

三次元モデルによる流れと拡散の数値解法について (その 2)

堀口孝男*・富田 勇**・堀江 毅***

1. ま え が き

沿岸海域における浚渫や埋立による土砂(濁り)の沈降拡散予測手法の確立に対する要請は急速に高まっている。このため著者らは前年度、鉛直流およびこれによる拡散を取扱うことのできる三次元数値モデルを開発し、これを比較的形状単純な領域の流動計算及び浮遊土砂の沈降拡散計算に応用して、差分スキームと解の安定性、界面抵抗係数や渦動粘性係数などの水理パラメーターと計算結果などの比較からモデルの適用性を検討し報告した¹⁾。本年度も引続き土砂拡散における海底からの舞い上り効果のモデル化や土砂移動投入法のモデル化などの機能追加を行うと共に、本モデルの再現性を検討するため水理模型実験や解析解との比較、また計算機容量、計算時間を節約するため不等長間隔の格子を採用してその適用性を検討した。

本報告は、これらの中から、本モデルの再現性を検討するために行った流動モデルと過去の水理模型実験例²⁾との比較、拡散モデルとシアー拡散の理論解³⁾との比較、ならびに、不等長間隔の格子網を用いた流動計算、をとりあげてそれらの問題点や適用性について述べるものである。

2. 三次元モデル

モデルの基本式として、流れに対しては非圧縮粘性流体の連続式及び水平方向の運動方程式：

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \quad \dots\dots\dots(1)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} \\ = f - g \frac{\partial \zeta}{\partial x} + \nu_x \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \nu_y \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \nu_z \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \quad \dots\dots(2) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + w \frac{\partial v}{\partial z} \\ = -f - g \frac{\partial \zeta}{\partial y} + \nu_x \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \nu_y \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \nu_z \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} \\ \dots\dots\dots(3) \end{aligned}$$

さらに、拡散に対しては、

$$\begin{aligned} \frac{\partial c}{\partial t} + u \frac{\partial c}{\partial x} + v \frac{\partial c}{\partial y} + w \frac{\partial c}{\partial z} \\ = \frac{\partial}{\partial x} \left(D_x \frac{\partial c}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(D_y \frac{\partial c}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(D_z \frac{\partial c}{\partial z} \right) \\ - w_0 \frac{\partial c}{\partial z} \quad \dots\dots\dots(4) \end{aligned}$$

によった。

ここに、 x, y, z は平均海面上の一点を原点とし、 $x-y$ 平面を水平面、 z を鉛直上方にとった直交直線座標系の座標、 u, v, w はそれぞれ x, y, z 方向の流速、 ζ は平均水面からの水位、 f はコリオリ係数、 g は重力加速度、 ν_x, ν_y, ν_z は x, y, z 方向の動粘性係数、 c は濃度、 D_x, D_y, D_z は x, y, z 方向の拡散係数、 w_0 は土砂の沈降速度を示す。

上式(1)～(4)の離散化は、陰解法と陽解法とについて行った。詳細は前回¹⁾に報告したのでここでは省略する。

3. 数値モデルの再現性に対する検討

(1) 流動計算結果と水理模型実験との比較

流れに対する解析解は極めて特殊な条件の下でのみ存在するに過ぎず、実用的にはほとんど役に立たない。このため、流動モデルの再現性は、水理模型実験との比較により検討した。実験値には、高知港津波防波堤の効果調べるために一様水路(幅 80 cm、高さ 60 cm、長さ 15 m)の中間部に両側面より突堤を出して定常流を対象とした水平縮尺 1/325、鉛直縮尺 1/163 の浅田ら²⁾の結果を利用した。

