はいずれも粒子対間隔法による Kt に比しかなり大きく、とくに Kr は極端に大きすぎる場合が多い。したがって、ここでは Ka と Kt とを採用し、その相乗平均でラグランジュ的な拡散係数の推定値とし、 K_L で表わすことにする。

2.2 浮遊泥の濁度観測による拡散解析

南湖内における浚渫作業に伴う浮遊泥の拡散に着目し、図—3 に併示された浚渫船周辺における濁度観測を行なった。図—6 は、観測結果の一例として、浚渫作業



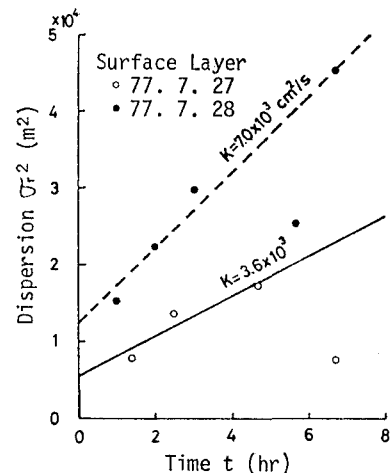
図—6 濁度分布の時間的变化(表層)

開始時間(8:00)以後の水面付近における濁度分布の時間的变化を示したものであって、等濃度線はかなり歪んだ形状をしているが、これを等面積円に置換え、観測時刻ごとの分散 σ_d^2 を次式により算定した。

$$\sigma_d^2 = \sum_{i=1}^n 2\pi r_i^3 C_i \Delta r_i / \sum_{i=1}^n 2\pi r_i C_i \Delta r_i \dots \dots \dots (29)$$

ここに、 i : 等濃度線の高濃度順の番号、 r_i : 濃度 C_i の等面積円半径、 Δr_i : 等面積円の半径差である。

図—7 は式(29)より算定された σ_d^2 と拡散時間 t との関係を示したものであって、両者間の関係を式(24)を



図—7 浮遊泥の拡散過程

考慮して

$$\sigma^2 = \sigma_0^2 + 2Kt$$

と仮定し、 K を計算すると図中の値が得られる。

2.3 流速の定点観測による拡散解析

漂流板の航空写真観測および浚渫船周辺の濁度観測では、それぞれ、ベルゲン流速計および超音波流速計による流速・流向観測が行われている。これらの流速計による観測点は、図-3 に併示されるように、前者については南湖内の6定点の水面下2m、後者については浚渫地点より東約1kmの水面下1mである。なお、ベルゲン流速計は5分間ごとの流速・流向が記録されるようになっているため、サンプリング $\Delta t = 5 \text{ min}$ であり、データ数 $N = 300$ が解析の対象とされ、超音波流速計では $\Delta t = 5 \text{ min}$, $N = 408$ が用いられている。

流速の定点観測から拡散係数を推定するため、次の方法により各種の乱れ特性量を解析した。

i) 平均流速 U および乱れ速度 $\bar{u}^2$: 対象期間の流速記録の平均値および分散として U および $\bar{u}^2$ は算定される。

ii) オイラー的通過時間 T_E : 自己係数 $R(t)$ の $t=0$ から ∞ までの積分値として T_E は定義されるが、ここでは最も単純なセミスケールの手法を用いて T_E を推定した。

iii) エネルギー逸散率 ϵ : Dryden によるスペクトル積分法、相関係数を用いた逸散スケール法、Kolmogorov によるスペクトルあるいは構造関数についての相似則法など各種の方法が ϵ の推定法として用いられているが、ここでは評価時間に支配されない相似則法により ϵ を推定した。すなわち、凍結乱流と仮定される場合、慣性領域の周波数スペクトル $S(f)$ は

$$S(f) = S_{5/3} (U\epsilon/2\pi)^{2/3} f^{-5/3} \quad \dots\dots\dots (30)$$

と表わされ、また構造関数 $D(t)$ は、

$$D(t) = D_{2/3} (U\epsilon t)^{2/3} \quad \dots\dots\dots (31)$$

と表わされるから、観測値に式 (30) あるいは (31) を用いると ϵ が決定される。ここに、 $S_{5/3}$ および $D_{2/3}$ はいずれも普遍定数であって、 $S_{5/3} = 0.47$, $D_{2/3} = 1.9$ である。

本観測では、超音波流速計については式 (30) との比較より ϵ を算定したが、ベルゲン流速計については $S(f)$ が大きなばらつきを見せたため、式 (31) により ϵ の算定が行われている。ただし、図-8 に示されるように、 $U/u' \gg 1$ の場合の $D(t)$ には式 (31) の $2/3$ 乗則がよく適用されるが、 $U/u' \ll 1$ の場合にはラグランジュ的構造関数の相似則、すなわち

$$D(t) = D_1 \epsilon t \quad \dots\dots\dots (32)$$

ここに、 $D_1 = 1.3$: 普遍定数、がむしろよく適合するため、観測された $D(t)$ の特性を吟味し、式 (31) あるいは (32) のいずれかを用いて ϵ を決定した。

