

有限要素法による潮流解析システムの提案

川 原 睦 人*・長 谷 川 賢 一**

1. 緒 言

有限要素法による海域の潮流解析については、近年、多くの方法が発表され、すでに実際の問題に対する適用例も数多くみられる。三次元問題は別として、潮流解析を対象とする場合、実用上は浅海長波の方程式を仮定するのが通例である。著者らはこの方程式を対象にして、時間的に定常・準定常・非定常の場合について有効な方法を提案してきた^{1)~7)}。通常の有限要素解析では、潮流運動のような時間依存の問題には、全解析時間を短い時間区間に分割し、分割された時間点に対して逐次計算を進める逐次時間積分型有限要素法が適用される。このような逐次時間積分型有限要素法に対しては安定性に対して十分な検討を要し、解析に際しては、時間積分に伴う制約条件から応用範囲に自ずと限界が生じる。

潮流流は、調和定数にみられるように周期運動として特徴づけることができる。著者らは、潮流運動のような周期的流れの解析には時間に関してもガラーキン法の適用が有効であることを明らかにしてきた。すなわち有限要素法と Perturbation method との混合法に基づいた解析方法が周期運動を仮定した場合に成立する。一般に、空間に関して有限要素法を適用した段階では支配方程式は時間については連続関数として記述される。そこで、流速と潮位を微小な Perturbation parameter を用いて級数展開することができると仮定する。この級数展開された方程式を支配方程式に代入し、同一オーダーごとに整理すると線形化された方程式系を得ることができる。これらの方程式系の解に三角関数型の解ベクトルを仮定すると、与えられた方程式が線形の偏微分方程式であることから容易に解析することができる。

これらのことから、準定常な周期的流れは線形化した方程式の解を重ね合わせることによって、定常流解析とほとんど同様の方法で解析することが可能となる。この考え方については、これまで段階的に発表してきたが^{1)~4), 6)} 本文において、Periodic Galerkin finite element method のまとめとして、一つの解析システムを整理す

るものである。

2. 基礎方程式

潮流流の運動は一般に浅海波理論によって記述される。 u_j を流速、 η を潮位として、ここでは基礎方程式を次式のように表わす。

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} u_j u_{i,j} + g \eta_{,i} - \nu u_{i,jj} + \gamma_{ij} u_j + k u_i = 0 \quad \dots\dots\dots (2.1)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \{(H + \eta) u_i\}_{,i} = 0 \quad \dots\dots\dots (2.2)$$

ここに、 g : 重力の加速度、 ν : 渦動粘性係数、 H : 平均水深とし、

$$\gamma_{ij} = \begin{cases} -f & (i=1, j=2) \\ f & (i=2, j=1) \\ 0 & (i=j) \end{cases}, \quad k = \frac{-g}{C^2 H} \sqrt{\tilde{U}_1^2 + \tilde{U}_2^2}$$

とする。ここでは、流速のオーダー $\tilde{U}_i$ があらかじめ既知として、摩擦係数 k により線形の摩擦力を仮定する。また、各項でくり返し表われる添字については総和規約を適用する。添字の i は x, y 座標系を意味するものである。

境界条件としては次の三条件を考慮する。すなわち、

$$u_i = \hat{u}_i \quad \text{on } S_1 \quad \dots\dots\dots (2.3)$$

$$q_i = u_i, n_j = \hat{q}_i \quad \text{on } S_2 \quad \dots\dots\dots (2.4)$$

$$\eta = \hat{\eta} \quad \text{on } S_3 \quad \dots\dots\dots (2.5)$$

ここに $\hat{}$ は境界上の既知量を意味し、 n_i は境界上における外向きの単位法線ベクトルの方向余弦である。基礎方程式の解 u_i, η は微小な Perturbation parameter ϵ を用いて展開できるものと仮定すると次式のように表わされる。

$$u_i = u_i^{(0)} + \epsilon u_i^{(1)} + \epsilon^2 u_i^{(2)} + \dots\dots\dots (2.6)$$

$$H + \eta = H + \epsilon \eta^{(1)} + \epsilon^2 \eta^{(2)} + \dots\dots\dots (2.7)$$

