

密度成層流の内部跳水

中村 充*・乃万俊文**・龍富士夫***

1. はじめに

海底構造物によって生じる内部流の擾乱の様子を調べることは、漁場造成の立場から極めて重要な課題である。

一様密度流下においては、若干の研究があるが、実際の海中においては上下成層流のある場合がほとんどであり、海洋学的立場からの内部波に関する研究はあるが、構造物規模での検討は余りない。

今回は、定常密度流についての内部跳水による混合問題についての報告をする。

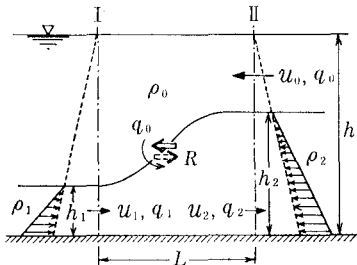
内部跳水によって鉛直混合がどのように生じるか、また、その層厚変化（湧昇高さ）はどの程度かを求め、中底層水塊構成の変化を求め環境（水温、塩分、その他水質、および流れ）を求める。

2. 内部跳水の理論的考察

図一1 に示す内部射流が跳水を起こす場合の現象について考察する。跳水前の水理量として上下密度 ρ_0, ρ_1 、流速 u_1 、流量 q_1 、全水深 h 、下層厚 h_1 は既知であり、これから跳水後の新しい水塊について密度 ρ_2 、層厚 h_2 、流量 q_2 、流速 u_2 、上層流速 u_1 、連行量 q_0 等を求める。これらは結局、連行量 q_0 と底層層厚 h_2 が定まれば容易に求められる。この2つの未知量を求めるための条件式は、運動量則と連行則である。

(1) 運動量則

図一1 の I II 断面間に運動量則を適用する。跳水部で



図一1 内部跳水模式図

は界面の烈しい乱れから上層水の連行が生じる。連行によって生じる運動量の輸送をレイノルズ応力で与える。

I II 断面間の下層および上層について運動量則を適用すれば、

$$\left. \begin{array}{l} \text{下層について} \quad P_1 + M_1 = P_2 + M_2 + R \\ \text{上層について} \quad P_3 + M_3 - R = 0 \\ R = \rho_0 q_0 (u_2 + u_0) + f(\nu) \end{array} \right\} \dots (1)$$

ここに、

$$\left. \begin{array}{l} P_1 = \frac{g h_1^2}{2} (\rho_1 - \rho_0) \\ P_2 = \frac{g h_2^2}{2} (\rho_2 - \rho_0) \\ P_3 = \frac{g}{2} (h_2 - h_1)^2 (\rho_2 - \rho_0) \\ M_1 = \rho_1 q_1 u_1, \quad M_2 = \rho_2 q_2 u_2 \\ M_3 = \rho_0 q_0 u_0 \end{array} \right\} \dots \dots \dots (2)$$

ρ_0, ρ_1, ρ_2 : 密度 (以下添字 0, 1, 2 はそれぞれ上層水, 跳水前下層水, 跳水後下層水の量であることを示す). q_0, q_1, q_2 : 流量 (q_0 は連行流量に等しい), h_1, h_2, h : 水深 (h は全水深), $f(\nu)$: 粘性による剪断力である。式 (1) の第 2 式から

$$R = P_3 + M_3$$

であり、連行量 $q_0 = 0$ のときは、 $M_3 = 0, R = f(\nu)$ であり、 $f(\nu)$ はレイノルズ応力に比し高次の微小量であるから、

$$\left. \begin{array}{l} P_3 = \frac{g}{2} (h_2 - h_1)^2 (\rho_2 - \rho_0) = 0 \\ \therefore h_1 = h_2 \end{array} \right\} \dots \dots \dots (3)$$

であり、 $h_1 = h_2$ で跳水を生じないことが判る。逆に跳水時には必ず上層水の連行を生じる。

式 (1) の第 1 式に第 3 式および式 (2) を代入し、次の置きかえを行えば式 (5) となる。

$$\left. \begin{array}{l} u_1 = \frac{q_1}{h_1}, \quad u_2 = \frac{q_1 + q_0}{h_2}, \quad u_0 = \frac{q_0}{h - h_2} \\ \frac{\rho_2}{\rho_1} \doteq 1, \quad \frac{\rho_0}{\rho_1} \doteq 1, \quad \varepsilon_1 = \frac{\rho_1 - \rho_0}{\rho_1} \\ \varepsilon_2 = \frac{\rho_2 - \rho_0}{\rho_1} \doteq \frac{\rho_2 - \rho_0}{\rho_2} \end{array} \right\} \dots (4)$$

