

有限要素法による潮流解析の一解法について

横 田 基 紀*・滑 川 伸 孝**

1. ま え が き

埋立地造成や防波堤建設などに伴って、付近の海域の流況がどのように変化するかを予測することは、海洋汚染の環境問題ともかわかり、工学的にも重要なことである。行政的にも、沿岸環境に変化をもたらす工事については流況予測の調査が義務づけられ、大型電子計算機による潮流の数値計算が数多く実施されてきた。これらの流況予測の調査のなかには、細部の微妙な流況変化を把握しなければならないケースも数多いがその解析には長時間の計算時間を要する問題があった。筆者等は、細部の微妙な流況を再現し、計算時間の短い解法の開発を試みた。細部の微妙な流況を再現するためには、現地の地形を正確に表現することが望ましい。このために、空間方向には、境界形状を任意にとれる有限要素法で離散化をおこなった。また細部の検討の場合、要素長が短くなり、explicit 法では時間増分を小さくとらなければならず、計算時間を多く必要とするので、時間方向には implicit 法を用いて離散化をおこなうことにした。当初運動方程式と連続方程式を用い、流速と水位を同時に連立させて解く方法を試みてみた。しかし、この段階では発散が生じることや、計算時間の問題が残されていた。さて堀口等は、連続方程式を運動方程式に代入し、運動方程式のみで流量を求め、得られた流量を用いて、連続方程式より水位を求める方法を考え、差分法により良い計算結果を得られたことを報告している¹⁾。そこで筆者等は、基礎方程式、ならびに時間方向の離散化をこの方法と同様にとり、空間方向には有限要素法で離散化する方法を試みてみた。

2. 基礎方程式

運動方程式ならびに連続方程式を水深方向に積分して、テンソル表示すれば次式のようになる。

$$\begin{aligned} \frac{\partial M_i}{\partial t} = & -g(h+\zeta)\zeta_{,i} + \varepsilon_{ij}f(h+\zeta)u_j \\ & -(h+\zeta)(u_i u_j)_{,j} - \frac{\tau_{bi}}{\rho_w} \dots\dots\dots (2.1) \end{aligned}$$

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} = -M_{i,i} \dots\dots\dots (2.2)$$

ここに t ; 時間, h ; 水深, ζ ; 潮位, u_i ; 平均流速, M_i ; 線流量, τ_{bi} ; 海底摩擦応力 $= \rho_w \gamma^2 |u| u_i$, g ; 重力加速度, ρ_w ; 海水の密度, f ; コリオリ係数, ε_{ij} ; $\varepsilon_{11} = \varepsilon_{22} = 0$, $\varepsilon_{12} = 1$, $\varepsilon_{21} = -1$.

添字 (i, j) はそれが 1 のとき x 方向, 2 のとき y 方向の成分を示す。 $(\)_{,j}$ は $\partial(\)/\partial x_j$ を表すものとし、同一項に同じ添字が 2 つ以上あらわれたときには、その添字についての総和をとるものとする。

式 (2.2) より新しいタイムレベル $(n+1)$ の潮位は時間差分を Δt とおけば次式で示される。

$$\zeta^{(n+1)} = \zeta^{(n)} - \Delta t M_{i,i}^{(n+1)} \dots\dots\dots (2.3)$$

式 (2.3) を式 (2.1) の右辺第 1 項に代入して整理すれば線流量のみを未知数とした Implicit な運動方程式を得ることができる。

$$\begin{aligned} \frac{\partial M_i^{(n+1)}}{\partial t} - g \Delta t (h + \zeta^{(n)}) M_{j,j,i}^{(n+1)} \\ = -g(h + \zeta^{(n)}) \zeta_{,i}^{(n)} + \varepsilon_{ij} f(h + \zeta^{(n)}) u_j^{(n)} \\ - (h + \zeta^{(n)}) (u_i u_j)_{,j}^{(n)} - \frac{\tau_{bi}^{(n)}}{\rho_w} \dots\dots\dots (2.4) \end{aligned}$$

境界条件としては流量 (流速) が与えられるものとする。沿岸および防波堤においてはそれらの境界の法線方向の流速を零とする。ただし隅角部においては、流速 u, v ともに零とした。

3. 有限要素法による定式化

式 (2.2) と式 (2.4) を Galerkin 法により定式化する。しかし、式 (2.4) は二階の微係数を含んでいるため、このままでは形状関数を二次にしなければ表現できない。形状関数を二次にした場合、計算時間が増大することが懸念されるので、微係数の階数を一次に下げないように式を変形する。