式 (2.6)、(2.7) を式 (2.1)、(2.2) に代入して整理すると次のような方程式系が得られる。

0 次のオーダー:

$$u_j^{(0)} u_{i,j}^{(0)} + g H_{,i} - \nu u_{i,jj}^{(0)} + \gamma_{ij} u_j^{(0)} + k u_i^{(0)} = 0 \quad \dots\dots\dots (2.8)$$

$$(H u_i^{(0)})_{,i} = 0 \quad \dots\dots\dots (2.9)$$

* 工博 中央大学助教授 理工学部土木工学科
** 正会員 株式会社 ユニックス

1 次のオーダー

$$\frac{\partial u_i^{(1)}}{\partial t} + u_j^{(0)} u_{i,j}^{(1)} + u_j^{(1)} u_{i,j}^{(0)} + g \eta_{i,j}^{(1)} - \nu u_{i,j}^{(1)} + \gamma_{ij} u_j^{(1)} + k u_i^{(1)} = 0 \quad (2.10)$$

$$\frac{\partial \eta^{(1)}}{\partial t} + (H u_i^{(1)})_{,i} + (\gamma^{(1)} u_i^{(0)})_{,i} = 0 \quad (2.11)$$

2 次のオーダー

$$\frac{\partial u_i^{(2)}}{\partial t} + u_j^{(0)} u_{i,j}^{(2)} + u_j^{(1)} u_{i,j}^{(1)} + u_j^{(2)} u_{i,j}^{(0)} + g \eta_{i,j}^{(2)} - \nu u_{i,j}^{(2)} + \gamma_{ij} u_j^{(2)} + k u_i^{(2)} = 0 \quad (2.12)$$

$$\frac{\partial \eta^{(2)}}{\partial t} + (H u_i^{(2)})_{,i} + (\gamma^{(1)} u_i^{(1)})_{,i} + (\gamma^{(2)} u_i^{(0)})_{,i} = 0 \quad (2.13)$$

式 (2.8), (2.9) とそれに対応する境界条件からは定常解を得ることができる。式 (2.10)~(2.13) からは周期解が導かれる。これらの方程式をみると式 (2.10), (2.11) は $u_i^{(1)}$ と $\eta^{(1)}$ に関して線形の方程式であり、式 (2.12), (2.13) は $u_i^{(2)}$ と $\eta^{(2)}$ に関して同様に線形の方程式となっていることがわかる。

3. 定常流解析

潮流を対象にした流れの解析では、特に外海に属する領域を解析対象領域にとると、潮汐流および潮汐残差流の他に、海流が無視できない場合がある。海流にも長周期の変動がみられることが多いが、これを定常流とみなせば、式 (2.8), (2.9) を解くことによって解が得られる。

式 (2.8), (2.9) に有限要素法を適用する。式 (2.8) の両辺に重み関数 u_i^* を乗じて解析領域 S 上で積分すると次式のような重みつき変分方程式が得られる。

$$\begin{aligned} \int_S (u_i^* u_j^{(0)} u_{i,j}^{(0)}) dS + \nu \int_S (u_i^* u_{i,j}^{(0)}) dS \\ - g \int_S (u_i^* H) dS + \gamma_{ij} \int_S (u_i^* u_j^{(0)}) dS \\ + k \int_S (u_i^* u_i^{(0)}) dS = \nu \int_{S_2} (u_i^* \hat{q}_i^{(0)}) dl \quad (3.1) \end{aligned}$$

式 (2.9) を自動的に満足するために、次式のような流れ関数の導入をする。

$$u_i = \frac{1}{H} \varepsilon_{ij} \phi_{,j} \quad (3.2)$$

$$u_i^* = \frac{1}{H} \varepsilon_{ij} \phi_{,j}^* \quad (3.3)$$

ここに、 $\varepsilon_{ij}=1$ ($i=1, j=2$), -1 ($i=2, j=1$), 0 (otherwise) とする。式 (3.2), (3.3) を式 (3.1) に代入して整理すると

$$\begin{aligned} \frac{1}{H^2} \int_S (\varepsilon_{ik} \varepsilon_{jl} \varepsilon_{im} \phi_{,k}^* \phi_{,l} \phi_{,m,j}) dS \\ + \frac{\nu}{H} \int_S (\varepsilon_{ik} \varepsilon_{il} \phi_{,k}^* \phi_{,l,j}) dS - g H \int_S (\varepsilon_{ik} \phi_{,k}^*) dS \\ + \frac{\gamma_{ik}}{H} \int_S (\varepsilon_{ik} \varepsilon_{jl} \phi_{,k}^* \phi_{,l,j}) dS + \frac{k}{H} \int_S (\varepsilon_{ik} \varepsilon_{il} \phi_{,k}^* \phi_{,l,i}) dS \end{aligned}$$

$$= \frac{\nu}{H^2} \int_{S_2} (\varepsilon_{ik} \phi_{,k}^* \hat{q}_i^{(0)}) dl \quad (3.4)$$

