

離 岸 流 に 関 す る 研 究

——砕波帯外における底面摩擦の効果——

佐々木幹夫*・尾崎晃**

1. 緒 言

Harris (1967)¹⁾ が観測により明らかにした対称セル循環は波が海岸に直角に入射するときに発達する海水の循環である。この循環は離岸流の発生とともに発達するものである。離岸流はこの海水の循環において心臓部としての役割を果たしており、離岸流が消滅すればこの循環も消失してしまう。離岸流には純循環流型と自由噴流型の二つがある。向岸流と離岸流の対称性が維持されていれば、前者それらの非対称性が著しければ、後者の離岸流である²⁾ (図—1)。Shepard・Inman (1950, 1951)³⁾ が California 研究所海岸で観測した例の中にはどちらの型の離岸流も含まれているようである。Sonu (1972)⁴⁾ が Florida, Seagrove 海岸で観測した離岸流は純循環流型離岸流である (図—1)。

き、離岸流軸と重なるように x 軸をとり、流速の x, y 成分を u, v とする。流れを支配する連続および運動の方程式は次のように書ける。

$$\frac{\partial}{\partial x}(du) + \frac{\partial}{\partial y}(dv) = 0 \quad d = h + \bar{\zeta}_0 \quad \dots\dots\dots (1)$$

$$-g \frac{\partial \bar{\zeta}}{\partial x} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{\tau}_{xx}}{\partial x} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{\tau}_{yx}}{\partial y} - \frac{\bar{C}u}{d} = 0 \quad \dots\dots\dots (2)$$

$$-g \frac{\partial \bar{\zeta}}{\partial y} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{\tau}_{yy}}{\partial y} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{\tau}_{xy}}{\partial x} - \frac{\bar{C}v}{d} = 0 \quad \dots\dots\dots (3)$$

ここに、 ρ は流体の密度、 g は重力加速度、 h は静水深、 $\bar{\zeta}_0$ は流れのないときの平均水位の変化、 $\bar{\zeta}$ は流れの発生に伴って生じた平均水位、 $\bar{C}$ は次元をもつ底面摩擦係数、 $\bar{\tau}_{xx}, \bar{\tau}_{yy}, \bar{\tau}_{yx} = \bar{\tau}_{xy}$ は水柱要素に働く normal stress と shear stress である。砕波帯外であれば $\bar{\tau}_{ij}, \bar{C}$ は次式で与えられる。

$$\bar{\tau}_{ij} = -\bar{P}_t \delta_{ij} + \rho \epsilon \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \quad \dots\dots\dots (4)$$

$$\epsilon = C_2 \frac{H_B^2}{8\pi^2} \frac{gT}{d_B} \quad (x \geq x_B) \quad \dots\dots\dots (5)$$

$$\bar{C} = C_4 \frac{C_f}{2\pi} \frac{gH_B}{\sqrt{gd_B}} \quad (x \geq x_B) \quad \dots\dots\dots (6)$$

ここに、 $\bar{P}_t$ は平均乱れ圧力 (average turbulence pressure)⁵⁾、 ϵ は渦動粘性係数、 C_f は底面摩擦係数、 C_2, C_4 は補正係数、 H_B, d_B は砕波点での波高 H と d 、 T は波の周期である。

次のような無次元量

$$\xi = d/d_B, \quad \eta = y/y_r, \quad y_r = Y_r/2 \quad \dots\dots\dots (7)$$

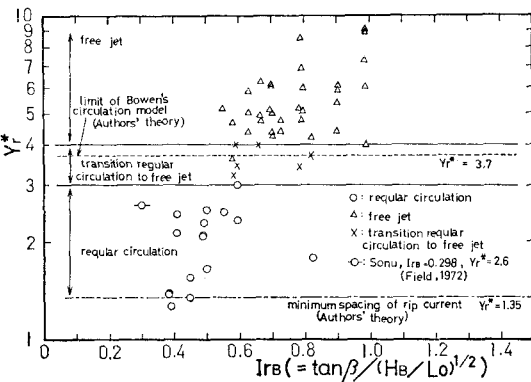
$$u^* = u/\sqrt{gd_B}, \quad v^* = v/\sqrt{gd_B} \quad \dots\dots\dots (8)$$