式 (2.4) に任意の変分 M_i^* をかけて領域 A で積分する。

$$\begin{aligned} \int_A \frac{\partial M_i}{\partial t} M_i^* dA - g \Delta t \int_A (h + \zeta) M_{j,j,i} M_i^* dA \\ = -g \int_A (h + \zeta) \zeta_{,i} M_i^* dA \end{aligned}$$

* (株)日本港湾コンサルタント システム開発室次長
** 正会員 工修 (株)日本港湾コンサルタント システム開発室

$$\begin{aligned}
& +\varepsilon_{ijf}\int_A(h+\zeta)u_jM_i^*dA \\
& -\int_A(h+\zeta)(u_iu_j)_{,j}M_i^*dA-\int_A\frac{\tau_{bi}}{\rho_w}M_i^*dA \\
& \dots\dots\dots(3.1)
\end{aligned}$$

式(3.1)の左辺第2項は部分積分により次のようになる。

$$\begin{aligned}
& g\Delta t\int_A(h+\zeta)M_{j,i}M_i^*dA \\
& =g\Delta t\int_A[(h+\zeta)M_i^*M_{j,i}]_{,j}dA \\
& -g\Delta t\int_A(h+\zeta)M_i^*_{,j}M_{j,i}dA \dots\dots\dots(3.2)
\end{aligned}$$

式(3.2)の右辺第1項はグリーンの式より次のようになる。

$$\begin{aligned}
& \int_A[(h+\zeta)M_i^*M_{j,i}]_{,j}dA=\int_O(h+\zeta)M_i^*M_{j,i}n_jdS \\
& \dots\dots\dots(3.3)
\end{aligned}$$

ここに、 n_j は領域(A)の境界(C)での法線ベクトルである。

式(3.2)と式(3.3)より式(3.1)は一階の微係数のみを含む式に変形される。

$$\begin{aligned}
& \int_A\frac{\partial M_i}{\partial t}M_i^*dA+g\Delta t\int_A[(h+\zeta)M_i^*]_{,j}M_{j,i}dA \\
& -g\Delta t\int_O(h+\zeta)M_i^*M_{j,i}n_jdS \\
& =-g\int_A(h+\zeta)\zeta_{,i}M_i^*dA \\
& +\varepsilon_{ijf}\int_A(h+\zeta)u_jM_i^*dA \\
& -\int_A(h+\zeta)(u_iu_j)_{,j}M_i^*dA-\int_A\frac{\tau_{bi}}{\rho_w}M_i^*dA \\
& \dots\dots\dots(3.4)
\end{aligned}$$

領域Aとして三角形要素を考え、三角形内の任意点でののおの物理量を三角形の頂点の値で内挿する。

$$\left. \begin{aligned} M_i^* &= \Phi_\alpha M_{i\alpha}^* \\ M_i &= \Phi_\beta M_{i\beta} \\ u_i &= \Phi_\beta u_{i\beta} \\ \zeta &= \Phi_\beta \zeta_\beta \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(3.5)$$

式(3.5)において Φ_α, Φ_β は一次の形状関数である。式(3.5)を用いて式(3.4)を表現すると次式のようになる。

$$\begin{aligned}
& \int_A\Phi_\alpha\Phi_\beta dA\frac{\partial M_{i\beta}}{\partial t}M_{i\alpha}^* \\
& +g\Delta t\int_A\Phi_\alpha\Phi_\beta\Phi_{\beta,i}dA(h+\zeta)_\alpha M_{i\alpha}^*M_{j\beta} \\
& -g\Delta t\int_O\Phi_\alpha M_{j,i}n_jdSM_{i\alpha}^*(h+\zeta)_\alpha \\
& =-g\left[\int_A\Phi_\alpha\Phi_\beta\Phi_{\beta,i}dA\right](h+\zeta)_\alpha\zeta_\beta M_{i\alpha}^*
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& +\varepsilon_{ijf}\left[\int_A\Phi_\alpha\Phi_\beta dA\right](h+\zeta)_\alpha u_{j\beta}M_{i\alpha}^* \\
& -\left[\int_A\Phi_\alpha\Phi_\beta\Phi_{\beta,j}dA\right](h+\zeta)_\alpha(u_iu_j)_\beta M_{i\alpha}^* \\
& -\left[\int_A\Phi_\alpha\Phi_\beta dA\right]\frac{\tau_{bi}}{\rho_w}M_{i\alpha}^* \dots\dots\dots(3.6)
\end{aligned}$$