解析領域を小領域の有限要素に分割し、要素内での流れ関数を次式で近似する。

$$\phi = \Phi_\alpha \phi_\alpha \quad (3.5)$$

$$\phi^* = \Phi_\alpha \phi_\alpha^* \quad (3.6)$$

ここに Φ_α は内挿関数、 ϕ_α , ϕ_α^* はそれぞれ流れ関数および重み関数の節点値を意味する。式 (3.5), (3.6) を式 (3.4) に代入し、重み関数の任意性を利用して整理すると次式のような有限要素方程式を得る。

$$K_{\alpha\beta} \phi_\beta \phi_\gamma + S_{\alpha\beta} \phi_\beta = \hat{Q}_\alpha \quad (3.7)$$

ここに

$$K_{\alpha\beta} = \frac{1}{H^2} \int_S (\varepsilon_{ik} \varepsilon_{jl} \varepsilon_{im} \Phi_{\alpha,k} \Phi_{\beta,l} \Phi_{\gamma,m,j}) dS$$

$$S_{\alpha\beta} = \frac{\nu}{H} \int_S (\varepsilon_{ik} \varepsilon_{il} \Phi_{\alpha,k} \Phi_{\beta,l,j}) dS$$

$$+ \left(\frac{\gamma_{ij}}{H} + \frac{k}{H} \right) \int_S (\varepsilon_{ik} \varepsilon_{jl} \Phi_{\alpha,k} \Phi_{\beta,l,j}) dS$$

$$\hat{Q}_\alpha = \frac{\nu}{H^2} \int_{S_2} (\varepsilon_{ik} \Phi_{\alpha,k} \hat{q}_i^{(0)}) dl + g H \int_S (\varepsilon_{ik} \Phi_{\alpha,k}) dS$$

である。

各要素ごとに作成された式 (3.7) を解析領域全体で重ね合わせると非線形の支配方程式が得られる。非線形方程式の解法には Newton-Raphson 法を適用して次のようなアルゴリズムでくり返し計算を行う。すなわち、式 (3.7) は

$$F_\alpha \equiv K_{\alpha\beta} \phi_\beta \phi_\gamma + S_{\alpha\beta} \phi_\beta - \hat{Q}_\alpha = 0 \quad (3.8)$$

と書くことができる。くり返し計算過程における n 回目の $\phi_\beta^{(n)}$ を $\phi_\beta^{(n)} = \phi_\beta^{(n-1)} + \phi_\beta$ とすれば次式が成立する。

$$[(K_{\alpha\beta} + K_{\alpha\gamma}) \phi_\gamma^{(n-1)} + S_{\alpha\beta}] \phi_\beta = F_\alpha^{(n-1)} \quad (3.9)$$

式 (3.9) をくり返し計算し ϕ_β が充分小さくなれば解が得られたことになる。形状関数には不完全三次式を適用するのが著者らの数値実験によれば適切であった。

4. 一次オーダの周期解

境界条件式 (2.3)~(2.5) が周期的な条件として与えられた場合、式 (2.1)~(2.13) は周期解をもつ。説明のため、式 (2.10), (2.11) を対象にして議論をすすめる。重み関数 u_i^* と η^* とをそれぞれ式 (2.10), (2.11) に乗じて流れの場で積分すると次式のような重みつき変分方程式を得る。

$$\begin{aligned} \int_S \left(u_i^* \frac{\partial u_i^{(1)}}{\partial t} \right) dS + \int_S (u_i^* u_j^{(0)} u_{i,j}^{(1)}) dS \\ + \int_S (u_i^* u_j^{(1)} u_{i,j}^{(0)}) dS + g \int_S (u_i^* \eta_{i,j}^{(1)}) dS \\ + \nu \int_S (u_i^* u_{i,j}^{(1)}) dS + \gamma_{ij} \int_S (u_i^* u_j^{(1)}) dS \end{aligned}$$

$$+k \int_S (u_i^* u_i^{(1)}) dS = \nu \int_{S_2} (u_i^* \dot{q}_i^{(1)}) dl \quad \dots\dots\dots (4.1)$$

$$\int_S \left(\gamma^* \frac{\partial \eta^{(1)}}{\partial t} \right) dS + \int_S \{ \gamma^* (H u_i^{(1)})_{,i} \} dS \\ + \int_S \{ \gamma^* (\eta^{(1)} u_{\alpha i}^{(0)})_{,i} \} dS = 0 \quad \dots\dots\dots (4.2)$$