を導入すると、式 (2), (3) より、 $\bar{\zeta}, \bar{P}_t$ を消去し、整理すると次のような u^*, v^* に関する方程式を得る。

$$\begin{aligned} & 2\lambda' \frac{\partial^2}{\partial \eta \partial \xi} \left(\lambda' \frac{\partial v^*}{\partial \eta} - \frac{\partial u^*}{\partial \xi} \right) \\ & + \left\{ \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} - \lambda'^2 \frac{\partial^2}{\partial \eta^2} \right\} \left\{ \frac{\partial v^*}{\partial \xi} + \lambda' \frac{\partial u^*}{\partial \eta} \right\} \\ & - \mu_0 \left\{ \frac{\partial}{\partial \xi} \left(\frac{v^*}{\xi} \right) - \lambda' \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\frac{u^*}{\xi} \right) \right\} = 0 \quad \dots\dots\dots (9) \end{aligned}$$

ここに

$$\lambda' = \lambda m/i_0, \quad \lambda = X_B/y_r, \quad X_B = x_B + x_S \quad \dots\dots\dots (10)$$



図—1 離岸流のタイプ (実験値は著者ら)

純循環流型の場合、沿岸方向に単純な周期性を仮定できる。本論文において、解析を進める際には一般的な流況 ($n=1, \infty$) を考えて式を展開している。しかし、求まった解を考察する際には純循環流型離岸流として $n=1$ としている。

2. 基礎方程式と重みつき残差法による解

静止時の汀線に重なるように y 軸、これと直角冲向

* 正会員 工博 八戸工業大学助教授 工学部土木工学科

** 正会員 工博 北海道大学教授 工学部土木工学科

$$\left. \begin{aligned} \partial d / \partial x &= m & (x \leq x_B) \\ &= i_0 & (x \geq x_B) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (11)$$

$$\mu_0 = \left[\frac{C_4 C_f}{i_0} \right] / \left[\frac{C_2 \gamma i_0 P}{4\pi} \right], \quad \gamma = H_B / d_B \dots\dots\dots (12)$$

$$P = T \sqrt{g / d_B} \dots\dots\dots (13)$$

x_S は平均汀線の後退距離, P は波の周期を無次元化した定数, μ_0 は砕波帯外における底面摩擦の程度を示す無次元定数である (添字 0 は砕波帯外). μ_0 は砕波帯内での $\mu^{(2)}$ で

$$\mu_0 = \mu \left(\frac{m}{i_0} \right)^2 \frac{C_4 C_1}{C_2}, \quad \mu = \frac{C_f}{m} \frac{4\pi}{C_1 m \gamma P} \dots\dots\dots (14)$$

と表わされる. C_1 は砕波帯内の ε を見積る際に導入した補正係数である²⁾. μ の値は 1 程度の大きさであり^{2), 6)}, 式 (14) より, 底勾配が砕波帯内と砕波帯外とで違った海浜地形であれば μ_0 も違った値になることが予想される.

式 (9) を解くにあたって, 輸送流れ関数よりは u^* , v^* で解析を進めた方が, 課せられている境界条件の性格設定した試行関数の特徴, 重みつき残差法による解の示す特性がわかりやすい.

u^* , v^* は次のように表わせる.

$$\left. \begin{aligned} u^* &= \sum_{n=1}^{\infty} A_{jn} \varphi_{jnu}(\xi) \cos n\pi\gamma \\ v^* &= \sum_{n=1}^{\infty} A'_{jn} \varphi_{jnv}(\xi) \sin n\pi\gamma \end{aligned} \right\} j=1, 2 \dots\dots (15)$$

添字 $j=(1, 2)$ は (砕波帯内, 砕波帯外) を意味する. 砕波帯内はすでに文献 2) で求められているので φ_{1nu} , φ_{1nv} A'_{1n} は次式で与えられる.

