

波による円筒形浮体の運動

渡 辺 晃*

1. 緒 言

浮遊式海洋構造物を適切に設計するためには、構造物に作用する流体力、構造物の応答、周辺水面への擾乱等を正しく評価しなければならない。波の作用下での浮体の運動に対する従来の理論的解析手法は、大きく2つに分類されよう。第一の手法は作用波力をモリソン公式で評価するもので、取扱い簡単で複雑な形状の浮体にも形式的には容易に応用し得るが、抗力係数のみならず質量係数の値を与える必要があり、それらの係数の選び方に困難さがある。他方、いわゆる回折理論による扱いでは、慣性力項は厳密に扱われるが、粘性に起因する抗力項が無視されるため、特に共振条件の近傍で浮体運動が過大評価されるという欠点があった。

著者らはこれまで円筒形浮体を対象に回折理論による研究を進め^{1)~3)}、抗力の影響についても多少の検討を加えた³⁾。本研究では、回折理論に非線形抗力項を導入することを試み、若干の成果が得られたので以下に報告する。

2. 回折理論への抗力の導入

ここでは進行波のもとにおかれた円筒形浮体のみを扱う。波および浮体運動は微小であると仮定し、2 次以上の微小項は省略するが、後述するように抗力項は速度の2 乗に比例する形で導入する。抗力項の導入以外の理論的扱いは文献 1), 3) に紹介してあるが、便宜上その概略も含めて説明する。ただし各種記号の定義はここでは省略したものも多いので、これらの文献を参照されたい。

(1) 回折散乱波の速度ポテンシャル

図-1 に示すばね係留円筒浮体を考える。粘性に起因する抗力は考えるが、波運動そのものは非回転として扱う。入射波の水面形を $\zeta_0 e^{i(kx - \omega t)}$ 、浮体重心 (x_0, z_0) の静止位置 $(0, z_0)$ からの水平および鉛直変位と回転角 δ の振幅をそれぞれ ξ , η , ω とすると、

$$x_0 = \xi e^{-i\omega t}, \quad z_0 = z_0 + \eta e^{-i\omega t}, \quad \delta = \omega e^{-i\omega t} \dots (1)$$

となり、水面、水底および浮体底面での境界条件を満足

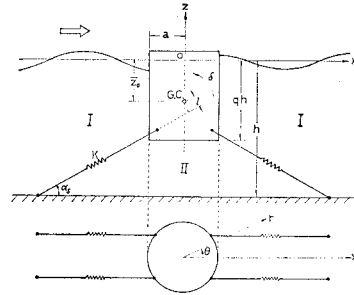


図-1 ばね係留円筒浮体

する速度ポテンシャル $\Phi = \phi(r, \theta, z)e^{-i\omega t}$ は、外部域 I ($r > a$) および内部域 II ($r < a$) に対して、それぞれ次式で表わせる。

$$\begin{aligned} \phi_I = & \sum_{m=0}^{\infty} \cos m\theta \left[\left\{ A_m \frac{J_m(kr)}{J_m(ka)} + B_m \frac{H_m(kr)}{H_m(ka)} \right\} \right. \\ & \times \frac{\cosh k(z+h)}{\cosh kh} + \sum_{n=1}^{\infty} C_{nm} \frac{K_m(k_n r)}{K_m(k_n a)} \\ & \left. \times \frac{\cos k_n(z+h)}{\cos k_n h} \right] \dots \dots \dots (2) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \phi_{II} = & \sum_{m=0}^{\infty} \cos m\theta \left[D_{0m} \left(\frac{r}{a} \right)^m + \sum_{l=1}^{\infty} D_{lm} \frac{I_m(\kappa_l r)}{I_m(\kappa_l a)} \right. \\ & \times \cos \kappa_l(z+qh) \left. - \frac{i\sigma}{2qh} \left[\eta \left\{ (z+h)^2 - \frac{1}{2}r^2 \right\} \right. \right. \\ & \left. \left. + \omega r \cos \theta \left\{ (z+h)^2 - \frac{1}{4}r^2 \right\} \right] \right] \dots \dots \dots (3) \end{aligned}$$

