

港口附近における波の回折と物質の拡散

松梨順三郎*・春名誠治**・坂本昭夫***

1. ま え が き

一般に湾内における水質汚染の進行過程は大きく三つの段階にわけられる。第1段階は汚染が湾内の汚染物質放出口附近に卓越している状態で、現象の主因は汚染水のもつ濃度差、密度差または温度差などのいわゆる異質性にある。第2段階は湾内での海流、潮流、密度流および風波などによる海水の移流と、それらにともなう乱流の拡散効果が卓越する状態である。第3段階は上記の第2段階の拡散効果がすすんで、閉塞性の強い湾内では汚染について完全混合の状態となり、湾口を通じての汚染物質の稀釈効果が卓越してくる状態である。山陰地方の漁港などにその例をみるわけであるが、一般にこの地方では潮差は50cm程度で非常に小さく、流入河川の集水面積も小さいが、魚介類の解体作業などのために湾内の汚染がはげしくなっている。このような状況での港湾内の汚染物質の港口を通じての稀釈効果の主役は潮流ではなくて、主としてしけ時の風浪であると考えられる。本研究ではこのような諸条件をもつ港湾を想定し、風浪など、短周期の入射波による港口附近での波の回折と、それによって特性づけられる汚染の進行に注目した。これを解明する第1歩として、ここでは港口附近をモデル化し、次の各段階によって研究をすすめた。第1段階では1本の半無限防波堤の先端部、および2本の半無限防波堤からなる防波堤開口部附近における入射波の反射・回折現象を経時的、定量的に把握し、第2段階では前段階の流れの場を基礎にして、これらの海域における汚染の進行にかかわる一般的特性を明らかにした。

2. 港口附近の波浪解析

図-1のように湾内の水域が非常に広く、2本の半無限防波堤が港口幅 $2l$ をもって一直線上に配置されている港湾（両防波堤とよぶ）を想定する。これに関連して、図-2のような1本の半無限直線防波堤（片防波堤とよぶ）による入射波の回折現象については Sommer-

feld の解析解があり、速度ポテンシャル ϕ , r 方向の速度成分 V_r , および θ 方向の速度成分 V_θ はそれぞれ次の式 (1), (2), (3) で与えられる。

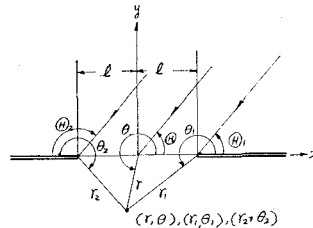


図-1 両防波堤モデル

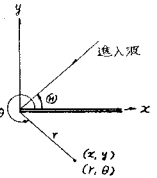


図-2 片防波堤モデル

$$\begin{aligned} \phi = & \cosh k(z+H) [\cos(a+\alpha-\pi/4+\sigma t) \\ & + \cos(b+\beta-\pi/4+\sigma t) \\ & + (1/\sqrt{2}) \{P \cos(a+\sigma t) + Q \cos(b+\sigma t)\}] \end{aligned} \quad \cdots \cdots (1)$$

$$\begin{aligned} V_r = & \cosh k(z+H) [-c(-) \sin(a+\alpha-\pi/4+\sigma t) \\ & - c(+) \sin(b+\beta-\pi/4+\sigma t) \\ & - (1/\sqrt{2}) \{Pc(-) \sin(a+\sigma t) \\ & + Qc(+) \sin(b+\sigma t)\} \\ & + (1/2r\sqrt{\pi}) \{\rho(-) \cos(a+\alpha-\rho^2(-)+\sigma t) \\ & + \rho(+) \cos(b+\beta-\rho^2(+)+\sigma t)\}] \quad \cdots \cdots (2) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} V_\theta = & \cosh k(z+H) [s(-) \sin(a+\alpha-\pi/4+\sigma t) \\ & + s(+) \sin(b+\beta-\pi/4+\sigma t) \\ & + (1/\sqrt{2}) \{Ps(-) \sin(a+\sigma t) \\ & + Qs(+) \sin(b+\sigma t)\} \\ & - (1/2r\sqrt{\pi}) \{\rho s(-) \cos(a+\alpha-\rho^2(-)+\sigma t) \\ & + \rho s(+) \cos(b+\beta-\rho^2(+)+\sigma t)\}] \quad \cdots \cdots (3) \end{aligned}$$