$$\left. \begin{aligned} \varphi_{1nu} &= -\frac{X_{1n}(\xi)}{\xi} \\ \varphi_{1nv} &= \frac{1}{\xi} \frac{dX_{1n}(\xi)}{d\xi} \\ A'_{1n} &= A_{1n} / k_n \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (16)$$

ここに

$$k_n = n\pi\lambda = n \cdot (2\pi / Y_T^*) \dots\dots\dots (17)$$

X_{1n} は文献 2) における式 (26) で与えればよい. Y_T^* は無次元離岸流間隔 ($= Y_T / X_B$) である. 砕波帯外では連続の式 (1) より, A_{2n} , A'_{2n} , φ_{2nv} は

$$\left. \begin{aligned} A_{2n} &= A_{1n} \\ A'_{2n} &= A_{2n} / k'_n, \quad k'_n = k_n m / i_0 \\ \varphi_{2nv} &= -\frac{1}{\xi} \frac{d}{d\xi} (\xi \varphi_{2nu}) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (18)$$

と表わせる. したがって, 問題は φ_{2nu} を求めることに帰着する. 式 (15) を式 (9) に代入すると, 式 (18) より φ_{2nu} に関する 4 階の常微分方程式を得る. この方程式は $\xi=0$ を確定特異点にもち, 解はフロベニウスの方法で与えられる. しかし, この級数解は砕波帯外のように ξ の大きな値まで計算する必要があるので, 実際計算には不便な解析解である. 著者らはこの級数解の値を実

際計算で求めることができなかった. 底面摩擦項を省略した解²⁾ より類推すると, 砕波帯外の流速分布は $\xi=6$ 程度の沖までわかればよいことになる. したがって, この範囲で取り扱いやすい式 (9) の級数解は

$$\log \xi = t \dots\dots\dots (19)$$

と変数変換すると得ることができる. 式 (9), (15), (18), (19) より, 次式を得ることができる.

$$\left\{ \begin{aligned} P'_{n4} \frac{d^4}{dt^4} + P'_{n3} \frac{d^3}{dt^3} + P'_{n2} \frac{d^2}{dt^2} \\ + P'_{n1} \frac{d}{dt} + P'_{n0} \end{aligned} \right\} \varphi_{2nu} = 0 \dots\dots\dots (20)$$

ここに

$$\left. \begin{aligned} P'_{n4} &= e^t P_{n4} \\ P'_{n3} &= e^t (4P_{n4} + P_{n3}) \\ P'_{n2} &= e^t (6P_{n4} + 3P_{n3} + P_{n2}) \\ P'_{n1} &= e^t (4P_{n4} + 3P_{n3} + 2P_{n2} + P_{n1}) \\ P'_{n0} &= e^t (P_{n4} + P_{n3} + P_{n2} + P_{n1} + P_{n0}) \\ P_{n4} &= e^{-5t} \\ P_{n3} &= -9e^{-5t} \\ P_{n2} &= 26e^{-5t} - \mu_0 e^{-4t} - 2k'_n e^{-3t} \\ P_{n1} &= -24e^{-5t} + 3\mu_0 e^{-4t} + 5k'_n e^{-3t} \\ P_{n0} &= -2k'_n e^{-3t} + \mu_0 k'_n e^{-2t} + k'_n e^{-t} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (21)$$

式 (21), (22) より, 式 (20) の各階の微係数 $P'_{n0} \sim P'_{n4}$ は $t=0$ で解析的であるから, 式 (20) の解は

$$\varphi_{2nu} = \sum_{m=0}^{\infty} \alpha_{nm} t^m \dots\dots\dots (23)$$

の形となる.

φ_{2nu} の境界条件は次式となる.