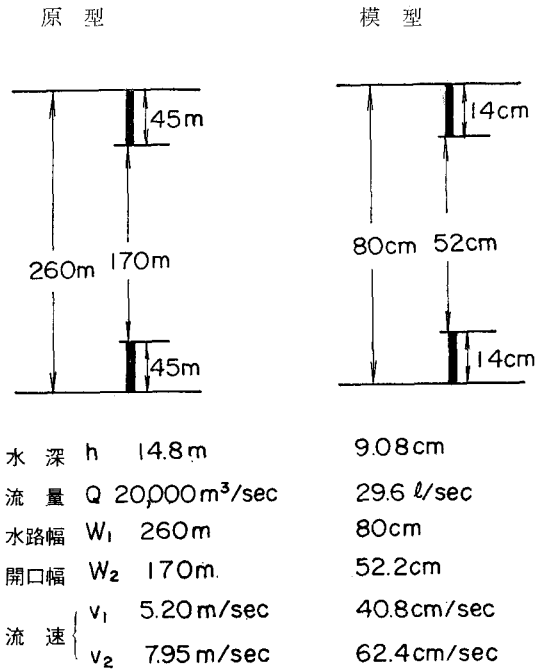
模型の対象となった水理諸元と原型との関係を示すと図-1(a)のようになる。これに対し数値計算では原型に合わせるため図-1(b)に示すように、 y (幅)方向には両端 1 格子を $\Delta y = 23.75$ m、その他を $\Delta y = 21.25$ m、 x (長さ)方向には $\Delta x = 32.5$ m、 z (深さ)方向には $\Delta z = 14.8$ m(一層)とする 1 300 m × 170 m × 14.8 m を対象領域とした。突堤は同図に示すように $I=10$ において両端よりそれぞれ 2 格子分突出させた。

実験は定常流であるが、計算においては安定性を確保

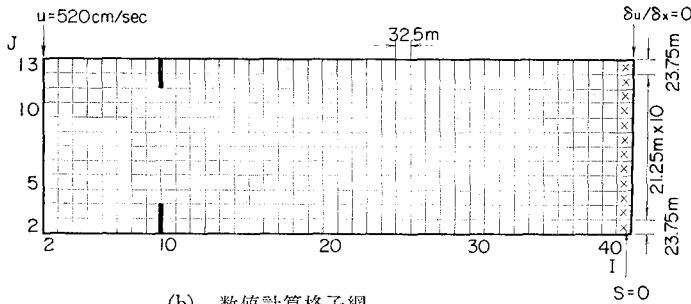
* 正会員 工博 東京都立大学教授 工学部土木工学科

** 正会員 (前)運輸省第三港湾建設局神戸調査設計事務所長

*** 正会員 運輸省港湾技術研究所海洋水理部海水浄化研究室長



(a) 模型実験水理諸元



(b) 数値計算格子網

図-1 模型実験条件と数値計算条件

するため領域左端境界すなわち $I=2$ において $t=0$ から 360 秒の間は $\Delta t=1$ 秒で $u_2=0$ から 520 cm/秒と線型的に増加させて前報¹⁾で述べた陽解法で、さらに $t=360$ から 420 秒の間は $\Delta t=10$ 秒, $u_2=520$ cm/秒 (一定) で陰解法にて計算した。右側境界 ($I=42$) は $\partial u / \partial x = 0$, $\zeta_{42}=0$ とした。また海底摩擦係数 (γ_b) は 0.0026, 水平渦動粘性係数は $A_x=10^8$ cm²/秒, $A_y=10^2$ cm²/秒とした。このようにして求めた結果を流向, および x 方向の流速について実験結果と比較すると 図-2, 図-3 のようになる。なお 図-2(a) は底面より 6 cm (原型で 9.78 m) の位置に 5 cm の細い糸を付けて定めた流向である。これらの結果から流向は突堤 ($I=10$) より下流部の側壁近傍に発生する反流域が計算の方でやや弱い以外はよく合っており, 流速は, 両突堤先端 ($I=10$) の流速が計算値の方で小さくなる以外は全般的によく合っている。側壁や突堤先端部で計算の流速値が小さくな