ここで次式のような形状関数を適用する.

$$u_i^{(1)} = \Phi_{\alpha} u_{\alpha i}^{(1)}, \quad u_i^* = \Phi_{\alpha} u_{\alpha i}^* \quad \dots\dots\dots (4.3), (4.4)$$

$$\eta^{(1)} = \phi_{\lambda} \eta_{\lambda}^{(1)}, \quad \eta^* = \phi_{\lambda} \eta_{\lambda}^* \quad \dots\dots\dots (4.5), (4.6)$$

これらの式を式 (4.1), (4.2) に代入すると次式のような有限要素方程式が得られる.

$$M_{\alpha i \beta j} \dot{u}_{\beta j}^{(1)} + S_{\alpha i \beta j} u_{\beta j}^{(1)} + H_{\alpha i \lambda} \eta_{\lambda}^{(1)} = \hat{Q}_{\alpha i}^{(1)} \quad \dots\dots\dots (4.7)$$

$$A_{\lambda \mu} \eta_{\mu}^{(1)} + B_{\lambda \beta j} u_{\beta j}^{(1)} + C_{\lambda \mu} \eta_{\mu}^{(1)} = 0 \quad \dots\dots\dots (4.8)$$

ここに, 各係数行列は次式のとおりである.

$$M_{\alpha i \beta j} = \int_S (\Phi_{\alpha} \Phi_{\beta}) \delta_{ij} dS \\ S_{\alpha i \beta j} = \int_S (\Phi_{\alpha} \Phi_{\beta} \Phi_{\gamma, j}) \delta_{ij} dS \cdot u_{\gamma i}^{(0)} \\ + \int_S (\Phi_{\alpha} \Phi_{\beta} \Phi_{\gamma, j}) dS \cdot u_{\gamma i}^{(0)} + \int_S \nu (\Phi_{\alpha, k} \Phi_{\beta, k}) \delta_{ij} dS \\ + \gamma \int_S (\Phi_{\alpha} \Phi_{\beta}) dS + k \int_S (\Phi_{\alpha} \Phi_{\beta}) \delta_{ij} dS \\ H_{\alpha i \lambda} = \int_S g (\Phi_{\alpha} \phi_{\lambda, i}) dS \\ \hat{Q}_{\alpha i}^{(1)} = \int_{S_2} \nu (\Phi_{\alpha} \dot{q}_i^{(1)}) dl \\ A_{\lambda \mu} = \int_S (\phi_{\lambda} \phi_{\mu}) dS \\ B_{\lambda \beta j} = \int_S \{ \phi_{\lambda} (H \Phi_{\beta})_{,j} \} dS \\ C_{\lambda \mu} = \int_S \{ \phi_{\lambda} (u_i^{(0)} \phi_{\mu})_{,i} \} dS$$

一般に行われる有限要素の重ね合わせをすると, 全体としての有限要素方程式は次式で表わされる.

$$M_{\alpha \beta} \dot{v}_{\beta}^{(1)} + S_{\alpha \beta} v_{\beta}^{(1)} + H_{\alpha \lambda} h_{\lambda}^{(1)} = \hat{Q}_{\alpha}^{(1)} \quad \dots\dots\dots (4.9)$$

$$A_{\lambda \mu} h_{\mu}^{(1)} + B_{\lambda \beta} v_{\beta}^{(1)} + C_{\lambda \mu} h_{\mu}^{(1)} = \hat{\Sigma}_{\lambda}^{(1)} \quad \dots\dots\dots (4.10)$$

ここで $v_{\beta}^{(1)}$, $h_{\mu}^{(1)}$ は, 解析領域全体における $u_{\alpha i}^{(1)}$, $\eta_{\lambda}^{(1)}$ の節点値を表わす.