ここに、

$$\begin{aligned} \rho(+) &= \sqrt{2kr} \cos(1/2)(\theta+\Theta) \\ \rho(-) &= \sqrt{2kr} \cos(1/2)(\theta-\Theta) \\ c(\rho^2(+)) &= \sqrt{2/\pi} \int_0^{\rho(+)} \cos \xi^2 d\xi \\ c(\rho^2(-)) &= \sqrt{2/\pi} \int_0^{\rho(-)} \cos \xi^2 d\xi \\ s(\rho^2(+)) &= \sqrt{2/\pi} \int_0^{\rho(+)} \sin \xi^2 d\xi \end{aligned}$$

* 神戸大学工学部教授
** 神戸大学大学院学生
*** 飛島建設株式会社

$$s(\rho^2(-)) = \sqrt{2/\pi} \int_0^{\rho^2(-)} \sin \xi^2 d\xi$$

$$P \sin \alpha = s(\rho^2(-)) - 1/2$$

$$P \cos \alpha = c(\rho^2(-)) - 1/2$$

$$Q \sin \beta = s(\rho^2(+)) - 1/2$$

$$Q \cos \beta = c(\rho^2(+)) - 1/2$$

$$a = \pi/4 - \alpha + kr \cos(\theta - \Theta)$$

$$b = \pi/4 - \beta + kr \cos(\theta + \Theta)$$

$$c(-) = k \cos(\theta - \Theta)$$

$$c(+) = k \cos(\theta + \Theta)$$

$$s(-) = k \sin(\theta - \Theta)$$

$$s(+) = k \sin(\theta + \Theta)$$

$$\rho_s(+) = \sqrt{2kr} \sin(1/2)(\theta + \Theta)$$

$$\rho_s(-) = \sqrt{2kr} \sin(1/2)(\theta - \Theta)$$

ここに, L は波長, T は周期, $k=2\pi/L$, $\sigma=2\pi/T$, H は静水面の深さ, z は静水面上鉛直方向の座標とする.

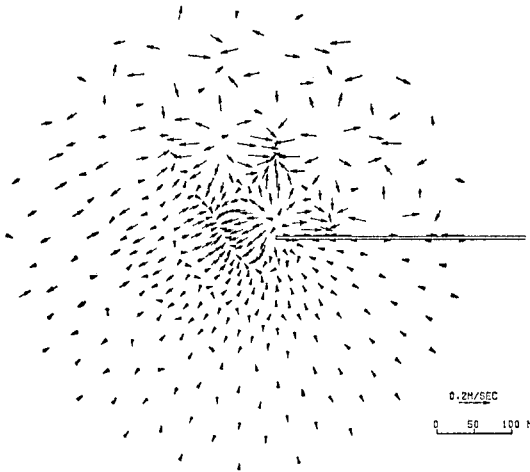


図-3 片防波堤流況図 ($\Theta=30^\circ$, $t=0.5$ sec)

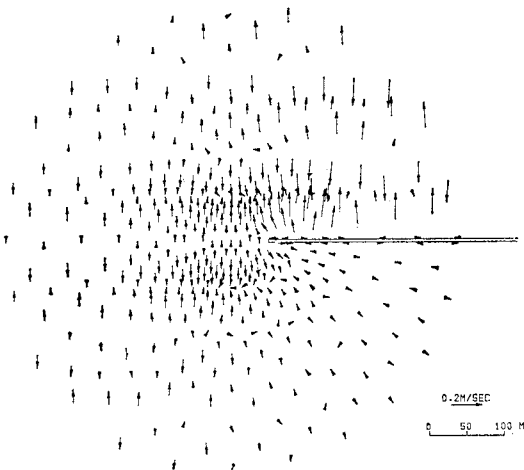


図-4 片防波堤流況図 ($\Theta=90^\circ$, $t=0.5$ sec)

図-3, 4 および 5 は自由表面 ($z=0$) における流速ベクトルで, 位相 $t=0.5T$, 入射角がそれぞれ $\theta=30^\circ$, 90° および 150° の場合の平面分布を示す. この場合 $H=20$ m, $T=10$ sec, $L=121$ m とした.

