

海中係留球に作用する規則波波力

吉 原 進*・上 原 教 善**

1. は し が き

海洋構造物としては、その用途によって種々の形式のものが考えられているが、比較的水深の大きい場所に建設されるものは、一般にその固有周期が大きくなり、たわみ振動や変位振動が生じ易くなる。すなわちこれらは、波浪によって相当大きな振幅で振動することにもなるので、波浪と構造物の相互作用によってこれらに働く波力は、非常に複雑な様相を呈することになる。しかし構造物が振動し易いものであるだけに、波力の精度よい評価が一層重要となる。

本論文では、このように固有周期が大きくて波浪の卓越周期に近く、大振幅で振動する海洋構造物に働く波力、流体抵抗力を検討するために、1本のワイヤーで海中に係留されている球を取り上げ考察の対象とした。ところがこのように1本のワイヤーのみで拘束されている球の自由度は大きく、したがって多くの振動モードが理論上可能であり、実験的にも認められる。しかし、一般に高次の基準振動は、その固有周期が小さいばかりでなく、振動振幅も小さくなって実際上の影響も少ないことが多い。よってここではこの球の最低次の振動のみを考える。

2. 海中係留球の運動方程式

対象とする係留球を図-1の振動系で表わし、この球体の変形およびワイヤーのたるみを無視する。またこの

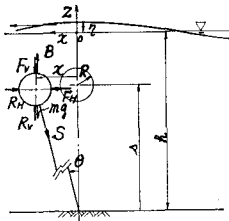


図-1 海中係留球のモデル図

球は図に示すように、波浪の伝播方向 (x 方向) を含む平面 ($x-z$ 面) 内でのみ運動するものとする。するとこの球の接線方向と法線方向の運動方程式は次式となる。

$$\left. \begin{aligned} m \left(s \frac{d^2 \theta}{dt^2} + 2 \frac{ds}{dt} \frac{d\theta}{dt} \right) &= -(B - mg) \sin \theta \\ &\quad + (F_H - R_H) \cos \theta + (F_V - R_V) \sin \theta \\ m \left(s \left(\frac{d\theta}{dt} \right)^2 - \frac{d^2 s}{dt^2} \right) &= S - (B - mg) \cos \theta \\ &\quad - (F_H - R_H) \sin \theta + (F_V - R_V) \cos \theta \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (1)$$

ここに、 m : 球のみの質量、 s : ワイヤー長、 S : ワイヤー張力、 θ : ワイヤー回転角、 B : 球に働く浮力で球半径を R 、海水の単位体積重量を w とすると $w \cdot 4\pi R^3/3$ 、 g : 重力加速度、 F_H , F_V : 運動している球を仮想的に静止させた時に、球に作用する力 (波浪中の固定球に作用する波力とみなす) の合力*の水平成分、鉛直成分、 R_H , R_V : 球の運動による海水の抵抗力 (静止海水中の振動球に作用する流体抵抗力とみなす) の合力*の水平成分、鉛直成分。波浪中で振動する剛球に作用する力を上式のように独立な波力と流体抵抗力の和で表わすことについては、慎重な検討が必要であるが、ここでは単純にこれが可能であるとしておく。さらにワイヤーの伸縮を無視し、かつ θ を微小**として、 $x \approx s\theta$, $\sin \theta \approx \theta$, $\cos \theta \approx 1$ を用いれば、式 (1) は次式となる。

$$\left. \begin{aligned} m \frac{d^2 x}{dt^2} + \frac{B - mg}{s} x &= F_H - R_H + (F_V - R_V) \frac{x}{s} \\ S - (B - mg) - \frac{m}{s} \left(\frac{dx}{dt} \right)^2 &= -(F_V - R_V) + (F_H - R_H) \frac{x}{s} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (2)$$

また波力等の水平成分、鉛直成分を同じオーダーとすれば、 θ を微小としているので、式 (2) の右辺第 2 項の影響は第 1 項に比べると相当小さくなる。これも無視すると、球の運動方程式として次式をうる。

* これら合力の作用線は球中心を通るものとする。

** 本実験結果によれば、最大振幅は約 15 cm であったので、 $\sin \theta \approx 0.2$ である。

$$\left. \begin{aligned} m \frac{d^2 x}{dt^2} + \frac{B-mg}{s} x &= F_H - R_H \\ S - (B-mg) - \frac{m}{s} \left(\frac{dx}{dt} \right)^2 &= -F_V + R_V \end{aligned} \right\} \dots (3)$$