境界条件として与えられた既知項が次の形式で表わされると仮定する.

$$\hat{Q}_{\alpha}^{(1)} = \hat{Q}_{\alpha 0}^{(1)} \cdot \sin \omega t + \hat{Q}_{\alpha 0}^{(1)} \cdot \cos \omega t \quad \dots\dots\dots (4.11)$$

$$\hat{\Sigma}_{\lambda}^{(1)} = \hat{\Sigma}_{\lambda 0}^{(1)} \cdot \sin \omega t + \hat{\Sigma}_{\lambda 0}^{(1)} \cdot \cos \omega t \quad \dots\dots\dots (4.12)$$

この仮定が成り立つならば, 方程式 (4.7), (4.8) の解は次式で与えられる.

$$v_{\beta}^{(1)} = a_{\beta}^{(1)} \cdot \sin \omega t + b_{\beta}^{(1)} \cdot \cos \omega t \quad \dots\dots\dots (4.13)$$

$$h_{\lambda}^{(1)} = c_{\lambda}^{(1)} \cdot \sin \omega t + d_{\lambda}^{(1)} \cdot \cos \omega t \quad \dots\dots\dots (4.14)$$

これらの関係式 (4.9) ~ (4.14) を有限要素方程式 (4.9), (4.10) に代入すると, 最終的に次のような形の線形方程式が得られる.

$$\begin{bmatrix} \omega M_{\alpha \beta} & S_{\alpha \beta} & H_{\alpha \lambda} \\ S_{\alpha \beta} & -\omega M_{\alpha \beta} & H_{\alpha \lambda} \\ & B_{\lambda \beta} & \omega A_{\lambda \mu} & C_{\lambda \mu} \\ & & C_{\lambda \mu} & -\omega A_{\lambda \mu} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a_{\beta}^{(1)} \\ b_{\beta}^{(1)} \\ c_{\lambda}^{(1)} \\ d_{\lambda}^{(1)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \hat{Q}_{\alpha 0}^{(1)} \\ \hat{Q}_{\alpha 0}^{(1)} \\ \hat{\Sigma}_{\lambda 0}^{(1)} \\ \hat{\Sigma}_{\lambda 0}^{(1)} \end{bmatrix} \quad \dots\dots\dots (4.15)$$

式 (4.15) の解を式 (4.13), (4.14) に代入すれば 1 次オーダの周期解が求められる.

5. 2 次オーダの周期解

2 次オーダの周期解を導くために式 (2.12), (2.13) を対象とする. 前節と同様の方法により有限要素方程式は次のように表わされる.

$$M_{\alpha i \beta j} \dot{u}_{\beta j}^{(2)} + S_{\alpha i \beta j} u_{\beta j}^{(2)} + H_{\alpha \mu} \eta_{\mu}^{(2)} = \hat{Q}_{\alpha i}^{(2)} + \hat{A}_{\alpha i} \quad \dots\dots\dots (5.1)$$

$$A_{\lambda \mu} \eta_{\mu}^{(2)} + B_{\lambda \beta j} u_{\beta j}^{(2)} + C_{\lambda \mu} \eta_{\mu}^{(2)} = \hat{B}_{\lambda} \quad \dots\dots\dots (5.2)$$

ここに

$$\hat{Q}_{\alpha i}^{(2)} = \int_{S_2} \nu (\Phi_{\alpha} \dot{q}_i^{(2)}) dl \\ \hat{A}_{\alpha i} = - \int_S (\Phi_{\alpha} \Phi_{\beta} \Phi_{\gamma, j}) dS \cdot u_{\beta j}^{(1)} u_{\gamma i}^{(1)} \\ \hat{B}_{\lambda} = - \int_S (\phi_{\lambda} \phi_{\mu, i} \phi_{\beta}) dS \cdot u_{\beta i}^{(1)} \eta_{\mu}^{(1)} \\ - \int_S (\phi_{\lambda} \phi_{\mu} \phi_{\beta, i}) dS \cdot u_{\beta i}^{(1)} \eta_{\mu}^{(1)}$$

とし, 他の項は式 (4.15) と等しい. 上式を解析領域全体で重ね合わせると次のような方程式系を得る.

$$M_{\alpha \beta} \dot{v}_{\beta}^{(2)} + S_{\alpha \beta} v_{\beta}^{(2)} + H_{\alpha \mu} h_{\mu}^{(2)} = \hat{Q}_{\alpha}^{(2)} + \hat{A}_{\alpha} \quad \dots\dots\dots (5.3)$$

$$A_{\lambda \mu} h_{\mu}^{(2)} + B_{\lambda \beta} v_{\beta}^{(2)} + C_{\lambda \mu} h_{\mu}^{(2)} = \hat{\Sigma}_{\lambda}^{(2)} + \hat{B}_{\lambda} \quad \dots\dots\dots (5.4)$$

ここに $v_{\beta}^{(2)}$ と $h_{\mu}^{(2)}$ とは全体領域における $u_{\alpha i}^{(2)}$ と $\eta_{\lambda}^{(2)}$ との節点量とする. 式 (5.3) と (5.4) の右辺は次式のように書ける.