ここで J_m , H_m , I_m , K_m はそれぞれ Bessel 関数, 第 1 種 Hankel 関数, 第 1 種および第 2 種の変形 Bessel 関数であり、

$$A_m = -i \frac{g\zeta_0}{\sigma} \varepsilon_m J_m(ka), \quad \varepsilon_m = \begin{cases} 1 & (m=0) \\ 2im & (m \geq 1) \end{cases} \dots \dots \dots (4)$$

$$\sigma^2 h / g = kh \tanh kh = -k_n h \tan k_n h \dots \dots \dots (5)$$

なる関数式が成立する。

(2) 浮体に作用する外力

a) 慣性力とトルク

浮体に作用する圧力 $p = -\rho \partial \Phi / \partial t - \rho g z$ をその表面に沿って積分することにより、慣性力の水平成分 F_{Ix} , 鉛直

成分 F_{Ix} およびトルク T_I は、以下のように与えられる。

$$F_{Ix} = -i\pi\rho a q h \sigma \left[f_0(A_1 + B_1) + \sum_{n=1}^{\infty} f_n C_{n1} \right] e^{-i\sigma t} \quad \dots\dots\dots (6)$$

$$F_{Iz} = \pi \rho a^2 \sigma \left[i \sum_{l=0}^{\infty} L_{0l} D_{l0} - \sigma \eta h \left(q + \frac{1}{\alpha} \right) \right] e^{-i\sigma t} + Mg \quad \dots\dots\dots (7)$$

$$T_I = \frac{\pi \rho a^3 \sigma}{4} \left[i \left\{ g_0(A_1 + B_1) + \sum_{n=1}^{\infty} g_n C_{n1} + \sum_{l=0}^{\infty} L_{1l} D_{l1} \right\} - a h \omega \sigma (\gamma q + 1/\beta) \right] e^{-i\sigma t} \dots\dots\dots (8)$$

b) 抗力とトルク

流体の粘性に起因する抗力は次式のように、水粒子と浮体の相対速度 V の2乗に比例する形で、抗力係数 C_D と投影面積 S を用いて与える。

$$F_D = C_D \rho S V |V|/2 \quad \dots\dots\dots (9)$$

相対速度 V の複素振幅 $U = u - v$ ($V = U e^{-i\sigma t}$) を用い、 $|V|$ をその Fourier 展開の第1項で近似すれば、

$$F_D = (4/3\pi) C_D \rho S (u - v) |u - v| e^{-i\sigma t} \dots\dots\dots (10)$$

となる。 u と v は流速および浮体速度の複素振幅であり、一般に位相差を有する。

このような抗力項を回折理論に導入して問題を解くためには、物理的意味を考慮しながら、できるだけ簡単な形で u と v を与える必要がある。抗力係数はこれまで種々の物体形状について、一方向流れや波運動条件下で実験的に評価されてきたが、その際水粒子速度としては、物体が存在しないとした時の値が用いられてきた。したがって、式(10)中の u としては入射波による水粒子速度を用いることが妥当と考えられる。

このような考えに基づき、水平抗力 F_{Dx} に関しては、浮体中心軸位置での入射波による水平流速を吃水深にわたり平均したものを u とし、 v は浮体重心の水平速度で代表すれば、水平方向の抗力係数を C_{Dx} として、

$$F_{Dx} = -(8i/3\pi) \rho a q h \sigma^2 \zeta_0^2 C_{Dx} \times (W_x - C_x) |W_x - C_x| e^{-i\sigma t} \dots\dots\dots (11)$$

$$W_x = i g \lambda_0 f_0 / \sigma^2 h, \quad C_x = \xi / \zeta_0 \quad \dots\dots\dots (12)$$

となり、鉛直抗力 F_{Dz} は、 u , v として浮体底面での平均鉛直流速および浮体鉛直速度を用いることにより、

$$F_{Dz} = -(4i/3) \rho a^2 \sigma^2 \zeta_0^2 C_{Dz} \times (W_z - C_z) |W_z - C_z| e^{-i\sigma t} \dots\dots\dots (13)$$

$$W_z = g \lambda_0 \sinh \lambda_0 / \sigma^2 h \cosh \lambda_0, \quad C_z = \eta / \zeta_0 \quad \dots\dots\dots (14)$$