式(3.6)において $M_{i\alpha}^*$ は任意であるので、消去すれば次式のようになる。

$$\begin{aligned}
& N_{\alpha\beta}\frac{\partial M_{i\beta}}{\partial t}+K_{\alpha\beta}(h+\zeta)_\alpha M_{j\beta}-C_\alpha(h+\zeta)_\alpha \\
& =-gP_{\alpha\beta}(h+\zeta)_\alpha\zeta_\beta+\varepsilon_{ijf}N_{\alpha\beta}(h+\zeta)_\alpha u_{j\beta} \\
& -Q_{\alpha\beta}(h+\zeta)_\alpha(u_iu_j)_\beta-N_{\alpha\beta}\frac{\tau_{bi}}{\rho_w} \dots\dots\dots(3.7)
\end{aligned}$$

ここに、

$$\left. \begin{aligned} N_{\alpha\beta} &= \int_A \Phi_\alpha \Phi_\beta dA \\ K_{\alpha\beta} &= g\Delta t \int_A \Phi_\alpha \Phi_\beta \Phi_{\beta,i} dA \\ P_{\alpha\beta} &= \int_A \Phi_\alpha \Phi_\beta \Phi_{\beta,j} dA \\ Q_{\alpha\beta} &= \int_A \Phi_\alpha \Phi_\beta \Phi_{\beta,j} dA \\ C_\alpha &= g\Delta t \int_O \Phi_\alpha M_{j,i} n_j dS \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(3.8)$$

運動方程式と同様に、連続方程式(2.2)に任意の変分 ζ^* をかけて、領域(A)で積分する。

$$\int_A\frac{\partial \zeta}{\partial t}\zeta^*dA+\int_A M_{i,i}\zeta^*dA=0 \dots\dots\dots(3.9)$$

形状関数で表現すれば、式(3.9)は次式のようになる。

$$\begin{aligned}
& \int_A\Phi_\beta\Phi_\alpha dA\frac{\partial \zeta_\beta}{\partial t}\zeta_\alpha^*+\int_A\Phi_\beta\Phi_\alpha dAM_{i\beta}\zeta_\alpha^*=0 \\
& \dots\dots\dots(3.10)
\end{aligned}$$

ζ_α^* は任意であることから消去し、式(3.8)で式(3.10)を表現すれば次式のようになる。

$$N_{\alpha\beta}\frac{\partial \zeta_\beta}{\partial t}+P_{\alpha\beta}M_{i\beta}=0 \dots\dots\dots(3.11)$$

運動方程式(3.7)、ならびに連続方程式(3.11)のタイムレベルを式(2.3)、(2.4)のようにおき、未知数を左辺において整理すれば、有限要素法の最終的な解式を得ることができる。

$$\begin{aligned}
& \frac{N_{\alpha\beta}}{\Delta t}M_{i\beta}^{(n+1)}+K_{\alpha\beta}(h+\zeta^{(n)})_\alpha M_{j\beta}^{(n+1)} \\
& -C_\alpha^{(n+1)}(h+\zeta^{(n)})_\alpha=\frac{N_{\alpha\beta}}{\Delta t}M_{i\beta}^{(n)} \\
& -gP_{\alpha\beta}(h+\zeta^{(n)})_\alpha\zeta_\beta^{(n)}+\varepsilon_{ijf}N_{\alpha\beta}(h+\zeta^{(n)})_\alpha u_{j\beta}^{(n)} \\
& -Q_{\alpha\beta}(h+\zeta^{(n)})_\alpha(u_iu_j)_\beta^{(n)}-N_{\alpha\beta}\frac{\tau_{bi}}{\rho_w} \dots\dots\dots(3.12)
\end{aligned}$$

$$\frac{N_{\alpha\beta}}{\Delta t}\zeta_\beta^{(n+1)}=\frac{N_{\alpha\beta}}{\Delta t}\zeta_\beta^{(n)}-P_{\alpha\beta}M_{i\beta}^{(n+1)} \dots\dots\dots(3.13)$$

