

孤立性段波のえりわけ距離に関する研究

岩崎敏夫*・首藤伸夫*・鈴木義和**・栗田 悟***

1. はじめに

孤立性段波の変形過程については、発生ソリトン数、先導ソリトンの波高増加率、砕波条件、砕波後の波高変化などは理論的によく説明できることを実験によって示したり^{1,2)}が、後続波の整列過程や砕波後にふたたび波形を整える過程など未解決な問題も残されている。なかんづく、分裂の過程で波がどの程度の距離を伝播すれば有意であるような波高増加が起こるかを調べることは津波防災上も意義のあることであろう。Hammack³⁾は、初期波が完全にソリトンに分裂するまでの水平距離として sorting distance を定義した。また、長島⁴⁾も別に初期波からの分裂の時間（水平）スケールを提案しているが、これも初期波が完全に分裂するまでを定義している。本研究では、分散効果による波高増加に着目し波高増加が有意となる地点を指し示す水平スケールを提案する。さらに、その水平スケールを現実の湾に適用し津波問題を考察する。また、固有値問題を解くことにより $K-dV$ ソリトンの波高が求まるが、モデル波を入力してその結果について考察した。

2. 水理実験方法

使用した水路は、全長 100 m、幅 1.0 m、水路高は延長 20 m の低水路部分が 1.0 m、79.5 m の高水路部分が 0.5 m でその間の 0.5 m を 45 度の斜面で接続した二次元水路である。水路底は水平である。造波方式は造波板を水路方向に 1 回限り移動させるものである。造波パラメータは、造波板移動距離 (Stroke; St)、造波板移動速度 (Speed; Sp) である。今回は、St は 0.1, 0.2, 0.5, 1.0, 1.5, 2.0 m で、Speed は制御盤目盛で 20, 30, 40, 50 である。Sp の目盛に対する造波板の平均移動速度は、およそ 9 cm/sec ~ 20 cm/sec である。X 方向の原点は、特にことわらない限り水路端より 23 m の地点にとっている。測定地点は、X 方向の原点より最大波高を過ぎるまでを、1 m または 2 m ごとに選び、それ以降は任意の地

点で分裂後の状況を測定した。水深は 15, 20 cm について実験を行った。

3. Sorting distance の定義

Sorting distance とは、分散効果による波高増加を考慮する際の水平スケールとなるもので、その定義として以下の 4 種類を挙げる。

Hammack³⁾ は波高 H_0 の初期波から生じる最大波高のソリトンと最小波高のソリトンがある距離 l だけ離れる時間として $t_s = (h/g)^{1/2} (H_0/l)^{-1}$ を考え、sorting distance (d_s) として、

$$d_s = t_s \cdot \sqrt{gh} = h(H_0/l)^{-1}$$

となり、よって

$$d_s/h = (H_0/l)^{-1}$$

と定義した。Hammack は l として初期波の波長 L_0 を選んだ。

$$d_s/h = (H_0/L_0)^{-1} \dots\dots\dots (1)$$

次に、 l として孤立波の有効波長⁵⁾ (L_{eff}) を考える。有効波長とは、孤立波の全エネルギーの 99% が含まれる範囲をいう。孤立波の波高を H_0 とすると有効波長は次式で与えられる。

$$L_{\text{eff}}/h = 3.6286(H_0/h)^{-1/2}$$

したがって、有効波長を l に用いた sorting distance は、

$$(d_s/h)_{\text{eff}} = 3.6286(H_0/h)^{-3/2} \dots\dots\dots (2)$$

となる。

次に、波高増加の影響が有意であると考えられる地点を sorting distance と定義する。

ソリトンの最大波高を H_{max} とし、波高の全増加量の 20% が有意な波高であるとみなし、次式で決まる波高 H_{20} となる地点を sorting distance d_{s20} とする。

$$(H_{20} - H_0)/(H_{\text{max}} - H_0) = 0.2 \dots\dots\dots (3)$$

また、初期波の波高が小さい場合には、最大波高も小さくその時の波高増加量の 20% といっても有意な量であるとは考えられないことが生じる。そこで、波高の増加分 $\Delta H/h = (H - H_0)/h$ が有意な量となる波高 H に達する地点を d_{s1} と定義する。

* 正会員 工博 東北大学教授 工学部土木工学科

** 正会員 工修 東京電力株式会社

*** 学生会員 東北大学大学院 工学研究科

4. 実験結果

造波された波の波高変化は、伝播するにつれてほぼ直線的に波高が増加した後、ゆるやかに最大波高に達する。ここで、直線部分に波高増加のおこる部分の勾配を波高増加率 α として次式で定義する。

$$\alpha = (H - H_0) / (X - X_0) \quad \dots\dots\dots (4)$$

ここで、 H は $X^* = X$ での波高 (X^* : 水路端からの距離), X ; 直線部分の測定点の水路端からの距離, X_0 ; 原点 ($X^* = 23$ m), H_0 ; $X^* = X_0$ での波高である。