と表わされる。

抗力に基づくトルクは、相対速度の水平成分 $u_x - v_x$ と、鉛直成分 $u_z - v_z$ により生じる。中心軸位置での入射波水平流速を u_x 、底面での鉛直流速を u_z として用い、

浮体の中心軸各高さでの水平速度を v_x 、底面各点での鉛直速度を v_z とする。ただし浮体の平行移動の寄与は無視し、回転運動による水平・鉛直速度のみを v_x , v_z として考えることにすれば、トルク T_D は次式で与えられる。

$$T_D = \frac{8i}{3\pi} \rho a \sigma^2 \zeta_0^2 \left[(q h)^2 C_{Dx} \int_{-1}^0 P_x |P_x| \left(y - \frac{\bar{z}_0}{q h} \right) dy - a^2 C_{Dz} \int_0^\pi P_z |P_z| \cos \theta \sin^2 \theta d\theta \right] e^{-i\sigma t} \dots\dots\dots (15)$$

$$P_x = \frac{i g \lambda_0}{\sigma^2 h} \frac{\cosh(1 + q y) \lambda_0}{\cosh \lambda_0} + C_\delta \frac{q h}{a} \left(y - \frac{\bar{z}_0}{q h} \right) \left. \vphantom{\frac{i g \lambda_0}{\sigma^2 h}} \right\}$$

$$P_z = W_z e^{i k a \cos \theta} - C_\delta \cos \theta, \quad C_\delta = \omega a / \zeta_0 \quad \dots\dots\dots (16)$$

c) ばねによる拘束力およびトルク

図-1に示すように、ばね定数 K のばねにより左右それぞれ2点で係留角 α_s をなして対称に係留した場合を考えると、浮体運動に及ぼす拘束力およびトルクは、それぞれ次式で表示できる。

$$F_{Sx} = -4K(\xi \cos^2 \alpha_s + \omega l \cos \alpha_s) e^{-i\sigma t} \dots\dots\dots (17)$$

$$F_{Sz} = -4K\eta \sin^2 \alpha_s e^{-i\sigma t} \dots\dots\dots (18)$$

$$T_S = -4K(\xi l \cos \alpha_s + \omega l^2) e^{-i\sigma t} \dots\dots\dots (19)$$

(3) 浮体の運動方程式

質量 M 、慣性モーメント I の浮体の運動方程式は、以上の作用外力を用いて次のように表わせる。

$$\left. \begin{aligned} M d^2 x_0 / dt^2 &= F_{Ix} + F_{Dx} + F_{Sx} \\ M d^2 z_0 / dt^2 &= F_{Iz} + F_{Dz} + F_{Sz} - Mg \\ I d^2 \delta / dt^2 &= T_I + T_D + T_S \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (20)$$

式(6)~(8), (11), (13), (15), (17)~(19)をこの式に代入し、浮体運動の無次元複素振幅、

$$\left. \begin{aligned} C_x &= A_x e^{i\beta_x} = \xi / \zeta_0 \\ C_z &= A_z e^{i\beta_z} = \eta / \zeta_0 \\ C_\delta &= A_\delta e^{i\beta_\delta} = \omega a / \zeta_0 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (21)$$

を用いれば、最終的に浮体の運動方程式は次式のように変形される。

$$C_x - \alpha_x F_x = 0 \quad \dots\dots\dots (22)$$

$$C_x - \alpha_{xx} F_x - \alpha_{x\delta} F_\delta = 0 \quad \dots\dots\dots (23)$$

$$C_\delta - \alpha_{\delta x} F_x - \alpha_{\delta\delta} F_\delta = 0 \quad \dots\dots\dots (24)$$