上式中の F_H , F_V は、水粒子速度の水平成分、鉛直成分をおのおの u , v とすれば、Morison の波力式にならって

$$\left. \begin{aligned} F_H &= C_m \frac{w}{g} \frac{4\pi R^3}{3} \frac{\partial u}{\partial t} + C_d \frac{w}{g} \frac{\pi R^2}{2} u |u| \\ F_V &= C_m \frac{w}{g} \frac{4\pi R^3}{3} \frac{\partial v}{\partial t} + C_d \frac{w}{g} \frac{\pi R^2}{2} v |v| \end{aligned} \right\} \dots (4)$$

と表わせるとする。ここに、 C_m , C_d : 質量力係数、抗力係数。

次に静止流体中の振動球に作用する流体抵抗力を表わす R_H は、F. Odar らの式¹⁾ にならって

$$\begin{aligned} R_H &= C_m' \frac{w}{g} \frac{4\pi R^3}{3} \frac{d^2 x}{dt^2} \\ &+ C_d' \frac{w}{g} \frac{\pi R^2}{2} \frac{dx}{dt} \left| \frac{dx}{dt} \right| + c \frac{dx}{dt} \dots (5) \end{aligned}$$

とする。ここに、 C_m' , C_d' : 付加質量係数、抗力係数である。なお F. Odar らは、流体抵抗力中にいわゆる Basset 効果と称する力を含めているが、この力のオーダーは質量力等に比べると小さくなるので、上式ではこの力の他にエネルギー逸散等による減衰力も含めて、 $c \cdot dx/dt$ でこれを表わした。また θ を微小としているので、 x に比べ球の z 方向の変位は小さくなる。そこで、鉛直方向の流体抵抗力は、 $R_V = 0$ とする。結局

$$\left. \begin{aligned} (m + C_m' M) \frac{d^2 x}{dt^2} + c \frac{dx}{dt} \\ + C_d' \frac{3M}{8R} \frac{dx}{dt} \left| \frac{dx}{dt} \right| + \frac{(M-m)g}{s} x \\ = C_m M \frac{\partial u}{\partial t} + C_d \frac{3M}{8R} u |u| \\ S - (M-m)g - \frac{m}{s} \left(\frac{dx}{dt} \right)^2 \\ = -C_m M \frac{\partial v}{\partial t} - C_d \frac{3M}{8R} v |v| \end{aligned} \right\} \dots (6)$$

で、この球の運動を記述できることになる。上式で、球の排除した水の質量を M としている。

以上多くの仮定のもとに、簡単な式 (6) を得たが、それぞれの仮定の妥当性が必ずしも十分検討されているわけではない。この点に触れるのは別の機会に譲り、ここでは式 (6) を用いて、波力を求め検討を加えようとするものである。

3. 実験と結果の概要

実験は、水深 85 cm とした高さ 1.2 m, 奥行き 1.0 m, 長さ 30 m の 2 次元造波水槽の中程に、模型球 (1) を張力計 (2) がその最下部に挿入されている糸 (3) で係

留し、フラップ式造波板で波高を一定とした規則波を順次発生させ (4)、球の応答変位振幅がほぼ一定となったときに、水槽側面から球と同じ高さで設置された 16 mm カメラにて水面変動を含めて撮影・記録し、さらに球の静止位置真上に設置された容量式波高計の出力を、張力計の出力および 16 mm カメラのシャッター信号と共に、ペン書きレコーダーにも記録し、両記録の時間関係を整合するという方法で行った。

(1) 模型球は、直径 $2R = 11.7$ cm の F. R. P. 製ボンデンで、自重 $mg = 246$ g であり、その厚みは相当大きく、球殻の変形は十分無視できるものであった。(2) 球の運動の妨げとならぬよう、かつ水の運動の影響を受けぬように糸の最下部に挿入された張力計は、厚さ 2 mm のアクリライト板に防水ゲージを貼付して、この曲げひずみを検出するタイプのもので、 $0.16 \text{ g}/10^{-6}$ の感度を持ち、1000 g までは線形関係を有するものであった。(3) この球に取り付けた糸は、ナイロン製の水糸であったが、この伸縮は必ずしも無視できるものでなく、張力変化に糸の長手方向の振動成分がわずかに混入することになった。(4) 実験は、波高 $H = 3, 5, 8$ cm 各一定で、周期 $T = 1.2 \sim 2.2$ sec の規則波による強制振動のみを行った。当初静水中での自由振動実験をも行う予定であったが、減衰が大きいかつ水に攪乱を与えずに、球を振動させることが困難であったので、今回は実施していない。実施した実験を、後述する結果も含めて、表-1 に示す。