* 正会員 農博 農林水産省農業土木試験場水産土木
** 正会員 農林水産省農業土木試験場水産土木
*** 元東海大学海洋土木学生 (現・東京久栄KK)

$$\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1} h_2^3 - \left\{ h_1^2 + \frac{2q_1^2}{\varepsilon_1 g h_1} - \frac{2q_0^2}{\varepsilon_1 g (h - h_2)} \right\} h_2 + \frac{2}{\varepsilon_1 g} (q_1^2 + 3q_0 q_1 + 2q_0^2) = 0 \quad \dots\dots\dots (5)$$

式(5)でI断面の内部フルード数 F_{r1} を式(6)の第1式で定義し式(5)に代入する。

$$\left. \begin{aligned} F_{r1} &= \frac{u_1}{\sqrt{\varepsilon_1 g h_1}} \\ \frac{h_2}{h_1} &= \xi, \quad \frac{q_0}{q_1} = \eta \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots\dots (6)$$

とて、

$$\xi^3 - \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2} \left(1 + 2F_{r1}^2 - \frac{2F_{r1}^2 \eta^2}{h/h_1 - \xi} \right) \xi + \frac{2\varepsilon_1 F_{r1}^2}{\varepsilon_2} (2\eta + 1)(\eta + 1) = 0 \quad \dots\dots\dots (7)$$

また連続条件から

$$\rho_2 = \frac{\rho_1 q_1 + \rho_0 q_0}{q_1 + q_0} = \frac{\rho_1 + \rho_0 \eta}{1 + \eta}$$

よって、

$$\varepsilon_2 = \frac{\rho_2 - \rho_0}{\rho_1} = \frac{\varepsilon_1}{1 + \eta}, \quad \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2} = 1 + \eta \quad \dots\dots\dots (8)$$

式(8)を式(7)に代入して

$$\xi^3 - (\eta + 1) \left(1 + 2F_{r1}^2 - \frac{2F_{r1}^2 \eta^2}{h/h_1 - \xi} \right) \xi + 2F_{r1}^2 (2\eta + 1)(\eta + 1) = 0 \quad \dots\dots\dots (9)$$

式(9)第2項の第2括弧内第3項は分母に ξ を含むが、この項は式(1)のレイノルズ応力中 u_0 による項で $u_0 \ll u_2$ であるから、この現象では一般に省略できる値であり、式(9')となる。

$$\xi^3 - (\eta + 1)(1 + 2F_{r1}^2) \xi + 2F_{r1}^2 (2\eta + 1)(\eta + 1) = 0 \quad \dots\dots\dots (9')$$

式(9')で解き、式(9)で精度を検討する。

(2) 上層水の連行則

跳水部における上層水の連行には、3つの考え方が存在するであろう。その1は空気界面において知られるように跳水は烈しい乱れや、空気混入などによって大きなエネルギー消費を伴う。内部跳水では空気混入に相当するエネルギーが上層水の連行に用いられるもので、全エネルギー損失に対する上層水の連行エネルギーの割合を連行係数 W として求める。その2は Ellison-Turner にならって連行量が両層の相対速度に比例するとして比例定数 E を検討する方法であり、その3は両層界面における乱れから混入の機構を明らかにする方法である。ここではまず第1、第2の方法で巨視的に扱ひ、連行係数 W 、 E は実験的に検討する。

第1の方法では、

I断面を流入する水のエネルギーが I-II 断面間で失うエネルギーと連行水の得たエネルギーの割合として

$$W = \frac{\left\{ (\rho_2 - \rho_0) g h_2 + \frac{\rho_2 u_2^2}{2} \right\} q_0}{\left[\left\{ (\rho_1 - \rho_0) g h_1 + \frac{\rho_1 u_1^2}{2} \right\} - \left\{ (\rho_2 - \rho_0) g h_2 + \frac{\rho_2 u_2^2}{2} \right\} \right] q_1} \quad \dots\dots\dots (10)$$