ここで、

$$\left. \begin{aligned} F_x &= (1/q G_0) \sum_{l=0}^{\infty} L_{0l} D'_{l0} + f_{Dx} \\ F_x &= (i h / a G_1) \left[f_0 (1 + B'_1) + \sum_{n=1}^{\infty} f_n C'_{n1} \right] - f_{Dx} \\ F_\delta &= (i / q G_1) \left[g_0 (1 + B'_1) + \sum_{n=1}^{\infty} g_n C'_{n1} + \sum_{l=0}^{\infty} L_{1l} D'_{l1} \right] + f_{DT} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (25)$$

$$\left. \begin{aligned} f_{Dz} &= -(4i/3\pi q)(\zeta_0/h)C_{Dz}(W_z - C_z)|W_z - C_z| \\ f_{Dx} &= -(8i/3\pi^2)(\zeta_0/a)C_{Dx}(W_x - C_x)|W_x - C_x| \\ f_{D\tau} &= \frac{32i}{3\pi^2} \left\{ \frac{qh}{a^2} \zeta_0 C_{Dx} \int_{-1}^0 P_x |P_x| \left(y - \frac{\bar{z}_0}{qh} \right) dy \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{qh} \zeta_0 C_{Dz} \int_0^\pi P_z |P_z| \cos \theta \sin^2 \theta d\theta \right\} \end{aligned} \right\} \quad (26)$$

$$\left. \begin{aligned} \alpha_z &= (1/\alpha q + K^* \sin^2 \alpha_s)^{-1}, \quad \alpha_{xz} = \beta_{xz}/\Delta \\ \alpha_{x\delta} &= \beta_{x\delta}/\Delta, \quad \alpha_{\delta x} = \beta_{\delta x}/\Delta, \quad \alpha_{\delta\delta} = \beta_{\delta\delta}/\Delta \\ \beta_{xx} &= 1/\beta q + 4K^* l^*{}^2, \quad \beta_{x\delta} = K^* l^* \cos \alpha_s \\ \beta_{\delta x} &= -4K^* l^* \cos \alpha_s, \quad \beta_{\delta\delta} = 1 - K^* \cos^2 \alpha_s \\ \Delta &= \beta_{xx} \cdot \beta_{\delta\delta} - \beta_{x\delta} \cdot \beta_{\delta x} \end{aligned} \right\} \quad (27)$$

$$K^* = 4K/\pi \rho a^2 q h \sigma^2, \quad l^* = l/a \quad (28)$$

$$G_0 = \sigma^2 h / g J_0(ka), \quad G_1 = \sigma^2 h / 2g J_1(ka) \quad (29)$$

$$B'_m = B_m/A_m, \quad C'_{nm} = C_{nm}/A_m, \quad D'_{lm} = D_{lm}/A_m \quad (30)$$

(4) 領域 I, II の接続方程式

浮体側面で垂直流速が浮体の速度と一致することと、領域 I, II 間で圧力と流速が連続することから (文献 1 参照), 次の接続方程式が求まる。

$$\left. \begin{aligned} Q_{0m} B'_m - \sum_{l=0}^{\infty} S_{0lm} D'_{lm} \\ = -P_{00} - b_0 G_0 C_z \quad (m=0) \\ = -P_{01} - iG_1 \left(\frac{a}{h} a_0 C_x + c_0 C_\delta \right) \quad (m=1) \end{aligned} \right\} \quad (31)$$

$$\left. \begin{aligned} P_{nm} C'_{nm} - \sum_{l=0}^{\infty} S_{nlm} D'_{lm} \\ = -b_n G_0 C_z \quad (m=0) \\ = -iG_1 \left(\frac{a}{h} a_n C_x + c_n C_\delta \right) \quad (m=1) \end{aligned} \right\} \quad (32)$$

$$\left. \begin{aligned} R_{0l} B'_m + \sum_{n=1}^{\infty} R_{nl} C'_{nm} - D'_{lm} \\ = -R_{0l} + d_l G_0 C_z \quad (m=0) \\ = -R_{0l} - i e_l G_1 C_\delta \quad (m=1) \end{aligned} \right\} \quad (33)$$