最大波高に達した地点は、はっきりしないため、最大波高とみなせる波高 $H_{\max}$ を決定式 (4) で得られる α の勾配を持つ直線が $H_{\max}$ に達する地点を $X_{\max}$ とする (図-1 参照)。

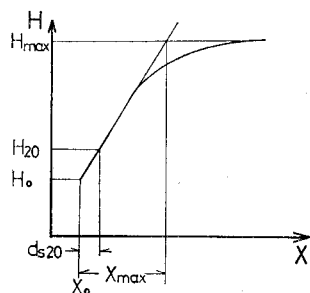


図-1 模式図

勾配 α を使えば、原点から X の距離の波高は

$$H = \alpha \cdot X + H_0 \quad \dots\dots\dots (5)$$

で表わされるので式 (3) と式 (5) を使って、 ds_{20} は次式のようになる。

$$ds_{20} = 0.2 \cdot \alpha^{-1} (H_{\max} - H_0)$$

図-2 は初期波高水深比 H_0/h に対し、波高増加率 α をプロットしたものである。图中、実線は外挿したもので、 $H_0/h < 0.1$ では波高増加はしないと仮定してある。これらは、それぞれ増加率 α の上限 α_U , 下限 α_L をなし、次式で表わされる。

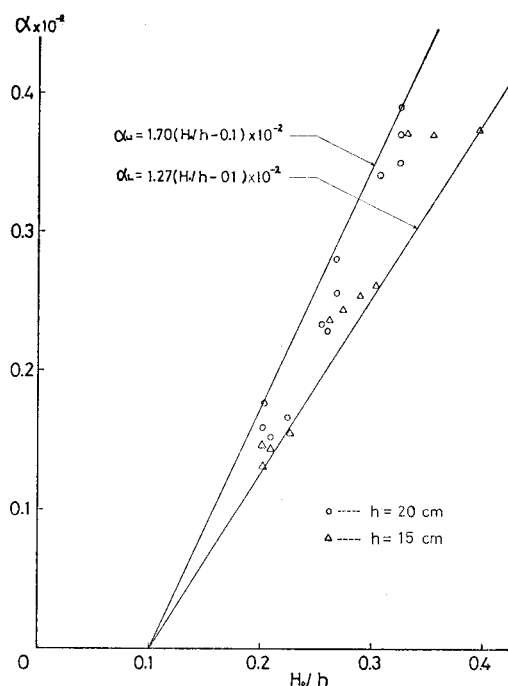
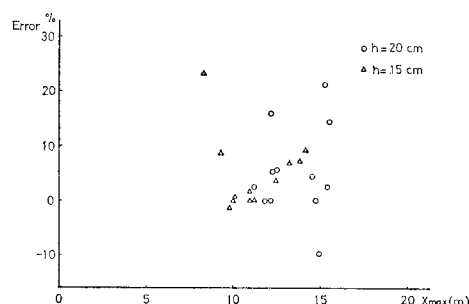
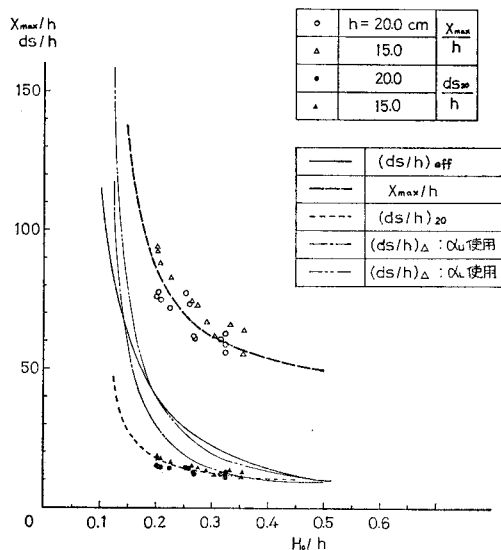
$$\left. \begin{aligned} \alpha_U &= 1.70(H_0/h - 0.1) \times 10^{-2} \\ \alpha_L &= 1.27(H_0/h - 0.1) \times 10^{-2} \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots\dots (6)$$

式 (5) より求まる波高と実際の波高の誤差は、 $X_{\max}$ で最大となる。図-3 に誤差を $E_{\text{error}} = (H_{\max} - H^*) / (H_{\max} - H_0)$ なる式で求めたものを示す。ほとんどのケースで数 % であり、波高が直線的に増加するという仮定は妥当なものである。 H^* は $X_{\max}$ における実際の波高である。このことにより、 $ds_{20} = 0.2X_{\max}$ である。