るのは, 格子間隔をこの領域で細かくとることにより改善できると思われるが, 移流項の差分方式とも合わせて今後検討の余地がある。

(2) 拡散モデルの再現性に対する検討

簡単な一樣流場における拡散を解析的に解く方法はあるが, 流れや領域が複雑になるとその適用性は極めて限定される。ここでは $u=U+\beta y+\gamma z$ (U, β, γ : 定数) なるシア流の有界でない領域における瞬間点源 (M) に対する大久保の解³⁾,

$$C(x, y, z, t) = \frac{M}{(4\pi t)^{3/2} \sqrt{D_x K_y K_z}} \times \exp \left[-\frac{\{\xi - (1/2)(\beta y + \gamma z)t\}^2}{4D_x t} - \frac{y^2}{4K_y t} - \frac{z^2}{4K_z t} \right] \quad \dots (5)$$

ここに,

$$\xi = x - Ut$$

$$D_x = K_x + S_x = K_x \{1 + (t/\tau)^2\}$$

$$S_x = (1/12)(K_y \beta^2 + K_z \gamma^2) t^2$$

$$\tau^2 = 12 / \{(K_y/K_x)\beta^2 + (K_z/K_x)\gamma^2\}$$

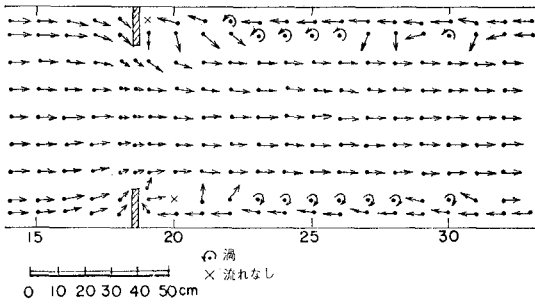
と数値モデルによる結果とを比較した。

計算は表-1に示す条件で行った。数値モデルとの比較に際し式 (5) に示す解析解は, 濃度 C が点で定義されることや, $t=0$ で点 (11, 11, 5) に集中し拡がりを持たないなど数値モデルの場合と異なる。このため, 解析解による濃度は, 数値モデルの各格子 ($\Delta x \times \Delta y \times \Delta z$) 内で積分しこれをその体積で除した平均値で表わし, さらに解析解の時刻を一定時間 (t_0) 拡散させ, その時の濃度を初期濃度とした。

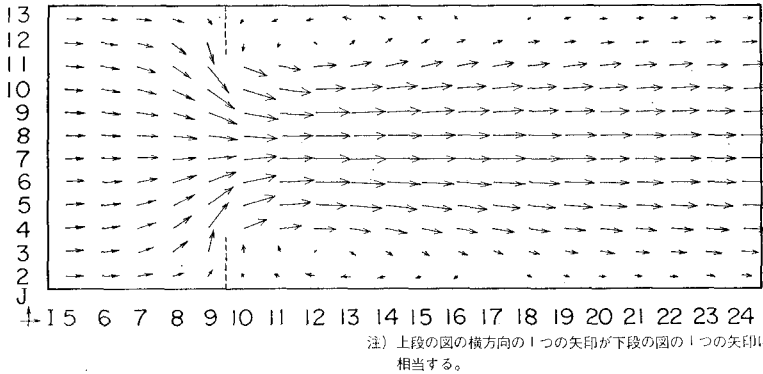
数値計算における拡散式 (4) の差分化には, 前回¹⁾

表-1 流動計算条件

計 算 領 域	1 500 m × 1 000 m × 45 m
格 子 間 隔	$\Delta x = \Delta y = 50$ m $\Delta z = 5$ m
タイムステップ	$\Delta t = 20$ sec
座 標 原 点	$I=11, J=11, K=5$ の格子の中心
初 期 濃 度	$I=11, J=11, K=5$ で 100 ppm, 他は 0
初期拡散時間	1 sec
水平拡散係数	$K_x = K_y = 2 \times 10^5$ cm ² /sec
鉛直拡散係数	$K_z = 5 \times 10^2$ cm ² /sec
平均流速	$U = 20$ cm/sec
流速変化率	$\beta = 0.001$ (cm/sec)/cm $\gamma = 0.005$ (cm/sec)/cm
境界条件 (水平方向)	濃度 0
(鉛直方向)	$\partial^2 c / \partial^2 z = 0$ (最上層および最下層)