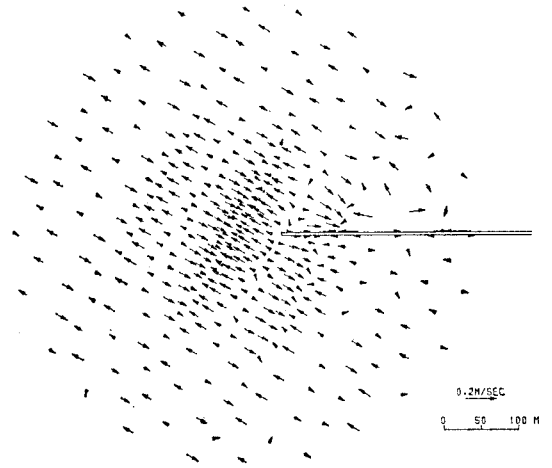


図-5 片防波堤流況図 ($\Theta=150^\circ$, $t=0.5$ sec)

この解を利用して 図-1 の場合は同図のように座標系を設定すると, その速度ポテンシャル Φ , r および θ 方向の速度成分 U_r および U_θ は近似的に次式で与えられる.

$$\Phi = \phi_1 + \phi_2 \dots\dots\dots (4)$$

$$U_r = V_{r1} \cos \theta_1 + V_{\theta 1} \cos(\pi/2 + \theta_1) + V_{r2} \cos(\pi - \theta_2) + V_{\theta 2} \cos(\pi/2 - \theta_2) \dots (5)$$

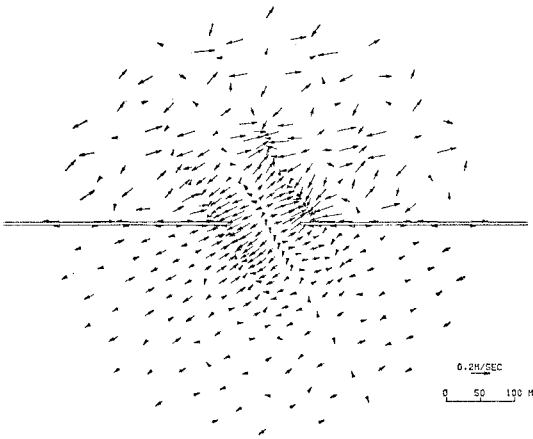
$$U_\theta = V_{r1} \sin \theta_1 + V_{\theta 1} \sin(\pi/2 + \theta_1) + V_{r2} \sin(\pi - \theta_2) + V_{\theta 2} \sin(\pi/2 - \theta_2) \dots (6)$$

ただし, ϕ_1 , V_{r1} および $V_{\theta 1}$ は式 (1), (2), (3) でそれぞれ $r=r_1$, $\theta=\theta_1$, $\Theta=\Theta_1$, $t=t_1$ とおいた量であり, ϕ_2 , V_{r2} および $V_{\theta 2}$ は式 (1), (2), (3) でそれぞれ $r=r_2$, $\theta=\theta_2$, $\Theta=\Theta_2$, $t=t_2$ とおいた量である. なお, r_1 , r_2 , θ_1 , θ_2 , Θ_1 , Θ_2 , t_1 および t_2 と r , θ , t とはつぎのように関係づけられる. この場合, 両防波堤先端部での波の位相のズレを考慮した.