表-1 実験模型・結果の要約

Case	H (cm)	ζ (%)	T_0 (sec)	C_m'
A	3	11.5	1.71	0.49
B	5	15.5		
C	8	16.4		

図-2 は、実験 B の記録例で、球の共振点付近 ($T = 1.75$ sec) を中心にその前後のものを示している。これらの図から、水面変動 η と球の変位 x は共に同一周期の正弦波に近い波形であること、しかしそれらの位相関係は規則波の周期 T によって変化していること、張力変化 $S - (M-m)g$ (図中には単に S としている。以下同じ) については、規則波の周期と同じ周期の基本波に高調波が重畳していること、しかしその基本波と水面変動 η との間の位相関係は、規則波の周期に関係なくほぼ一定であることなどが認められる。この基本波が水面変動に対して、一定の位相を持つことは、水面変動と $\partial v / \partial t$ が丁度逆位相であるので、式 (6) の第 2 式からわかる通り、向心力および抗力が質量力に比べ無視できる程度に小さいことを示すものである。しかし水面変動の共振曲線から、アンカー糸方向の振動成分も無視できないこと

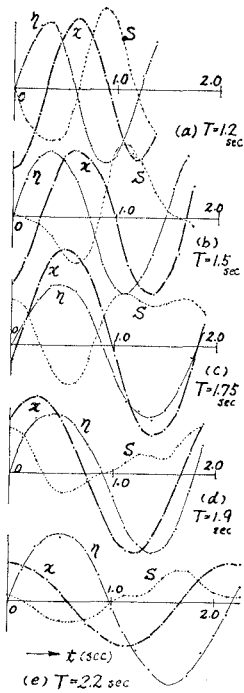


図-2 記録例: 実験 B

要素となる。これらの実験より得た球の減衰定数および固有周期 T_0 を先の表-1 に示している。

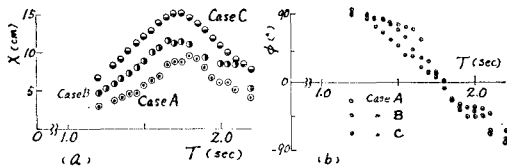
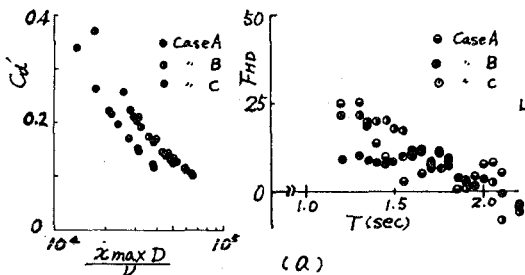


図-3 変位共振曲線・位相曲線

4. 波力に関する考察

(1) 流体抵抗力 R_H について

式 (6) より、この系の固有周期は次式で与えられる。

図-4 抗力係数 C_d'

があると判明したので、この点に関する検討はここで打切る。

先に示したような記録より、球の変位振幅 X および球変位 x と水面変動 η との位相差 ϕ を読み取り図示したのが図-3 である。球変位の波形が水面変動と同一周期を持つ正弦波とみなせたことに加え、この X の共振曲線より、ここで問題にしている海中係留球は、かなり大きい減衰を持つ 1 自由度振動系で抽象できるものと判断される。また x の η に対する位相差 ϕ は、変位共振曲線に比べ少しバラツキが目立つ。

この ϕ は、 X とともに波力を求める上で重要な

$$T_0 = 2\pi \sqrt{\frac{\alpha_m + C_m' \cdot s}{1 - \alpha_m} \cdot g} \quad \dots\dots\dots (7)$$

ここに、 $\alpha_m = m/M$ 。この T_0 を表-1 に示した固有周期 T_0 と等しいと置けば、付加質量係数 C_m' が求まる。その結果も同表に示したが、 $C_m' = 0.49$ となった。この値は静止無限流体中の振動球に対する付加質量としては、球の排除した流体質量の 1/2 を考えればよいというポテンシャル理論の結果とよく対応している。