3. 解法と計算結果

(1) 計算の方法

浮体の運動方程式 (22)~(24) と接続方程式 (31)~(33) は、浮体運動の複素振幅 C_x , C_z , C_δ およびポテンシャル係数 B'_m , C'_{nm} , D'_{lm} ($m=0,1$; $n=1,2,\dots$; $l=0,1,2,\dots$) を未知量とする連立方程式を構成する。鉛直運動は $m=0$ の方程式群, 水平・回転運動は連成して $m=1$ の方程式群に支配される。なお浮体周辺の水面擾乱を求めるためには更に $m \geq 2$ の式が必要となるが, 文献 1) の式 (19)~(21) をそのまま用いてよい。

これらの方程式群は l, n に対する無限級数を含むが, 以下の計算では解の収束性から判断して l, n 共に第 10 項までで切った。

さて, 運動方程式 (22)~(24) は抗力に関する非線形項を含むので, これらの連立方程式を通常の直接消去法等で解くことはできない。種々の試みの結果, ニュートン法による繰返し計算が最も効率的であると思われる。例えば鉛直運動に対しては, 非線形運動方程式 (22) および $m=0$ に対する接続方程式を解かなければならない。式 (22) の左辺を $F(C_z)$ で表わせれば, C_z の第 $j+1$ 近似値 C_z^{j+1} はニュートン法を用いて,

$$C_z^{j+1} = C_z^j - \frac{C_z^j - C_z^{j-1}}{F(C_z^j) - F(C_z^{j-1})} \cdot F(C_z^j) \quad (34)$$

で与えられるので, 所要の精度が得られるまで繰返せばよい。ただしこの繰返し計算の過程で, 各近似での C_z を与えて接続方程式によりポテンシャルの係数値を求め, 求まった D'_{l0} を $F(C_z)$ の計算に用いる必要がある。接続方程式群は線形であるので通常の消去法等で簡単に解ける。なお, 抗力を無視すれば全体の方程式系が線形になるので同様に容易に解くことができ, その解を上記の繰返し計算の第 1 近似値として用いることになる。

水平・回転運動は連成しているのでやや複雑であるが, 一般化されたニュートン法を利用することができ。式 (22)~(24) 中の非線形項は複素数の絶対値を含むので正則ではないが, 実際には特異性は極めて弱く, ニュートン法による数回の繰返しで所要の精度 (複素振幅の絶対値および偏角の絶対誤差で 0.001) の解が求まった。

(2) 計算結果および考察

本論文の理論の妥当性を検討するために, 先に報告した自由円筒および係留円筒浮体の実験データ^{2),3)}を理論計算値と比較する。以下の計算における抗力係数としては, 水平・鉛直方向共に 1.0 を用いた。

図 2~5 は自由円筒浮体について, その水平・鉛直・

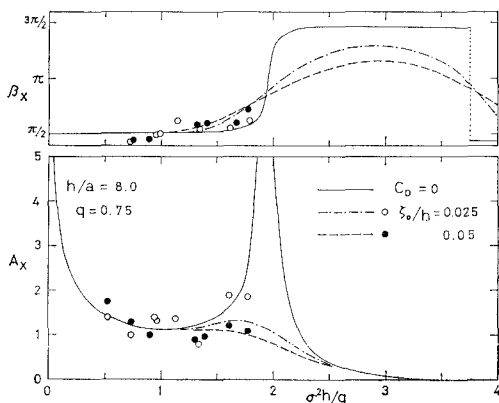


図 2 自由円筒浮体の水平運動

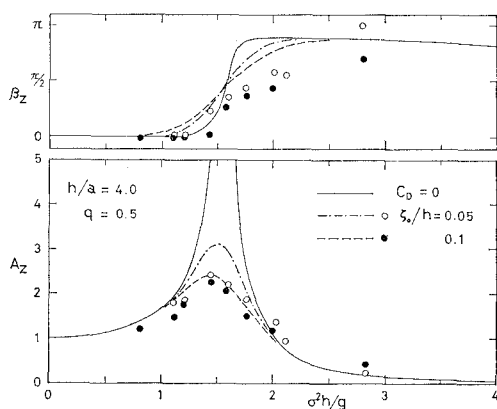


図-3 自由円筒浮体の鉛直運動 (1)