(i) 砕波点 すなわち, $t=0$ にて

$$\left. \begin{aligned} u^* \text{ の連続より } \varphi_{1nu}(\xi=1) &= \varphi_{2nu}(t=0) \\ v^* \text{ の連続より } \varphi_{1nv}(\xi=1) &= \frac{i_0}{m} \varphi_{2nv}(t=0) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (24)$$

(ii) 沖 すなわち, $t \rightarrow \infty$ にて

$$\left. \begin{aligned} u^* &= 0 \text{ より } \varphi_{2nu}(t) \rightarrow 0 \\ v^* &= 0 \text{ より } \varphi_{2nv}(t) \rightarrow 0 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (25)$$

φ_{2nu} を次式のように

$$\varphi_{2nu}(t) = a_{n1} e^{-t} + a_{n2} t e^{-t} + \sum_{m=3}^M a_{nm} t^{m-1} e^{-t} \dots\dots\dots (26)$$

とすると有限項 M まで展開するのであるから, 沖における境界条件式 (25) は満足していることになる. さらに $\varphi_{2nu}(t)$ が砕波点での境界条件式 (24) を満足するようにすると, 式 (24), (26) より

$$\left. \begin{aligned} a_{n1} &= \varphi_{1nu}(\xi=1) \\ a_{n2} &= -\frac{m}{i_0} \varphi_{1nv}(\xi=1) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (27)$$

となる. したがって, 式 (26) で与える φ_{2nu} は 2 点 $t=0, \infty$ において完全な正確さをもつことになる. ゆえ

に, $a_{nm}(m \geq 3)$ を $0 < t < \infty$ において式 (20) が満足されるように決めれば解は得られたことになる. 有限項 M まで展開するのであるから, 式 (26) を式 (20) に代入すると残差 R が残る.

$$R = L_{2nu} \left\{ \sum_{m=1}^M a_{nm} t^{m-1} e^{-t} \right\} \quad \dots\dots\dots (28)$$

ここに

$$\begin{aligned} L_{2nu} = & P'_{n4} \frac{d^4}{dt^4} + P'_{n3} \frac{d^3}{dt^3} + P'_{n2} \frac{d^2}{dt^2} \\ & + P'_{n1} \frac{d}{dt} + P'_{n0} \quad \dots\dots\dots (29) \end{aligned}$$

よって, 重みつき残差を作ると

$$\int_0^\infty w_j(t) R(a_{nm}, t) dt = 0 \quad \dots\dots\dots (30)$$

となる. $w_j(t)$ は重み関数で次式のように

$$w_j(t) = \delta(t - t_j) \quad \dots\dots\dots (31)$$

Dirac のデルタ関数を探ると, 式 (30) の左辺の積分は

$$\int_0^\infty w_j R dt = R|_{t=t_j} \quad \dots\dots\dots (32)$$

となる. したがって残差 R は N 個の指定された選点で零となる. また, 残差 R は式 (21), (22), (28), (29) より, 沖において, すなわち,

$$t_{N+1} \rightarrow \infty \text{ にて } R \rightarrow 0 \quad \dots\dots\dots (33)$$

となることがわかる.

式 (21), (22), (28), (29), (30), (32) より, 次式を得る.

$$[B_{njm}][a_{nm}] = [d_{nj}] \quad \dots\dots\dots (34)$$

ここに

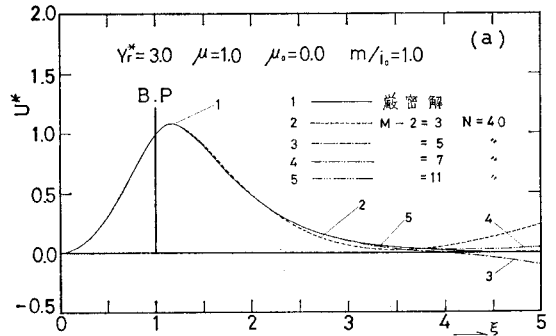
$$\begin{aligned} B_{njm} = & [P_{n4} m'(m'-1)(m'-2)(m'-3) t^{m'-4} \\ & + P_{n3} m'(m'-1)(m'-2) t^{m'-3} \\ & + P_{n2} m'(m'-1) t^{m'-2} \\ & + P_{n1} m' t^{m'-1} \\ & + P_{n0} t^{m'}]_{t=t_j} \quad \text{ここに } m' = m-1 \end{aligned} \quad \dots\dots\dots (35)$$

$$d_{nj} = [-\{(P_{n1} + P_{n0} t) a_{n2} + P_{n0} a_{n1}\}]_{t=t_j} \quad \dots\dots\dots (36)$$