一方、この球に働く減衰力には、抗力の他に粘性減衰力、逸散減衰力が含まれるが、ここでは球の振動周期が大きいことから、便宜的に減衰力は全て抗力によるものとする。そこで、抗力とこれに等価な線形減衰力による 1 サイクル当りのエネルギー消費を各々等しいと置くと、次式をうる²⁾。

$$\oint 2\zeta\omega_0(m + C_m'M) \frac{dx}{dt} dx = \oint C_d' \frac{w}{g} \frac{\pi R^2}{2} \frac{dx}{dt} \left| \frac{dx}{dt} \right| dx \quad \dots\dots\dots (8)$$

ここに、 $\omega_0 = 2\pi/T_0$ 。いま規則波の波高 H 、球の変位振幅 X および球変位の水面変動からの位相差 ϕ を用いて

$$\eta = H/2 \cdot e^{i\omega t} \quad \dots\dots\dots (9)$$

$$x = X e^{i(\omega t - \phi)} \quad \dots\dots\dots (10)$$

で、水面変動 η および球変位 x を表わすと、式 (8) より

$$C_d' = 2\pi\zeta(\alpha_m + C_m') \cdot (\omega_0/\omega) \cdot (R/X) \quad \dots\dots\dots (11)$$

で C_d' が求められる。ここに、 ω は規則波の円振動数。先に示した減衰定数 ζ を用いて、上式より C_d' を算出し、球の最大速度を用いて算出される Reynolds 数に対して示したのが図-4 である。この C_d' と定常流中の固定球に対する抗力係数³⁾ とを比較すると、図-4 に示した C_d' の方が、係数の値が約 1/2 と小さく、さらに Reynolds 数の増加に対し C_d' の減少の程度が大きいというように、必ずしもよく対応していない。Reynolds 数の算定にも問題はあるが、これを定常流中の固定球に作用する抗力と比較することに、大きな問題があるように思われる。

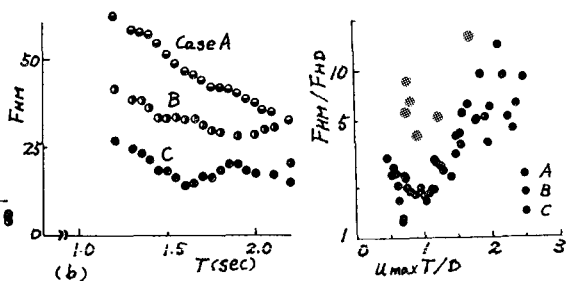
図-5 波力 $F_{HD} \cdot F_{HM}$

図-6 質量力と抗力の比

以上のようにして得られた流体抵抗力 R_H の球変位に対する位相を調べると、 $160^\circ \sim 170^\circ$ 進んでいることが容易に認められる。この点をさらに詳細に考察するには、静止流体中の振動球を用いて、直接 R_H を求めることが必要となる。

(2) 波力 F_H について

以上により、式(6)第1式の左辺各係数が全て決定できたので、式(10)に示した球変位 x を用いて、式(6)の左辺の実数部 F_{HD} および虚数部 F_{HM} を求めると

$$\left. \begin{aligned} F_{HD} &= MX\omega_0^2(\alpha_m + C_m') \\ &\quad \cdot [(1 - \alpha_\omega^2)\cos\phi + 2\zeta\alpha_\omega\sin\phi] \\ F_{HM} &= MX\omega_0^2(\alpha_m + C_m') \\ &\quad \cdot [(1 - \alpha_\omega^2)\sin\phi - 2\zeta\alpha_\omega\cos\phi] \end{aligned} \right\} \dots(12)$$

となる。ここに、 $\alpha_\omega = \omega/\omega_0$ 。この F_{HD} および F_{HM} は、波力の η 成分および η より 90° 位相の進んだ成分で、各々抗力および質量力である。これらと同式右辺を比較して、

$$\left. \begin{aligned} C_d &= \frac{32}{3} \frac{RX}{H^2} \frac{\sinh^2 kh}{\cosh^2 ks} (\alpha_m + C_m') \\ &\quad \cdot \left(\frac{1 - \alpha_\omega^2}{\alpha_\omega^2} \cos\phi + 2\zeta \frac{1}{\alpha_\omega} \sin\phi \right) \\ C_m &= \frac{2X}{H} \frac{\sinh kh}{\cosh ks} (\alpha_m + C_m') \\ &\quad \cdot \left(\frac{1 - \alpha_\omega^2}{\alpha_\omega^2} \sin\phi - 2\zeta \frac{1}{\alpha_\omega} \cos\phi \right) \end{aligned} \right\} \dots(13)$$