式(3.12)、式(3.13)を全要素について作成し、重ね合

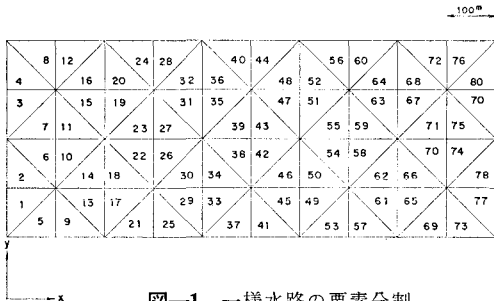
わせをおこなって全体方程式を組み立て、境界条件を課してステップ毎に計算をおこなえば、各節点での流速、潮位を得ることができる。

4. 数値計算例

3. において誘導した式 (3.12), (3.13) を用いてシミュレーションプログラムを作成し、一様水路と A 湾に適用してみた。

(1) 一様水路

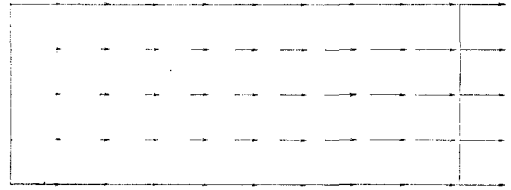
幅 400 m, 長さ 1000 m, 水深 $h=20$ m の水路を図 1 のように 80 個の三角形要素に分解し、周期 $T=12$ 時間の往復流を再現させてみた。



図—1 一様水路の要素分割

このときの初期条件は、流れの方向を x 方向とすれば次に示すとおりである。

$$\left. \begin{aligned} M_x &= M_0 \sin\left(\frac{2\pi x}{L}\right) \\ M_y &= 0 \\ \zeta &= \zeta_0 \sin\left(\frac{2\pi x}{L}\right) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (4.1)$$



図—2 一様水路の流速計算結果 (24 時間後)

x 軸方向の左端および右端における境界条件は次のとおりである。

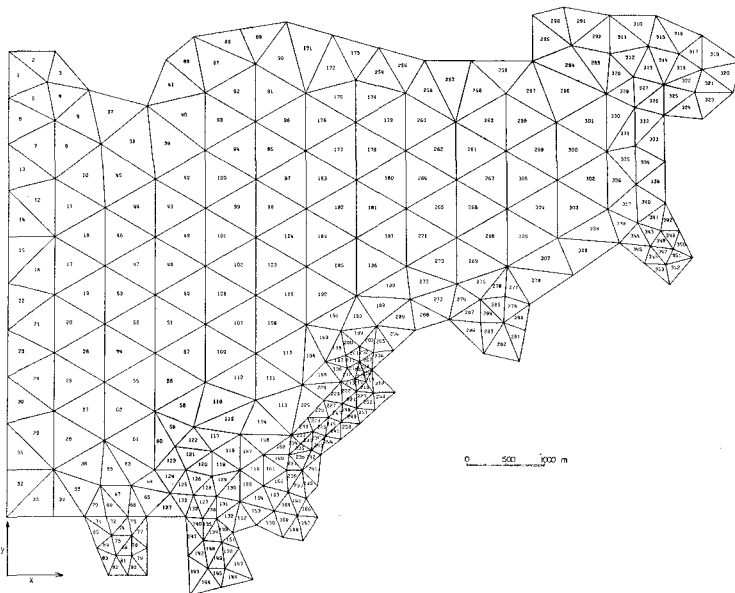
$$M_x = M_0 \sin 2\pi \left(\frac{x}{L} + \frac{t}{T} \right) \dots\dots\dots (4.2)$$

ここに、 $M_0 = 2 \times 10^4 \text{ cm}^2/\text{sec}$, $\zeta_0 = M_0 / \sqrt{gh} \approx 14.29 \text{ cm}$, $L = \sqrt{gh} T = 6.048 \times 10^7 \text{ cm}$.