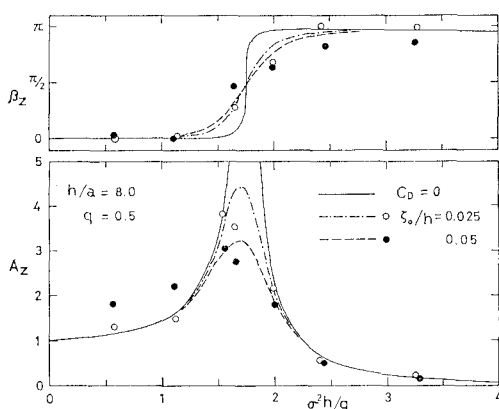


図-4 自由円筒浮体の鉛直運動 (2)

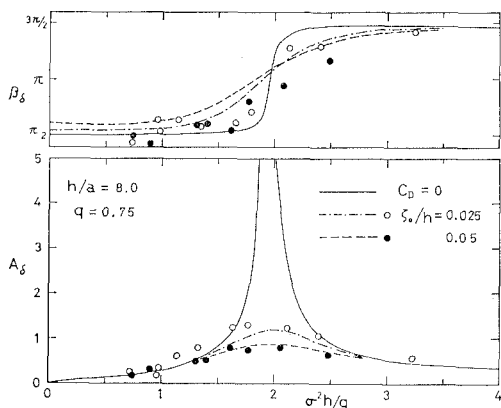


図-5 自由円筒浮体の回転運動

回転運動の振幅を入射波振幅を用いて無次元化した値 A_x, A_z, A_δ および入射波に対する位相角 $\beta_x, \beta_z, \beta_\delta$ を、深海波長を用いた相対水深に比例する無次元量 $\sigma^2 h/g$ に対してプロットしたものである。実線は抗力を無視した従来の回折理論値、一点鎖線と破線は抗力を考慮した本論文の計算法によるものである。

実験データが少ない上にそのばらつきが大きいこともあって明確な結論は得られないが、従来の回折理論では極端に過大評価されていた各運動の共振点付近の振幅が、新しい理論解ではかなり精度よく推算されることがわかる。また入射波振幅と水深の比 ζ_0/h が増加するにつれて、無次元運動振幅のピーク値が減少し、同時に位相角の変化が緩やかになるという傾向も、抗力を考慮した理論解によりよく表わされている。

今回の計算では抗力係数として 1.0 を用いたが、理論式からわかるように抗力係数 C_D は常に入射波振幅 ζ_0 との積の形で表われる。 $h/a=8$ の場合について、 $C_D \zeta_0/h$ の増加に伴う各運動振幅のピーク値 $\hat{A}_x, \hat{A}_z, \hat{A}_\delta$ の減少をもう少し詳しく示したのが図-6 である。文献 3) に示した近似理論に基づく扱いでは、鉛直運動のピーク値が $C_D \zeta_0/h$ の $-1/2$ 乗に比例するという結論が得られていたが、図-6 はそれがほぼ成立することを示している。