$$\hat{A}_{\alpha} = K_{\alpha \beta \gamma} \cdot v_{\beta}^{(1)} v_{\gamma}^{(1)} \quad \dots\dots\dots (5.5)$$

$$\hat{B}_{\lambda} = E_{\lambda \beta \mu} \cdot v_{\beta}^{(1)} h_{\mu}^{(1)} \quad \dots\dots\dots (5.6)$$

ここで, $\hat{Q}_{\alpha}^{(2)}$, $\hat{\Sigma}_{\lambda}^{(2)}$ を次式のように表わされると仮定する.

$$\hat{Q}_{\alpha}^{(2)} = \hat{Q}_{\alpha 0}^{(2)} \cdot \sin 2\omega t + \hat{Q}_{\alpha 0}^{(2)} \cdot \cos 2\omega t \quad \dots\dots\dots (5.7)$$

$$\hat{\Sigma}_{\lambda}^{(2)} = \hat{\Sigma}_{\lambda 0}^{(2)} \cdot \sin 2\omega t + \hat{\Sigma}_{\lambda 0}^{(2)} \cdot \cos 2\omega t \quad \dots\dots\dots (5.8)$$

一方, 式 (4.13), (4.14) を式 (5.5), (5.6) に代入して整理すると

$$\hat{Q}_{\alpha}^{(2)} + \hat{A}_{\alpha} = \hat{Q}_{\alpha 0}^{(2)} + \hat{Q}_{\alpha 0}^{(2)} \cdot \sin 2\omega t + \hat{Q}_{\alpha 0}^{(2)} \cdot \cos 2\omega t \quad \dots\dots\dots (5.9)$$

$$\hat{\Sigma}_{\lambda}^{(2)} + \hat{B}_{\lambda} = \hat{\Sigma}_{\lambda 0}^{(2)} + \hat{\Sigma}_{\lambda 0}^{(2)} \cdot \sin 2\omega t + \hat{\Sigma}_{\lambda 0}^{(2)} \cdot \cos 2\omega t \quad \dots\dots\dots (5.10)$$

となる. ここに

$$\hat{Q}_{\alpha 0}^{(2)} = \frac{1}{2}(K_{\alpha \beta \gamma} a_{\beta}^{(1)} a_{\alpha}^{(1)} + K_{\alpha \beta \gamma} b_{\beta}^{(1)} b_{\alpha}^{(1)})$$

$$\hat{Q}_{\alpha S_2}^{(2)} = \frac{1}{2}(K_{\alpha \beta \gamma} a_{\beta}^{(1)} b_{\gamma}^{(1)} + K_{\alpha \beta \gamma} b_{\beta}^{(1)} a_{\gamma}^{(1)}) + \hat{Q}_{\alpha S}^{(2)}$$

$$\hat{Q}_{\alpha C_2}^{(2)} = \frac{1}{2}(K_{\alpha \beta \gamma} b_{\beta}^{(1)} b_{\gamma}^{(1)} - K_{\alpha \beta \gamma} a_{\beta}^{(1)} a_{\gamma}^{(1)}) + \hat{Q}_{\alpha C}^{(2)}$$

$$\hat{S}_{\lambda 0}^{(2)} = \frac{1}{2}(E_{\lambda \mu \beta} c_{\mu}^{(1)} a_{\beta}^{(1)} + E_{\lambda \mu \beta} d_{\mu}^{(1)} b_{\beta}^{(1)})$$

$$\hat{S}_{\lambda S_2}^{(2)} = \frac{1}{2}(E_{\lambda \mu \beta} c_{\mu}^{(1)} b_{\beta}^{(1)} + E_{\lambda \mu \beta} d_{\mu}^{(1)} a_{\beta}^{(1)}) + \hat{S}_{\lambda S}^{(2)}$$

$$\hat{S}_{\lambda C_2}^{(2)} = \frac{1}{2}(E_{\lambda \mu \beta} d_{\mu}^{(1)} b_{\beta}^{(1)} - E_{\lambda \mu \beta} c_{\mu}^{(1)} a_{\beta}^{(1)}) + \hat{S}_{\lambda C}^{(2)}$$

である。右辺の形式から解は次式で表わされる。

$$v_{\beta}^{(2)} = a_{\beta}^{(2)} + b_{\beta}^{(2)} \sin 2\omega t + c_{\beta}^{(2)} \cos 2\omega t \quad \dots\dots(5.11)$$

$$h_{\mu}^{(2)} = p_{\mu}^{(2)} + q_{\mu}^{(2)} \sin 2\omega t + r_{\mu}^{(2)} \cos 2\omega t \quad \dots\dots(5.12)$$