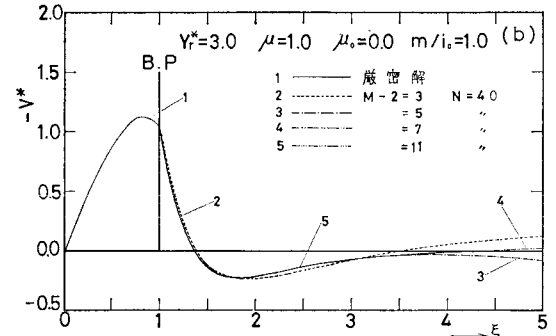
$[B_{njm}]$, $[a_{nm}]$, $[d_{nj}]$ はそれぞれ $(N, M-2)$, $(M-2, 1)$, $(N, 1)$ 型のマトリックスである. ここに $M-2$ は a_{n1} および a_{n2} の二つを除いた未定係数 $a_{nm}(m \geq 3)$ の数である. 未知定数の数より選点の数を多くとり, 最小自乗法で式 (34) を計算した方が収束は早い.

3. 結果と考察

図—2 (a)(b) は選点 t_j の数を $N=40$ ($\xi_1=1.1 \sim \xi_{40}=5.0$) として, 項数を $M-2=3, 5, 7, 11$ としたときに求まった近似解 ($Y_r^*=3.0, m/i_0=1.0, \mu_0=0.0$ とした場合の最小自乗選点法による解) を画いたものである. $\mu_0=0.0$ の場合, 厳密解が与えられているので²⁾ 収束すべき値はわかっていることになる(図の実線), 図より, 項数を次第に多くしていくにつれ, ξ の大きいところでも, 徐々に厳密解に近づき, 第 11 項までとったときには,



(a)



(b)

図—2 厳密解との比較

厳密解に重なっていることがわかる.

表—1 (a)(b) は選点の数 N を多くした場合の解の精度を比較したものである. すなわち, 表—1 (a) は $N=40$, $\xi_1=1.1 \sim \xi_{40}=50$ (0.1 間隔に選点をとる) 項数 $M-2=11$ の場合に求まった MWR による解と厳密解とを比較したもので, $\xi=4.0$ 以降の相対残差 $|R^*| = |(近似解 - 厳密解)/厳密解|$ が大きくなっていることがわかる.

表—1 (b) は $N=50$, $\xi_1=1.1 \sim \xi_{50}=6.0$, $M-2=10$ の場合に求まった解を記したもので, $\xi \geq 4.0$ での $|R^*|$ は改善されていることがわかる.

以上, 最小自乗選点法による近似解の特性について述べたが, 本論文で考察の対象となっている流れの場では選点数 $N=40 \sim 50$ ($\xi_1=1.1$ より 0.1 きざみにとる) 項数 $M-2=10 \sim 11$ で十分な精度の解が得られることがわかる.

Y_r^* が小さいと流れの場の流体輸送は純循環流型²⁾ の輸送パターンとなっているので式 (15) において $n=1$ とおけば, この場合の u^*, v^* は求まったことになる. いま砕波点における u^* ($\xi=1, \eta=0$) を基準にして, 新たに U^*, V^* を次式のように

$$\begin{aligned} U^* = & u^*/u^*(\xi=1, \eta=0), \quad V^* = v^*/u^*(\xi=1, \eta=0) \\ & \dots\dots\dots (37) \end{aligned}$$