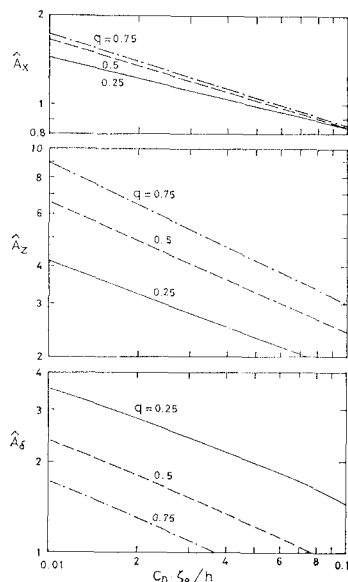


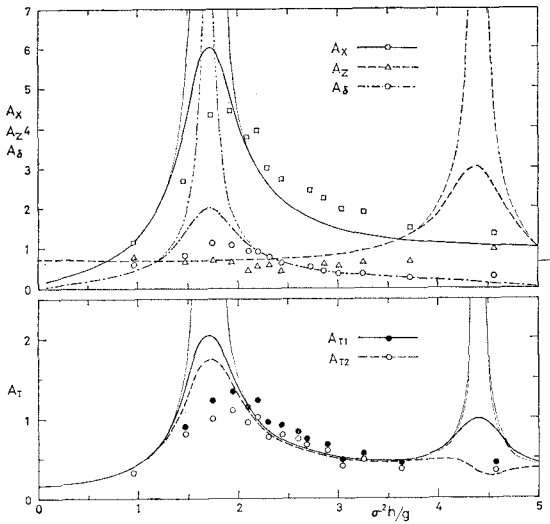
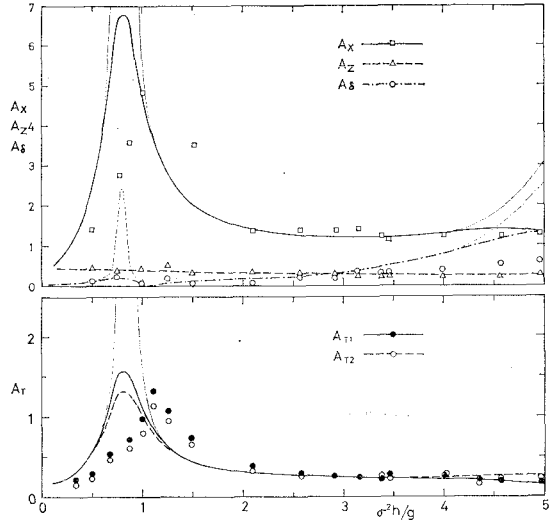
図-6 入射波振幅による運動ピーク値の変化

図-7, 8 は同様の比較を係留円筒浮体について行なったものであり、係留索張力の振幅 T を無次元化した値、

$$A_T = T / \pi \rho g a^2 \zeta_0 \dots \dots \dots (35)$$

も沖側索 (A_{T1})、岸側索 (A_{T2}) のそれぞれについて示してある (図中の細線は抗力を無視した理論解)。

各振幅のピーク値および対応する $\sigma^2 h/g$ の値共に、実験値との一致は充分とはいえず、特に共振の生じる周波数の理論値と実験値の差異の理由は明らかでない。しかしながら従来の回折理論が与えるピーク値に比して、かなり適切な値が得られることがわかる。また抗力を無視

図-7 係留円筒浮体の運動と索張力 ($\alpha_s=30^\circ$)図-8 係留円筒浮体の運動と索張力 ($\alpha_s=60^\circ$)

した理論では明確でなかった沖側と岸側の索張力の相違が、抗力を考慮することにより理論値にも明瞭にあらわれてくる。これは水平・鉛直・回転の各運動間の位相差が変化することによる。

4. 結 語

波運動下の円筒形浮体の挙動に関し、従来の回折理論に非線形抗力項を導入することを試み、その解析手法ならびに実験値との比較を示した。本理論により実測データを完全に説明することはまだできないが、その可能性は強まったといえよう。

今後に残された問題としては、1) より精度の高い実験データを増すことにより更に厳密に理論解を検討すること、2) 抗力係数の値を検討し、浮体底端のエンド効

果を考慮すること、3) トルクの抗力成分で無視した鉛直・水平運動の寄与を考慮すること、4) 係留浮体の場合、索に働く流体力を評価することなどが、直接延長上にある。より複雑な形状の浮体構造物について解析することは次のステップである。

参 考 文 献

- 1) 堀川清司・渡辺 晃：円筒形浮体と浅海波の相互作用，第19回海講論文集，pp. 419-425, 1972.
- 2) 堀川清司・渡辺 晃・山田恭央：浅海波による円筒形浮体の運動，第28回年講講演集，pp. 35-36, 1973.
- 3) 堀川清司・渡辺 晃・丸山康樹：係留円筒浮体の応答特性と索張力，第21回海講論文集，pp. 507-513, 1974.