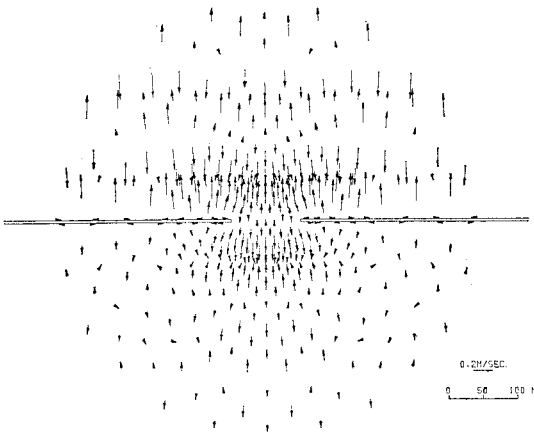
$$\left. \begin{aligned} r_1 &= \sqrt{r^2 + l^2 - 2rl \cos \theta} \\ \theta_1 &= \cot^{-1} \{ \cot \theta - (l/r) \operatorname{cosec} \theta \} \\ \Theta_1 &= \Theta, \quad t_1 = t + (Tl/L) \cos \theta \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (7)$$

$$\left. \begin{aligned} r_2 &= \sqrt{r^2 + l^2 + 2rl \cos \theta} \\ \theta_2 &= \cot^{-1} \{ -\cot \theta - (l/r) \operatorname{cosec} \theta \} \\ \Theta_2 &= \Theta, \quad t_2 = t - (Tl/L) \cos \theta \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (8)$$

図-6 および 7 は, 図-3, 4, 5 と同様, 自由水面 ($z=0$), 位相 $t=0.5T$, 入射角 30° および 90° の場合の流況図を示す. $H=20$ m, $T=10$ sec, $L=121$ m, $2l=100$ m とした.



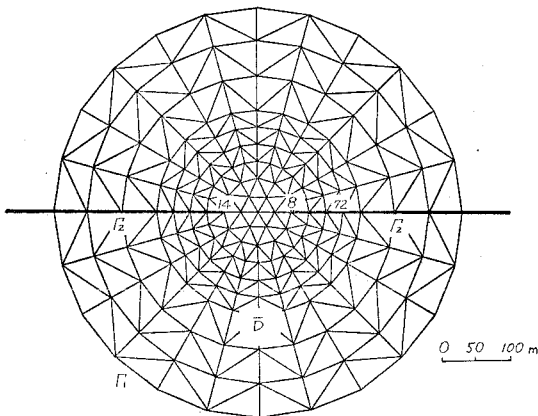
図—6 兩防波堤流況図 ($\theta=30^\circ$, $t=0.5$ sec)



図—7 兩防波堤流況図 ($\theta=90^\circ$, $t=0.5$ sec)

3. 港口附近の拡散計算

図—1 のモデルにより、その港口附近における汚染物質の拡散特性をガラーキン有限要素法を用いて数値解析



図—8 計算領域と有限要素の配置

した。図—8 は計算領域および有限要素の配列を示す。鉛直方向の積分形としての拡散の基礎方程式は次式で与えられる。

$$\begin{aligned} \frac{\partial c}{\partial t} + U \frac{\partial c}{\partial x} + V \frac{\partial c}{\partial y} = \frac{1}{H+h} \frac{\partial}{\partial x} \left\{ (H+h) D_x \frac{\partial c}{\partial x} \right\} \\ + \frac{1}{H+h} \frac{\partial}{\partial y} \left\{ (H+h) D_y \frac{\partial c}{\partial y} \right\} \\ + \frac{1}{H+h} \sum_p Q_{0,p} \delta(x-x_p) \delta(y-y_p) \dots (9) \end{aligned}$$

ここに、 c , U および V はいずれも断面平均量で、それぞれ、汚染物質の濃度、 x および y 方向の速度成分とする。 $Q_{0,p}$ は P 点の点源強度、 δ はデルタ関数、 h は波高、 D_x , D_y は x , y 方向の分散係数であるが、ここでは、簡単のために $H=\text{const.}$, $H \gg h$, $D_x=D_y=D$ とする。 $Q_p=Q_{0,p}/H$ を導入すると、

$$\begin{aligned} \frac{\partial c}{\partial t} + U \frac{\partial c}{\partial x} + V \frac{\partial c}{\partial y} = D \left(\frac{\partial^2 c}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 c}{\partial y^2} \right) \\ + \sum_p Q_p \delta(x-x_p) \delta(y-y_p) \dots (10) \end{aligned}$$