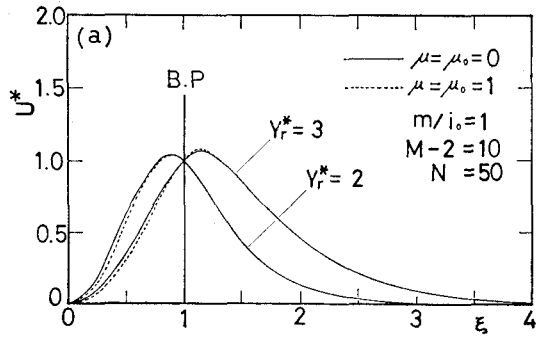
表-1 選点数と精度

(a) $Y_r^*=3.0$, $\mu=1.0$, $\mu_0=0.0$, $N=40$, $M-2=10$

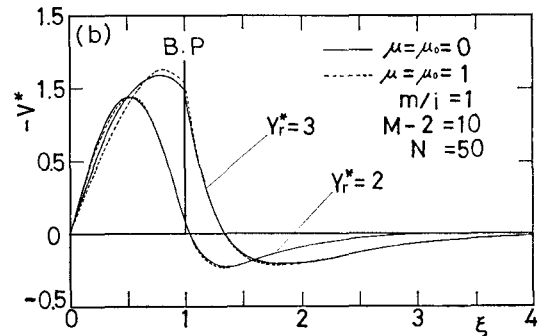
d/d_B	離岸流		沿岸流	
	MWR 解	厳密解	MWR 解	厳密解
1.00	1.000	1.000	1.045	1.045
2.00	0.478	0.478	-0.207	-0.207
3.00	0.098	0.098	-0.064	-0.064
4.00	0.017	0.017	-0.012	-0.013
4.20	0.013	0.012	-0.008	-0.009
4.40	0.009	0.008	-0.005	-0.006
4.60	0.008 (.0075)	0.006 (.0056)	-0.003 (.0026)	-0.004 (.0044)
4.80	0.007 (.0066)	0.004 (.0038)	-0.001 (.0006)	-0.003 (.0030)
5.00	0.006 (.0064)	0.003 (.0026)	0.001 (.0013)	-0.002 (.0021)

(b) $Y_r^*=3.0$, $\mu=1.0$, $\mu_0=0.0$, $N=50$, $M-2=10$

d/d_B	離岸流		沿岸流	
	MWR 解	厳密解	MWR 解	厳密解
1.00	1.000	1.000	1.045	1.045
2.00	0.478	0.478	-0.207	-0.207
3.00	0.098	0.098	-0.064	-0.064
4.00	0.017	0.017	-0.013	-0.013
4.20	0.012	0.012	-0.009	-0.009
4.40	0.008	0.008	-0.006	-0.006
4.60	0.005 (.0053)	0.006 (.0056)	-0.005 (.0046)	-0.004 (.0044)
4.80	0.004 (.0035)	0.004 (.0038)	-0.003 (.0033)	-0.003 (.0030)
5.00	0.002 (.0023)	0.003 (.0026)	-0.002 (.0025)	-0.002 (.0021)



(a)



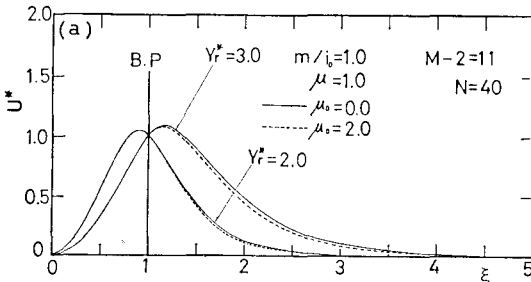
(b)