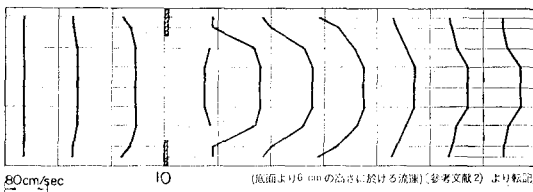


(a) 模型実験

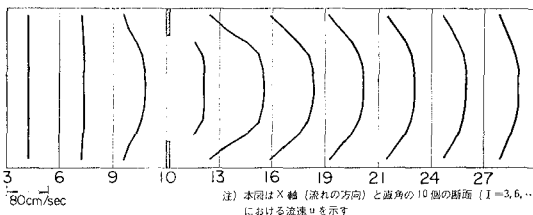


(b) 数値計算

図-2 流向比較図



(a) 実験流速分布



(b) 計算流速分布

図-3 流速(u)比較図

に報告したところでは、 $\partial c/\partial t$, $u(\partial c/\partial x)$, $v(\partial c/\partial y)$, $w(\partial c/\partial z)$ 等が中央差分でなく片側差分となっているため差分誤差に基づく擬似拡散が生ずる。したがってこれを修正するため、次の式(6),(7),(8)で表わされる擬似拡散係数⁴⁾,

$$D_{Nx} = \frac{1}{2}(u\Delta x - u^2\Delta t) \dots\dots\dots (6)$$

$$D_{Ny} = \frac{1}{2}(v\Delta y - v^2\Delta t) \dots\dots\dots (7)$$

$$D_{Nz} = \frac{1}{2}(w\Delta z - w^2\Delta t) \dots\dots\dots (8)$$

を式(4)中の拡散係数 D_x , D_y , D_z より各々差し引いた。

このようにして求めたものを20分後の $J=11$, $I-K$ 断面で比較したものが図-4, また計算値, 解析値の毎分の最大濃度を対比したものが表-2である。これらの結果から拡散時間が進行すれば両者はほとんど一致することがわかる。

4. 不等長格子網による計算時間節約とその適用限界

三次元モデルに現われる諸量は各層位(レベル)の水平流速 u , v , 濃度 c , 鉛直流速 w 等の変数の他, 渦動粘性係数, 拡散係数等の定数を含めると, これに必要な計算機容量ならびに計算機占有時間は他の二次元モデルに比べ莫大となることは容易に推定できる。

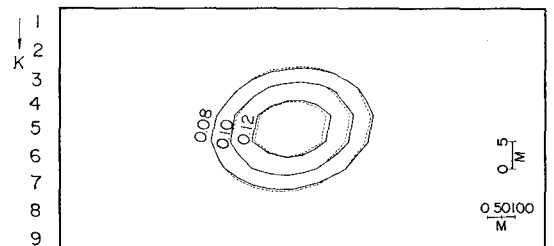
したがって三次元モデルの適用に際しては, 格子間隔をできるだけ

大きくするか, 計算範囲をできるだけ狭める等の配慮が必要となる。このような制約を可能な限り緩和するため, 格子間隔を場所的に変化させた不等長格子網を採用し, 特に計算の対象となる領域, あるいは地形, 構造物などにより水位, 流速などの変化が著しい領域などに対しては細かく, 逆にそれらの領域から遠ざかるに従って粗くする方法を考えた。

差分法で格子間隔を場所的に変化させる一つの方法として, 大きな1格子の辺上に小さな格子を複数個接続する方法があるが, この方法では数値計算の安定性に問題がある。このため, 格子間隔は x 方向または y 方向に