式(10)に式(2)、(4)、(6)、(8)の置き換えを行なって整理すれば

$$\frac{2(W + \eta)}{F_{r1}^2 (1 + \eta)} \xi^3 - \left(1 + \frac{2}{F_{r1}^2} \right) W \xi^2 + (W + \eta)(1 + \eta) = 0 \quad \dots\dots\dots (11)$$

式(9')、(11)を連立にといて、 ξ 、 η が求まる。

第2の方法では、

Ellison-Turner による式(12)

$$\frac{dq}{dx} = Eu \quad \dots\dots\dots (12)$$

ここに、 q は I 断面から x だけ流下した所の下層流量、 u は x 点の上下流相対速度。

全跳水区間 L について式(12)を書けば、

$$\left. \begin{aligned} \frac{q_0}{L} &= E \left(\frac{u_1 + u_2}{2} + u_0 \right) \\ L &= K(h_2 - h_1) \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots\dots (13)$$

である。

式(13)に式(2)(4)(6)(8)を用い、 $u_0 \ll u_1$ 、 u_2 を考慮して

$$\eta = \frac{\xi^2 - 1}{\frac{2\xi}{KE} - \xi + 1} \quad \dots\dots\dots (14)$$

式(14)の表現の方が式(11)より簡単である。式(14)で $\xi = 1$ すなわち跳水が起こらない場合には $\eta = 0$ で連行は起こらない (L なる短区間で)。

このことは内部跳水時の連行に比し、跳水のない場合の連行は極めて小さいことを示している。

(3) 内部跳水深と上層水の連行

内部跳水における水深 h_1 、 h_2 および連行量 q_0 は式(9')と式(11)あるいは、式(9')と式(14)を連立にといて $\xi (=h_2/h_1)$ 、 $\eta (=q_0/q_1)$ を求めることができる。しかし両式の解は高次の代数式となるので陽化して記すことは困難であるが、漸近解は容易に求まる。

また、連行量 q_0 が小で式(1)で

$$R \ll M_2$$

の場合には、 $\eta = q_0/q_1 \ll 1$ として式(9')で $\eta = 0$ より

$$\xi^3 - (1 + 2F_{r1}^2) \xi + 2F_{r1}^2 = 0$$

$$\therefore \xi^2 + \xi - 2F_{r1}^2 = 0$$

これから

$$\xi = \frac{1}{2} (-1 + \sqrt{1 + 8F_{r1}^2}) \quad \dots\dots\dots (15)$$

となって、空気界面における跳水式と同型となり、共役水深が存在する。

第1近似として式(15)から ξ が求まれば式(14)また

は式(11) から η が計算できる. これを式(9') に用いて ξ の第2近似を得る. 以下これを繰返せばよい.

連行則として式(11), 式(14) の何れを用いるかは実験的に検討されようが, 実用的には式(14) の方が簡易である.

3. 実験

実験は長さ 14 m, 幅 0.2 m, 深さ 0.6 m の両面ガラス張り水槽のほぼ中央部に, 5 cm×5 cm の模型堰を水槽幅 0.2 m に亘って設置して行なった.

高水槽から計量堰を経て実験水槽上流側に流入した食塩水(予めローダミンで着色)は整流布付き流入口で水槽底に沿って放水される. 実験において, 放出されたブルームはほぼ一定の厚さを保ちながら, 堰まで流下するが堰に至ってその先端が斜め前方へ打上げた後, 堰の下流側に落下する. この時点では堰の下流側にはそれまで存在した淡水が閉じ込められることになるが, これはある時間(10~数十秒)後には流入塩水と置換され, 堰における内部越流が定常状態となる. 堰を越流する内部流は越流後内部射流となり, その後内部跳水を生じる. この状態において染料粒の投入によって上層からの混入状

態を観察すると, 堰から射流域にかけては上層淡水の混入は認められず, 跳水域に混入が認められた.