最終的な方程式は、式 (5.11), (5.12) を式 (5.3), (5.4) に代入して整理すると次式のようなマトリクス形式が導かれる。

$$\begin{bmatrix} S_{\alpha \beta} & H_{\alpha \mu} \\ B_{\lambda \beta} & C_{\lambda \mu} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a_{\beta}^{(2)} \\ p_{\mu}^{(2)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \hat{Q}_{\alpha 0}^{(2)} \\ \hat{S}_{\lambda 0}^{(2)} \end{bmatrix} \quad \dots\dots\dots(5.13)$$

$$\begin{bmatrix} 2\omega M_{\alpha \beta} & S_{\alpha \beta} & H_{\alpha \mu} \\ S_{\alpha \beta} & -2\omega M_{\alpha \beta} & H_{\alpha \mu} \\ & B_{\lambda \beta} & 2\omega A_{\lambda \mu} & C_{\lambda \mu} \\ B_{\lambda \beta} & & C_{\lambda \mu} & -2\omega A_{\lambda \mu} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} b_{\beta}^{(2)} \\ c_{\beta}^{(2)} \\ q_{\mu}^{(2)} \\ r_{\mu}^{(2)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \hat{Q}_{\alpha C_2}^{(2)} \\ \hat{Q}_{\alpha S_2}^{(2)} \\ \hat{S}_{\lambda C_2}^{(2)} \\ \hat{S}_{\lambda S_2}^{(2)} \end{bmatrix} \quad \dots\dots\dots(5.14)$$

2 次オダの周期解は式 (5.13), (5.14) の解を式 (5.11), (5.12) に代入することによって得られる。式 (5.13) の解は、定常解であり、一次オダの解に伴う残差流に相当すると解釈される。

6. 形状関数

0 次オダから 2 次オダまでの方程式系に適用する形状関数としては面積座標⁹⁾を用いて次のように与えるのが適当である。

0 次オダ…流れ関数 ψ に不完全三次式

1 次および
2 次オダ… { 流速 u_i に二次式
 { 潮位 η に一次式

これらは、いずれの方程式系においても流速を二次関数で要素内において内挿することを意味し、逐次時間積分法⁹⁾にくらべると、内挿関数の

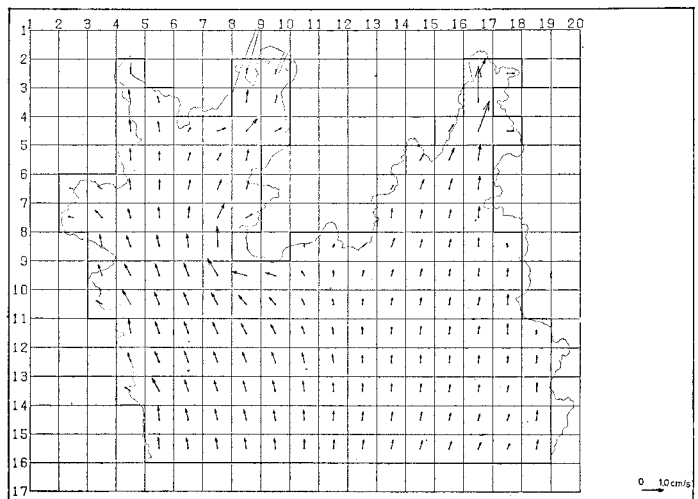
次数を高くする必要がある。また、面積座標に代えてアイソパラメトリック要素を適用することも可能である。この場合は各係数行列を求めるために数値積分を行う必要が生じるため、これに要する計算時間と、アイソパラメトリック要素を用いることによって節点数を節約して減少する計算時間とを比較し有利な形状関数を選択すればよい。

7. 数値計算例

図—1 は釜石湾を対象にして逐次時間積分型差分法によって計算した結果の一部を流速分布図で示した。境界条件は、湾口で潮位 η を与え、 $\eta = 0.30 \sin \omega t$, $\omega = 2\pi/24$ hour とした。この計算結果と、本文で述べた方法とを比較するために、有限要素法の利点の一つである地形の再現性をここでは無視し、図—2 に示す要素分割を行い、周期解を仮定して有限要素法により比較計算を行った (図—3)。計算結果は、非常によく一致し、計算に要した時間を比較すると、周期解を仮定した有限要素法による計算の方が、逐次時間積分型の計算手法にくらべて約 40% 程度計算時間を短縮することが出来た。