断面 $J=11$

点源投入後20分

— 数値解
----- 解析解

2 4 6 8 10 12 14 16 18 20 22 24 26 28 30
→ I

図-4 濃度分布比較図(数値解と解析解)(単位: ppm)

表-2 最大濃度の対比 (数値解と解析解)

時刻(分)	数値解 (A)		解析解 (B)		A/B *100
	I	(ppm)	I	(ppm)	
1	11	10.621	11	10.047	105.7
2	11	4.490	11	3.924	114.4
3	12	2.722	12	2.333	116.7
4	12	1.795	12	1.569	114.4
5	12	1.268	12	1.132	112.0
6	13	0.946	12	0.857	110.4
7	13	0.754	13	0.690	109.3
8	13	0.614	13	0.570	107.7
9	13	0.508	13	0.478	106.3
10	13	0.427	13	0.405	105.4
11	14	0.371	14	0.352	105.4
12	14	0.324	14	0.310	104.5
13	14	0.285	14	0.274	104.0
14	14	0.252	14	0.244	103.3
15	15	0.227	15	0.219	103.7
16	15	0.205	15	0.199	103.0
17	15	0.186	15	0.181	102.8
18	15	0.169	15	0.165	102.4
19	16	0.155	16	0.151	102.6
20	16	0.143	16	0.140	102.1

表-3 不等長格子網による流動計算条件

計 算 領 域	3 000 m×50 m×20 m
格 子 間 隔	$\Delta x=50$ m, 100 m, 150 m (図-5 参照) $\Delta y=50$ m $\Delta z=4$ m×5 層
拡 散 防 止 膜	$x=1$ 500 m (中央) に $z=-4$ m $\sim$ -20 m を遮蔽
タイムステップ	$\Delta t=600$ sec
コリオリ係数	$f=0$
抵 抗 係 数	$r_b^2=0.0026$ (海底) $r_s^2=0.0001$ (境界面) $r_a^2=0.0$ (海面)
水平渦動粘性係数	$A_x=10^4$ cm ² /sec をベースとし、拡散防止膜の左右 450 m から拡散防止膜に向い、 10^4 から 10^6 まで漸増させる。 $A_y=10^4$ cm ² /sec
境 界 位 置	図-5 の左右波形の位置に流速を与える。
境 界 条 件	左右の断面において断面平均で最大 20 cm/sec になる様な 12 時間周期、正弦波形で与える。深さ方向には対数曲線形流速分布公式により与える。右側境界では 214.3 sec の位相遅れを与える。
解 法	陰 解 法

(表層)のみ開の障壁を設置し、表-3 に示す条件で流動計算を行った。すなわち、計算領域 3 000 m (長さ)×50 m (幅)×20 m (深さ) に対し、 $\Delta y=50$ m (1 格子)、 $\Delta z=5$ m (5 層位) で、 x 方向 3 000 m をケース (a) において全域一律に $\Delta x=50$ m (60 格子)、ケース (b) においては中央の障壁前後各 10 格子

を $\Delta x=50$ m, 他を $\Delta x=100$ m, ケース (c) においては障壁前後各 10 格子を $\Delta x=50$ m, この格子と接する障壁前後の各々 1 格子については $\Delta x=100$ m, 残りを $\Delta x=150$ m, および、ケース (d) においては障壁前後 6 格子を $\Delta x=50$ m, 残りを $\Delta x=100$ m と、計 4 ケースの分割格子について、 x 方向両端から最大流速 20 cm/sec (断面平均で)、12 時間周期の正弦波流速を与え、 $\Delta t=600$ 秒で陰解法により流動計算を行った。抵抗係数や水平渦動粘性係数などに対して前回¹⁾の経験から表-3 に示すようにほぼ同一値を用いた。

このような条件で上記 (a)~(d) の 4 ケースについて計算し、ケース (a) に示す代表点 ①~⑧ の 8 点の 9 時間目 (x 負方向最強流時付近)、12 時間目 (転流時付近) の流速 u について比較したものが表-4 である。表-4 によると、ケース (a) に対するケース (b), (c), (d) の比 (b)/(a), (c)/(a), (d)/(a) は 9 時間目の最強流時付近で