実験における測定項目は, 塩水流入量 q , 水深 h , 堰上げ高 h_b , 射流水深 h_1 , 跳水後水深 h_2 , 上層流速 u_0 , 跳水後ブルーム中流速 u_2 , 塩水初期比重 ρ_{10} , 上層淡水比重 ρ_0 , 跳水前比重 ρ_1 , 跳水後比重 ρ_2 , などで, q は計量堰で, 水深は目視および写真観測, 流速は染料および水素気泡発生器で流れを可視化して計測し, 比重は比重計および塩分計から換算して測った. 各位置での底層流量は密度から計算し, 流速は流量と水層厚から求めたものを主に, これに直接測定による流速を参考とした. 直接測定による流速は主として, その分布を知るに用いた.

4. 実験結果とその考察

第2章で検討した跳水深および連行係数について検討する.

実験結果を表一に示す.

実験値と計算値の対比を表二に示す.

表二の値を図で示したのが図二である. 表二および図二から $\eta (=q_0/q_1)$ が本実験の範囲では ξ

表一 実験結果

No.	全水深	密度			水深 cm		流量 $\text{cm}^3/\text{s/cm}$		
	h cm	ρ_0	ρ_1	ρ_2	h_1	h_2	q_1	q_2	q_0
1	51.0	0.9973	1.0090	1.0080	1.0	4.9	12.18	13.32	1.14
2	"	0.9980	1.0025	1.0021	1.9	8.5	16.72	17.50	1.63
3	"	0.9982	1.0023	1.0015	2.9	9.5	29.30	36.40	7.10
4	"	0.9982	1.0025	1.0019	2.7	13.2	33.12	38.49	5.37
5	"	0.9975	1.0036	1.0028	3.7	11.5	42.88	49.35	6.47
6	"	0.9973	1.0032	1.0028	0.5	4.0	4.69	5.03	0.34
7	"	0.9973	1.0029	1.0020	2.2	9.6	25.59	30.49	4.90
8	"	0.9973	1.0033	1.0029	3.6	15.6	48.62	52.10	3.47

表二 跳水深 ξ の実験値と計算値の比較

No.	実験値		計算値			
	η	ξ	$\varepsilon_1 \times 10^3$	F_{r1}	ξ 式(9)	ξ 式(15)
1	0.094	4.21	11.61	3.90	5.08	5.04
2	0.097	4.47	4.49	3.13	3.92	3.95
3	0.242	3.27	4.10	2.83	2.95	3.53
4	0.162	4.93	4.29	3.68	4.43	4.73
5	0.151	3.14	6.08	2.52	3.85	3.10
6	0.072	8.24	5.89	5.70	7.72	7.58
7	0.191	4.30	5.58	3.29	4.04	4.18
8	0.071	4.33	5.99	2.94	3.64	3.69

注: 式(9) による ξ の計算値は式中に η を含むので η は実験値を用いた.

($=h_2/h_1$) の値は式(9'), 式(15) でほとんど同じ値をとり, また実験値とよく一致している.

次に連行係数について検討する. W については式(11) を KE については式(14) を用いて計算する. 計算結果を表三に示す.

リチャードソン数 R_i は内部フルード数を用いて次のように求めた.

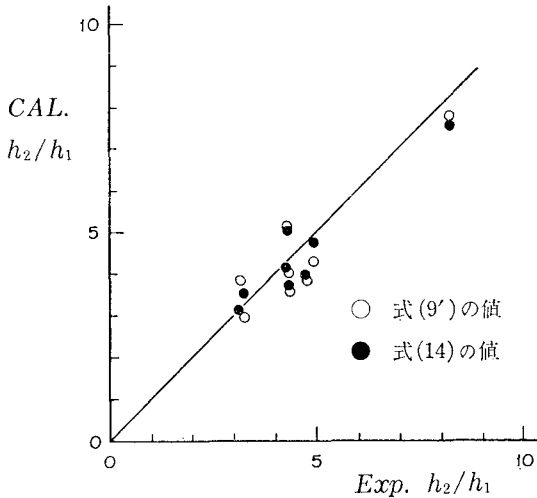
$$R_i = 1/F_{r1}^2$$

また K の値は実験写真から3として E を求めた.