初期条件は

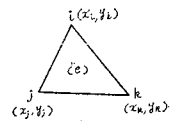
$$t=0 \text{ で } c(x, y, t)=0 \dots (11)$$

境界条件は 図—8 を参照して

$$\Gamma=\Gamma_1 \text{ において } c=\text{const (既知)} \dots (12)$$

$$\Gamma=\Gamma_2 \text{ において } D \left(\frac{\partial c}{\partial x} l_x + \frac{\partial c}{\partial y} l_y \right) = 0 \dots (13)$$

とする。ここに、 l_x , l_y は境界面法線方向余弦である。要素を 図—9 のような三項点三角形要素とし、



試行関数 U_a , V_a , c_a , および形状関数 N_i をつぎのように設定する。

図—9 有限要素

$$\begin{aligned} U_a = \sum N_i U_i, \quad V_a = \sum N_i V_i, \quad c_a = \sum N_i c_i \\ N_i = (a_i + b_i x + c_i y) / 2\Delta \end{aligned} \dots (14)$$

ただし、 $a_i = x_j y_m - x_m y_j$, $b_i = y_i - y_m$, $c_i = x_m - x_j$, Δ は要素三角形の面積とする。ガラーキン法では重み関数として形状関数を用いる。領域を $\bar{D}$ とし、式 (10) に適用すると

$$\begin{aligned} \iint_{\bar{D}} N_i \left[\left(\frac{\partial c_a}{\partial t} + U_a \frac{\partial c_a}{\partial x} + V_a \frac{\partial c_a}{\partial y} \right) - D \left(\frac{\partial^2 c_a}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 c_a}{\partial y^2} \right) - \sum_p Q_p \delta(x-x_p) \delta(y-y_p) \right] dx dy = 0 \dots (15) \end{aligned}$$

積分内の 2 階微分項を部分積分して、境界条件 (12) および (13) を考慮し、要素積分の和で表現すると、

$$\begin{aligned} \sum_e \iint_{\bar{D}_e} \left\{ N_i \left(\frac{\partial c_a}{\partial t} + U_a \frac{\partial c_a}{\partial x} + V_a \frac{\partial c_a}{\partial y} \right) + D \left(\frac{\partial N_i}{\partial x} \frac{\partial c_a}{\partial x} + \frac{\partial N_i}{\partial y} \frac{\partial c_a}{\partial y} \right) \right\} dx dy \end{aligned}$$

$$= \sum_e \iint_{\bar{D}_e} \sum_p Q_p \delta(x-x_p) \delta(y-y_p) N_i dx dy \dots\dots\dots (16)$$

となる。この式は節点 i をその頂点にもつ全要素についての総和を表わす。上式の右辺について

$$\begin{aligned} & \iint_{\bar{D}_e} \sum_p Q_p \delta(x-x_p) \delta(y-y_p) N_i dx dy \\ &= \sum_p Q_p N_i(x_p, y_p) \dots\dots\dots (17) \end{aligned}$$

汚染物質投入点を節点上に仮定するときは

$$\sum_p Q_p N_i(x_p, y_p) = \begin{cases} \sum Q_p & (i=p) \\ 0 & (i \neq p) \end{cases} \dots\dots\dots (18)$$

各要素について計算し、全体方程式 (16) を再構成すると、

$$[A]\{c\} + [B]\{c\} = \{Q\} \dots\dots\dots (19)$$

となる。ここに、 $\{c\}$ および $\{c\}$ は全節点での未知濃度およびその時間微分であり、 $[A]$ 、 $[B]$ は係数マトリックス、右辺の $\{Q\}$ は式(18)の右辺を成分とするベクトルである。

式 (19) の時間積分について、Crank-Nicholson の差分スキームを適用すると、

$$\left\{ \frac{[A]}{\Delta t} + \frac{[B]}{2} \right\} \{c^{k+1}\} = \left\{ \frac{[A]}{\Delta t} - \frac{[B]}{2} \right\} \{c^k\} + \{Q\} \dots\dots\dots (20)$$