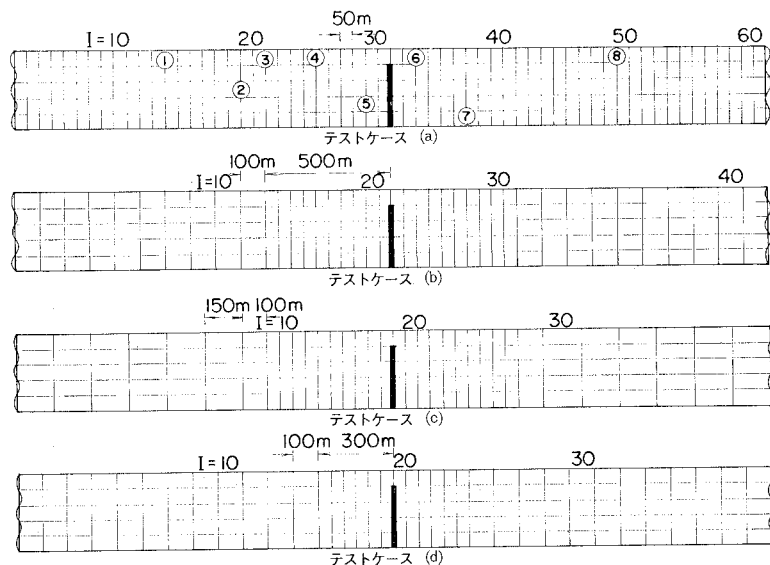


図-5 不等長格子網のテストケース

は変化するが、隣り合うどの格子もその接辺を 1 対 1 で共有するような格子分割を考えた。

このような格子分割による数値計算の時間節約とモデルの適用性を検討するため、図-5 のケース (a)~(d) に示す 4 種の格子分割に対してそのほぼ中央に第 1 層位

表—4 不等長格子網ケース ④～⑧の流速比較

測点	ケース	流速 u (cm/sec)				流速比 (%)		
		④	⑤	⑥	⑧	④/⑤	⑥/⑤	⑧/⑤
①	u_{max}	-20.08	-20.18	-20.16	-30.09	99.5	99.4	99.1
	u_{min}	-0.24	-0.43	-0.44	-1.15	179.2	183.3	479.2
②	u_{max}	-20.64	-20.68	-20.68	-20.56	100.2	100.2	99.6
	u_{min}	0.61	0.54	0.43	1.55	88.5	70.5	254.1
③	u_{max}	-18.91	-19.09	-19.10	-20.37	101.0	101.0	107.7
	u_{min}	-7.54	-6.09	-6.03	-11.51	80.8	80.0	152.7
④	u_{max}	-23.46	-23.47	-23.47	-25.02	100.0	100.0	109.7
	u_{min}	-24.54	-24.52	-24.52	-27.30	99.9	99.9	111.2
⑤	u_{max}	-6.98	-6.98	-6.99	-7.00	100.0	100.1	100.3
	u_{min}	8.66	8.66	8.66	-8.87	100.0	100.0	102.4
⑥	u_{max}	-43.96	-44.04	-44.05	-44.55	100.2	100.2	101.3
	u_{min}	-18.20	-18.24	-18.24	-18.70	100.2	100.2	102.7
⑦	u_{max}	-21.16	-21.03	-21.02	-19.85	99.4	99.3	93.8
	u_{min}	2.08	2.11	2.12	2.16	101.4	101.9	103.8
⑧	u_{max}	-20.36	-20.53	-20.63	-20.26	100.8	101.3	99.5
	u_{min}	-0.83	-0.67	-0.62	-0.67	80.7	74.7	80.7