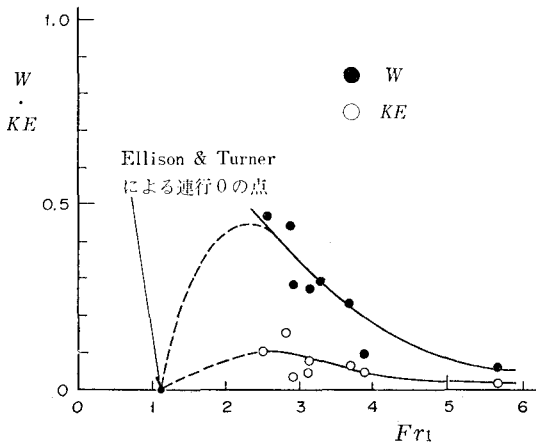
表三を図示したのが図三~図四である. 測点に相当のバラツキがあるが, 跳水前の内部流のフルード数 F_{r1} が大きくなるにつれて連行係数 W , KE とも減少している. このことは F_{r1} が大となれば内部流のもつ

表—3 連行係数 W , E の値

No.	F_{r1}	R_i	W	KE	E
1	3.90	0.066	0.096	0.049	0.015
2	3.13	0.102	0.278	0.045	0.015
3	2.83	0.125	0.434	0.153	0.051
4	3.68	0.074	0.237	0.066	0.022
5	2.52	0.151	0.468	0.102	0.034
6	5.70	0.031	0.062	0.018	0.006
7	3.29	0.092	0.289	0.078	0.026
8	2.94	0.116	0.284	0.034	0.011

注: E は $K=3$ として計算.

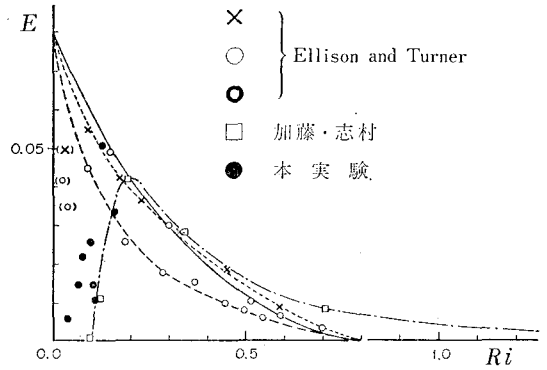
図—2 跳水深の測定値と計算値の比較



図—3 連行係数と内部フルード数

エネルギーの消耗の割合が連行に用いられるエネルギーに比し相対的に大きくなるためと考えられる。

図—4 は Ellison & Turner の連行係数 E と比較して見たものである。跳水すなわち内部流のもつエネルギー



図—4 エリソン & ターナーの連行係数の比較

ーの大きな流れでの E の値は Ellison & Turner が示したように増大することなく、ある値よりリチャードソン数 R_i が小なる領域では E は R_i の増加関数となり、極大値をへて減少関数となることが期待される。 E が R_i の増加関数領域をもつことは表層淡水流についての加藤・志村¹⁾らの実験を支持する。

5. 結 言

海底構築物に密度底層流が当たった場合の混合問題を扱う。手始めに2次元の海底堰による内部越流後の跳水問題を検討した。結果を要約すると、

- ① 跳水後の水深を連行運動量（跳水面のレイノルズ応力）を考慮して式(9')を求めた。連行量の少ない場合は式(9')は式(14)となり、従来の式²⁾と一致する。連行量の少ない領域では式(14)はよく成立する。連行量の大きな場合は式(9')による。
 - ② 連行量 q_0 は内部跳水によって失うエネルギーの一部が連行に用いられるとする連行係数 W を定義しこれと内部フルード数 F_{r1} との関係求めた。
 - ③ 連行量が密度界面の相対速度差によるとする Ellison-Turner の連行係数 E を実験で求め、リチャードソン数 R_i の小さい領域で E が増加関数となることが判明した。
 - ④ 以上から内部跳水前の水理量から、跳水後の水層厚さ、水質を求めることができる。
- などであるが、今後連行係数, W , KE についてより精度高い解析が必要である。

参 考 文 献

- 1) 加藤和憲・志村博康：浮流体の跳水と混入について——河口周辺での混合拡散に関する研究——，浅海域における増養殖漁場の開発に関する研究報告書(47年度)，農土試，1973。
- 2) Turner, J. S.: Buoyancy Effects in Fluids, p. 67, Cambridge Univ. Press, 1973, など。