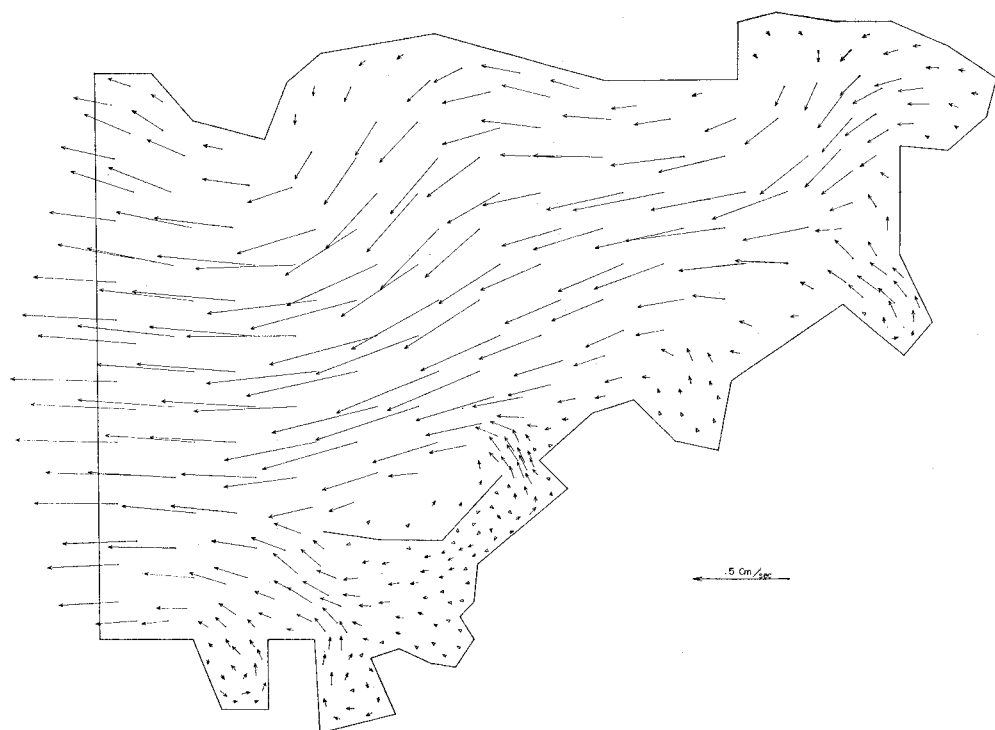
解析解と比較するためにコリオリ力、海底摩擦力の項を省いて、2 周期の計算をおこなった。このときの時間増分は 40 分である。図—2 は初期状態から出発して 24 時間後、すなわち 2 周期後の計算結果である。このときの計算値は理論値としての初期値と $1/100 \text{ cm/sec}$ の桁まで同一であった。

(2) A 湾への適用

(1) において時間増分を 40 分程度にしても安定な解を得ることがわかったので、次に任意形状をした A 湾を対象にして計算をおこなってみた。A 湾を図—3 のように三角形要素に分割した。このときの総要素数は、353 要素、総節点数は 218 節点である。なお水深は 2~12 m である。初期条件は流動変動のない状態、



図—3 要素分割



TIME=21 (m)

図-4 流速計算結果

すなわち流速，潮位とも零とした。境界条件は，湾口部で流速 u の振幅が $2 \text{ cm/sec} \sim 6 \text{ cm/sec}$ になるような流量 M_x を 12 時間周期で与え， y 方向の流速は零とした。コリオリ力は微小であると考えられるので無視し，摩擦係数は一般的な 0.0026 の値を用いた。時間増分を 30 分とし，2 周期の計算をおこなった。このときの計算結果のうち，初期状態から出発して 21 時間後の計算結果を図-4に示す。これらの計算結果は，別におこなった差分の計算結果と全体的にはほぼ同じ傾向を示しており，防波堤，ならびに沿岸付近では境界形状を反映しており，若干の相違がみられた。

5. あとがき

今回，連続方程式を運動方程式に代入して得られた式より流量を implicit 法で解き，得られた流量を連続方程式に代入して潮位を求める方法を有限要素法により定式化し，シミュレーションプログラムを作成した。このシミュレーションプログラムを用いて一様水路の往復流の計算をおこなった結果，計算結果は解析解とほとんど一致し，この解法の妥当性を示していた。またこの計算に

おいて時間増分を 40 分にとっても十分安定な解を得ることができることがわかった。この時間増分は explicit な差分法に用いられる収束条件， $\Delta t < \Delta S / \sqrt{2gh}$ ，より定まる時間増分に比較して 475 倍の値である。次に具体的な A 湾について計算をおこない，ほぼ妥当な計算結果が得られた。このときに要した CPU 占有時間は，IBM 370/168 で約 160 秒であった。以上のことからこの解法はメッシュ幅が短くなるような細部の流況を再現する場合などには，計算時間が短くてすみ，実用的で有効な方法であるといえる。

このモデルの開発には多くの方々を協力をいただいたが，特に東京都立大学堀口孝男教授からは有益な助言を数多くいただいた。ここに付記して深謝の意を表する次第である。

参考文献

- 1) 堀口孝男・富田 勇・堀江 毅：三次元モデルによる流れと拡散の数値解法について，第 24 回海岸工学講演会論文集，pp. 443~447, 1977.