の如く、波力係数 C_d 、 C_m が算出できる。ここに、 k は波数である。なお上式では、規則波を微小振幅波としている。式(12)より求めた抗力 F_{HD} および質量力 F_{HM} を規則波の周期 T に対して示したのが図-5であり、また質量力と抗力の比を $u_{\max} T/D$ (以下 KC 数という) に対して示したのが図-6である。まずこれらの図によると、全般的にバラツキが目立つものの*、全体としては F_{HD} 、 F_{HM} とも規則波の周期の増加に対して減少する傾向にあること、とくに F_{HD} は一部負になることもあること等が指摘できる。さらに波高と質量力 F_{HM} の間には、大略比例関係のあることが認められるが、抗力 F_{HD} との間には明瞭な関係はない。一方これら波力 F_{HM} と F_{HD} の比は、特にバラツキの大きい $2 \sim 3$ 点(図には薄くプロットした)を除けば、明らかに KC 数の増加に対し当初減少し、最小値を取って、その後増加する傾向にある。これは抗力が相対的に大きくなるのは、特定の KC 数の場合で、一般的には質量力が卓越するものと理解できる。つぎに式(13)から、質量力係数 C_m 、抗力係数 C_d を求め、 KC 数に対して示したのが、図-7である。なおこの場合、 $u_{\max}$ を用いた Reynolds 数は、実験 A で約 5×10^3 、B で約 9×10^3 および C で

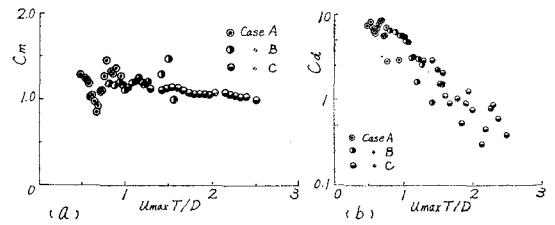


図-7 質量力係数 C_m 、抗力係数 C_d

約 15×10^3 であることを参考のため付記しておく。同図(a)によると質量力係数 C_m は、 KC 数に関係なく、ほとんど一定で $C_m = 1.1$ 程度である。これに反し、同図(b)によると、この実験の範囲では、 C_d は KC 数に対し急激に減少する傾向にある。

(3) 相対速度に対する波力について

波浪によって運動する海洋構造物の応答計算に際し、いわゆる外力(波力)を、水粒子速度と構造物のたわみあるいは変位速度との相対速度を用いて、Morison 式より求めるという試みが散見されるが、以下に本実験結果を用いてこの点を検討する。この場合、式(6)は次式のように変形されることになる*。

$$\begin{aligned} (m + C_m' M) \frac{d^2 x}{dt^2} + \frac{(M - m)g}{s} x \\ = C_m M \frac{\partial u}{\partial t} + C_d'' \frac{3M}{8R} \left(u - \frac{dx}{dt} \right) \left| u - \frac{dx}{dt} \right| \end{aligned} \dots(14)$$

上式に対し、先に示したとほとんど同様な演算を行うが、この場合は両辺の絶対値および位相を同時に等しくすることは不可能であるので、ここでは絶対値のみを等置して、相対速度に対する抗力係数 C_d'' を算定した。その結果が図-8で、 $C_m = 1.0$ として算出した。またこの図では、最大相対速度に対する KC 数を用いているが、この速度に対する Reynolds 数は $1.2 \sim 6.5 \times 10^4$ であった。同図によると、抗力係数 C_d'' は KC 数の小さい場合を除き、 $0.2 \sim 0.3$ であり、これは同程度の速度を持つ定常流中にある固定球に対する抗力係数に比べると、約 $1/2$ となっている。しかし図-9に示すように、

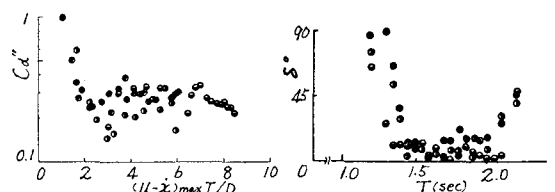


図-8 抗力係数 C_d''

図-9 P に対する F_{HD}' の位相

* 波力のバラツキの原因に、波高の不同の他に、記録より位相差を読み取る上でのバラツキも大きな要因であると考えられる。

* この場合も簡単にするために、粘性減衰、逸散減衰等を無視する。