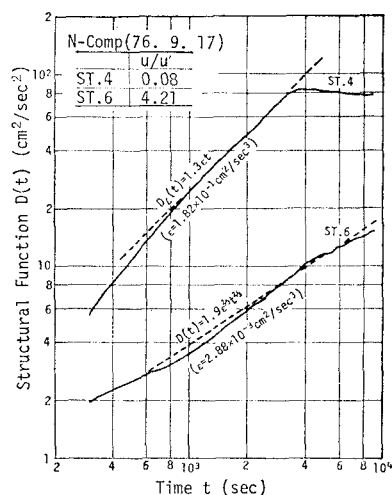


図-8 乱流強度による構造関数の差異

以上のようにして決定された乱れ特性量を式 (26) あるいは (28) に用いると拡散係数 K が決定されるが、流速の N および E 成分ごとに式 (26) および (28) を用いて算定される4量の K の相乗平均を定点観測による推定値 K_E とする。

図-9 は K_E と既述の K_L を比較したものであって、両者は比較的よく対応しているため、拡散係数 K の最終的な推定値として K_E と K_L の相乗平均を用いることにすると、南湖では $K = 10^4 \sim 10^5 \text{ cm}^2/\text{sec}$ であることが知れる。

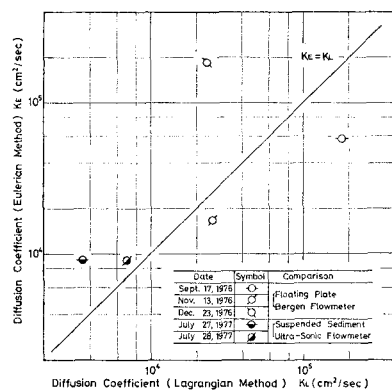
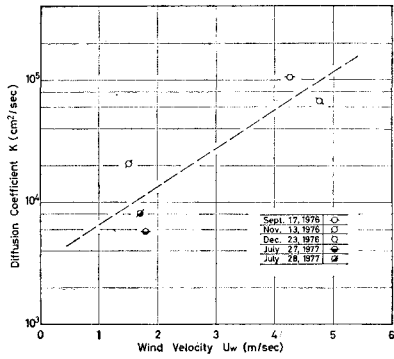


図-9 ラグランジュ法とオイラー法による拡散係数の比較

3. おわりに

本研究は琵琶湖南湖における拡散特性について若干の検討をしたものであって、解析に用いた資料は十分でないが、概略的な特性は把握されているものと考えられる。

なお、琵琶湖南湖の拡散係数は放流量、風速などによって変化すると考えられるため、拡散特性を解明するにはさらに多くの観測資料による検討が必要であるが、本研究で得られた拡散係数の推定値 K と風速 U_w との関



図—10 拡散係数と風速との関係

係を示すと 図—10 のようになり、 U_w が大きくなると K も大きくなることが知れる。

最後に本観測に御協力いただいた建設省琵琶湖工事事務所をはじめとする関係各位に深甚なる謝意を表する。

参 考 文 献

- 1) 建設省琵琶湖工事事務所・水資源開発公団琵琶湖開発事業建設部・防災研究協会：昭和51年度琵琶湖南湖の水理と数値予測に関する検討業務報告書，昭52.3.
- 2) 建設省琵琶湖工事事務所・水資源開発公団琵琶湖開発事業建設部・防災研究協会：昭和52年度琵琶湖南湖の水理と数値予測に関する検討業務報告書，昭53.3.
- 3) Taylor, G. I.: Diffusion by continuous movements, Proc. Lond. Math. Soc., **2-20**, pp. 196~211, 1921.
- 4) 井上栄一：地表風の構造，農業技術研究所報告，**A2**, 1952.
- 5) 例えば，日野幹雄：流体力学，朝倉書店，昭49.
- 6) Hay, J. S. and F. Pasquill: Diffusion from a fixed source at a height of a few hundred feet in the atmosphere, Jour. Fluid Mech., **2**, pp. 299~310, 1957.
- 7) Taylor, G. I.: Statistical theory of turbulence, Proc. Roy. Soc., **A 151**, pp. 421~478, 1935.
- 8) 今本博健・浅野富夫：開水路流れにおける乱れの普遍的特性について，第19回水理講演会論文集，pp. 161~166, 1975.