ここに、 $[B]$ は時刻 t_k と t_{k+1} との中間の値をとる。

4. フロントル法の適用

最終的にえられた式 (20)、すなわち全体方程式の解法として、ここでは Frontal Solution 法を用いた。一般に大次元連立方程式の解法は反復法と直接法に分類することができる。反復法としては Jacobi 法、Gauss-Seidel 法、SOR 法、CG 法などがあり、直接法として、Gauss の消去法、バンドマトリックス法、ウェーブフロント法、Cholesky 法、Frontal Solution 法がある。フロントル法は非対称行列方程式をその対象としており、特に有限要素法で問題となる零成分の多い大次元連立方程式に対して有効である。

5. 計算結果と考察

図-10 および 11 は右防波堤先端から 75 m はなれた防波堤の外壁に連続点源を設定した場合の結果である。計算の基礎とした諸量は、流速場として

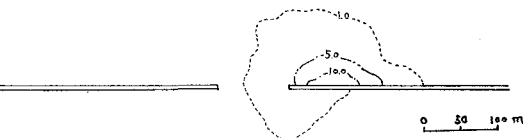


図-10 拡散パターン (両防波堤, $\theta=30^\circ$, $T=10$ sec, $t=20.0$ sec)

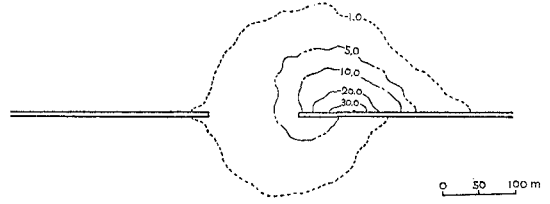


図-11 拡散パターン (両防波堤, $\theta=30^\circ$, $T=10$ sec, $t=60.0$ sec)

$H=20.0$ m, $T=10.0$ sec, $L=121.0$ m
 $2l=100$ m, $\theta=30^\circ$

拡散計算として、

$D=10.0$ m²/s, $Q_0, 72=0.1$ m³/sec, $\Delta t=0.1$ sec

とした。両図によると、壁面法線方向への物質の拡散が制限されて、壁面に沿った拡散効果が増大し、全体の広がりとして壁面方向に長く、長楕円状になってくることがわかる。

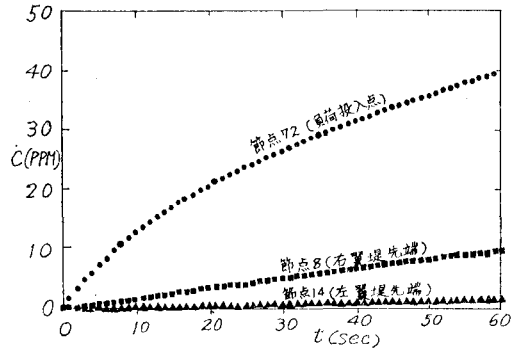


図-12 濃度経時変化

なお 図-12 はこの場合の節点 72, 8, 14 (図-8 参照) における濃度変化を示す。

参 考 文 献

- 1) Connor, J. J. and C. A. Brebbia: Finite Element Techniques for Fluid Flow, Newnes-Butterworths, London, 1976.
- 2) 田中 茂・松梨順三郎: 高砂港における波浪の回折について, 建設工学研究所報告, 第6号, pp. 103~116, 1964.
- 3) 首藤伸夫: 湾における物質の拡散, 水工学夏期研修, A, 土木学会水理委員会, 1970.
- 4) 榎木 亨・中辻啓二・和手信泰: 潮流解析における重み付き残差法の適用について, 第23回海岸工学講演会論文集, pp. 488~492, 1976.
- 5) 松梨順三郎・神吉和夫・中井茂喜・春名誠治: 大阪湾の汚濁解析, 第24回海岸工学講演会論文集, pp. 500~503, 1977.
- 6) Hood, P.: Frontal Solution Program for Unsymmetric Matrices, Int. J. Num. Meth. Engng., Vol. 10, pp. 379~399, 1976.