注) u_{max} : x 負方向最強流時付近の流速 u_{min} : 転流時付近の流速

各測点共ほとんど 100% に近くケース別の差異は (d) がやや劣る程度であるが, 12 時間目の転流時付近になるとケース間および測点間の差異が現われる。すなわち, ケース間の比は, 障壁前後の等格子間隔領域内にある測点 ④, ⑤, ⑥, および ⑦ ではほぼ 100% に近いが, 不等長格子間隔領域にある測点 ①, ②, ③, および ⑧ では 70.5~479.2% と大きくなる。これは, 流速の絶対値が小さくなること, および, ケース間に若干の位相遅れが生ずることによる結果である。このような大きな相対誤差はケース (d) において顕著であり, 計算領域内の総格子数がほぼ等しいケース (c) と大いに異なっている。ケース (d) が不等長格子間隔をとっているケース (b), (c) に比して特に劣るのは, ケース (a) で転流時に障壁付近に発生する渦流(循環流)の発生領域を等格子間隔の格子網が包含していないことに起因しているものと考えられる。これに対しケース (c) は格子総数において他のケースに比し最小で, かつ格子間隔 $\Delta x=150$ m と最大のものを使用しているにもかかわらず, 計算される流れがケース (b) と大差ないのは等格子間隔の格子網が渦流発生領域を覆っているためと考えられる。

以上の結果から, 渦流等の発生領域(これは予備計算または適当な手段により推定する必要がある)に対しては少なくとも最小格子網で覆い, それより外側の領域に対しては段階的に格子間隔を大きくしても転流時付近を除いて等格子間隔による計算とほぼ同一の結果を得ること

とがわかる。また, 別途検討によると, 相隣る格子間の格子間隔は $2/3 \sim 3/2$ 倍の範囲にとった方が適当なようである。

上記ケース (a), (b), (c), および (d) に対し, 総格子数はそれぞれ, 60, 40, 34, 36, 計算時間はケース (a) が 1 に対し, 0.68, 0.58, 0.61 であった。

5. ま と め

本報告で述べた数値モデルの再現性と不等長間隔の格子網による流動計算の適用性についてまとめると以下のとおりである。

- 1) 水理模型実験との比較から, 本流動モデルにより大略の流向流速を再現することができるが, 障壁や閉境界などの近傍極部においては格子を細かくするか, 移流項の差分方式を改良する必要があることがわかる。
- 2) シアー拡散に対する解析解との比較から, 本拡散モデルの移流項の上流差分に基づく擬似拡散を除去する必要があることが明らかになった。
- 3) 障壁などによる前後の渦流発生域を除けば, 不等長格子間隔を用いて流れの再現性を低下することなく計算時間を節約することができる。

以上三次元流動並びに拡散の数値モデルの再現性と計算時間節約に関する検討を述べた。はじめにも述べたとおりこの他数値モデルに必要な水理パラメータに関する検討や, 土砂の沈降拡散に関する海底からの舞い上り, 土砂移動投入, 土砂ふるい分け効果のモデル化を行った。今後はさらに, 土捨て浚渫における初期の拡散機構や躍層に沿って拡がる現象のモデル化等を試みる予定である。

最後に, 本研究を遂行するに当り貴重な助言をいただいた京都大学工学部岩垣雄一教授ならびに東京大学理学部杉ノ原伸夫助手に謝意を表すると共に, 本モデルの計算には日本アイビーエム社の協力を得ていることを付記する。

参 考 文 献

- 1) 堀口孝男・富田 勇・堀江 毅: 三次元モデルによる流れと拡散の数値解法について, 第24回海岸工学講演会論文集, pp. 447-451, 1977.11.
- 2) 浅田忠則・細川 剛: 一樣幅水路に設けた津波防波堤の効果に関する模型実験, 港湾技術研究所報告, Vol. 3, No. 2, pp. 65-79, 昭和39年.
- 3) 寺本俊彦編: 海洋学講座 2, 海洋物理学 II, 東京大学出版会, pp. 56-57, 1976.
- 4) 村上 健: 非定常拡散方程式の数値計算方法, 第19回海岸工学講演会論文集, pp. 265-27, 1972.11.