図-4 底面摩擦を省略した場合と考慮した場合の流速分布形

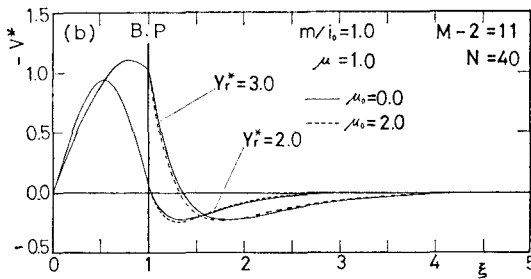
と定めると、流速分布形がわかる。

図-3 (a)(b) は $Y_r^*=2$ および 3 の場合 ($\mu=1.0$, $m/i_0=1.0$) の U^* , V^* を示したものである。図において、底面摩擦を考慮した場合が点線で ($\mu_0=2.0$) それを省略した場合が実線で描かれている。図-3 (a) より U^* は $\mu_0=2.0$ になると $\mu_0=0.0$ よりも小さな値になっていることがわかる。これは、離岸流の流速が底面摩擦の影響を受けて早く減速するものと解釈される。図-3 (b) より、沿岸方向の流速も底面摩擦の影響を受けて減速の傾向にあるが、砕波点をわずかに過ぎた付近では離岸流部から向岸流部に向かう沿岸流速 (V^* の値が正になる部分) は逆に大きくなっていることがわかる。これは、底面摩擦の影響を受けている場合には、離岸流によって砕波帯内から流出してきた流体が遠く沖合いまで運ばれる前に、早い地点で向岸流部に向かって輸送される現象を指しているものと解釈される。したがって、底面摩擦は循環流の沖方向の規模を小さくさせるように働いているといえる。

図-4 (a)(b) は $Y_r^*=2$ および 3 の場合の流速分布形を示したもので、図の実線が底面摩擦を省略した場合で、点線が底面摩擦を考慮した場合である。点線と実線の比較より、砕波帯内の方が底面摩擦の影響を受けやす



(a)



(b)

図-3 砕波帯外における底面摩擦の影響

いことがわかる。しかし、底面摩擦による流速分布形の変化はわずかであり、分布のパターンが大幅に変わるわけでもないことも図からわかる。したがって、基本的には底面摩擦を省略しても循環セル内の流体輸送は説明できることになる。

4. 結 言

平均流のエネルギー逸散は渦動粘性と底面摩擦の両者によるとの考えに立って流れの場の考察を進めてみた。底面摩擦の程度を示す無次元定数 μ_0 は、 $C_4C_1/C_2 \approx 1.0$ とすると、 $\mu_0 \equiv \mu(m/i_0)^2$ となる。理論流速分布形が実測値と良く合うときの μ の値は 1 のまわりにある^{2), 6)}。したがって、 μ_0 は砕波帯内と砕波帯外との底勾配の比 m/i_0 によっても変わることになる。本論文では、砕波点を境にして極端な地形の変化がないものとして μ_0 の値をとってみた。結果は底面摩擦により、循環セルの沖方向の規模が小さくなることが明らかになった。渦動粘性に加えて、底面摩擦による流れのエネルギー逸散もあるという現象に対応しているが、流速分布形は底面摩擦を考慮しても、わずかに変わるだけで、基本的には底面摩

擦を省略しても現象の説明は可能といえる。

参 考 文 献

- 1) Harris, T. F. W.: Field and model studies of the nearshore circulation, Ph. D. thesis, Univ. of Natal, Durhan. South Africa, 1967.
- 2) 佐々木幹夫・尾崎 晃: 離岸流に関する研究—流速分布の固有性と最小離岸流間隔—, 第 24 回海講, pp. 600~604, 1977.
- 3) Shepard, F. P. and D. L. Inman: Nearshore circulation, related to bottom topography and wave refraction, Trans. A. G. U., Vol. 31, No. 4, pp. 196~212, 1950.
: Nearshore circulation, Proc. 1st. Conf. on Coastal Eng., pp. 50~59, 1951.
- 4) Sonu, C. J.: Field observation of nearshore circulation and meandering currents, J. G. R., Vol. 77, No. 18, pp. 3232~3249, 1972.
- 5) Hinze, J. O.: Turbulence, McGraw-Hill, pp. 24, 1975.
- 6) 堀川清司・佐々木民雄・堀田新太郎・桜本 弘: 海浜流に関する研究(第 2 報)—海浜流の現地観測, 第 21 回海講, pp. 347~354, 1974.