8. 結 言

本文で提案した方法は、最終的な方程式系からわかるように、いずれのオダの方程式系も大型の連立方程式を解くことによって計算されるためオダの如何を問わず一つの計算システムを作成することによって容易に利用することが出来る。また、この手法は、周期運動を仮定できる流れに対して、逐次時間積分型の解析手法にくらべ、安定性および計算時間に関する経済性の面から有利であるといえる。



図—1

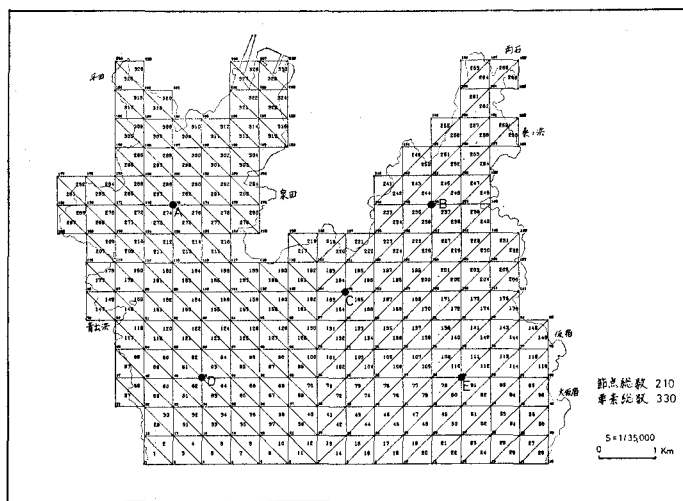


図-2

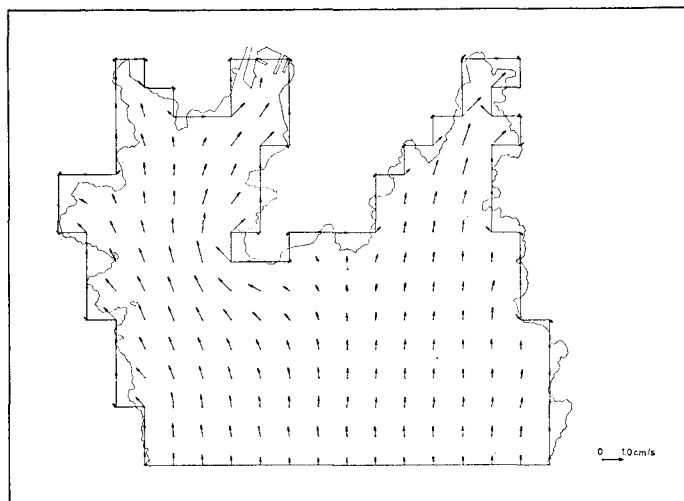


図-3

参 考 文 献

- 1) Kawahara, M. and N. Kaneko: Periodic Galerkin finite element method of incompressible viscous fluid flow, Theoretical and Applied Mechanics, Vol. 24, 東大出版会, 1977.
- 2) Kawahara, M.: Periodic Galerkin finite element method of unsteady periodic flow of viscous fluid, Int. J. Num. Meth. Engn., 1977.
- 3) Kawahara, M. and K. Hasegawa: Periodic Galerkin finite element method of tidal flow, Int. J. Num. Meth. Engn., 1977.
- 4) Kawahara, M., K. Hasegawa and Y. Kawanago: Periodic tidal flow analysis by finite element perturbation method, Com. Fluid, (in press), 1977.
- 5) Kawahara, M.: Steady and unsteady finite element analysis of incompressible viscous fluid, Finite Elements in Fluids, Vol. 3, (in press) 1977.
- 6) 川原睦人・川上俊雄・船越晴世・長谷川賢一: 有限要素法と摂動法を用いた流動および拡散手法の開発, 第23回海岸工学講演会論文集, pp. 524~528, 1976.
- 7) 森平倫生・片岡真二・安井誠人・川原睦人・長谷川賢一: 有限要素法による淡水海水二層流域の潮流と水質の解析, 第24回海岸工学講演会論文集, pp. 452~456, 1977.
- 8) 藤野 勉: 熱伝導と熱応力, コンピュータによる構造工学講座 II-4-B, 培風館
- 9) 川原睦人・竹内則雄・首藤伸夫: 2段階ラックス・ウエンドロフ有限要素法による潮汐流解析.