図-4 に初期波高水深比 H_0/h に対し、実験により得られた $X_{\max}/h$ と $(ds/h)_{20}$ をプロットしたものを示す。それらは、それぞれ次式で近似する。

$$X_{\max}/h = 5.0 / (H_0/h - 0.1) + 37.0 \quad \dots\dots\dots (7)$$

$$(ds/h)_{20} = 0.2X_{\max}/h \quad \dots\dots\dots (8)$$

図-2 波高増加率 α 図-3 $E_{\text{error}} \sim X_{\max}$ 図-4 $X_{\max}/h, ds/h \sim H_0/h$

図中、太い破線が式(7)で、細い破線が式(8)である。実線は、前節の2番目の定義による sorting distance $(ds/h)_{eff}$ 式(2)である。また、一点鎖線と二点鎖線は、前節の4番目の定義による sorting distance $(ds/h)_d$ である。ここで、 $\Delta H/h=0.05$ としてある。 $\Delta H/h=(H-H_0)/h$ に $\Delta H/h=0.05$ と式(5)を代入すれば、
$$(ds/h)_d=0.05/\alpha \cdots \cdots (9)$$

となる。一点鎖線は、 α に式(6)の上限値 α_U を用いたもので、二点鎖線は下限値 α_L を用いたものである。

上限値 α_U を用いた $(ds/h)_d$ と $(ds/h)_{20}$ の差は、 $H_0/h>0.3$ では10数%であるが、 H_0/h が小さくなるにつれて $(ds/h)_d$ が急激に大きくなる。これは、 $\Delta H/h$ を考慮して ds を定義した意味合いから妥当な傾向である。

また、前節の sorting distance の定義における1番目の定義は、ソリトン分裂が完全に終了するものとしての水平スケールであるので、本研究では考慮していない。

5. 現実問題への適用

津波が実際の湾へ侵入したときに、その波高はどうなるかを以上に述べた水平スケールを使って検討してみた。基本的な考え方として、外海で発生した津波の波高は湾口に達するまでグリーンの公式に従い、湾内では本研究で得られた直線関係に従うものとする。また、湾内水深は、湾口水深で一定であるとし、湾の幅を無視し湾の湾軸に沿った長さの矩形水路とする。対象とする津波の波高は、外海水深(h_0)が500mと300mにおいて、5.0、4.0、3.0、2.0、1.0mである。対象とした湾は、気仙沼湾で水深が20m、長さが10600mの矩形水路にモデル化されている。

図-5に気仙沼湾の縦断面図を、表-1に適用結果を示す。湾口波高水深比 H_0/h が0.1以下のものに対しては、本論文の前節の結果より波高増加は考慮していないので、一印で示した。 ds_U 、 ds_L は、それぞれ波高増加率 α_U 、 α_L を使って計算したものである。 H_U 、 H_L も同様に

表-1 気仙沼湾への適用例

CASE	外海波高 H_0 (m)	湾口波高 H (m)	H/h (<0.1)	ds_{20} (m)	ds_{eff} (m)	$\Delta H/h=0.05$ ds_U (m)	ds_L (m)	X_{max} (m) ($<ds_{20}/2$)	湾奥波高 H_U (m)	湾奥波高 H_L (m)	H_U/H	チェック
K-1	$l=10600$ m		$h_0=500$ m		$h=20$ m							
-1	5.0	11.18	0.559	192	174	128	172	960	18.67	16.78	1.67	◎
-2	4.0	8.94	0.447	206	243	169	227	1030	15.02	13.48	1.68	◎
-3	3.0	6.71	0.335	233	374	250	335	1165	11.36	10.19	1.69	◎
-4	2.0	4.47	0.224	309	665	474	635	1545	7.73	6.96	1.73	◎
-5	1.0	2.24	0.112	1815	1936	4900	6567	9075	4.09	3.62	1.83	◎
K-2	$l=10600$ m		$h_0=300$ m		$h=20$ m							
-1	5.0	9.84	0.492	199	210	150	201	995	16.47	14.79	1.67	◎
-2	4.0	7.87	0.394	216	293	200	268	1080	13.27	11.90	1.69	◎
-3	3.0	5.90	0.295	250	453	302	404	1250	10.04	9.00	1.70	◎
-4	2.0	3.94	0.197	354	830	606	812	1770	6.86	6.12	1.74	◎
-5	1.0	1.97	0.098	-	2366	-	-	-	-	-	-	-

α_U 、 α_L をそれぞれ使用している。また、チェック欄は、湾長を l とすると $l>X_{max}$ のときは◎、 $X_{max}>l>ds_{20}$ のとき○、 $ds_{20}>l$ のとき×である。

気仙沼湾では、図-5の縦断面図より明らかのように、長く浅い水路状である。表-1より、外海水深300m

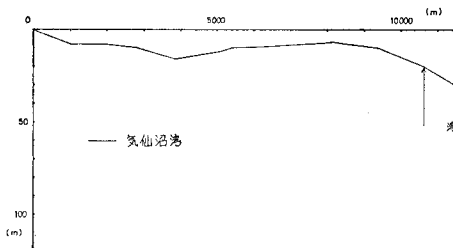


図-5 気仙沼湾縦断面図

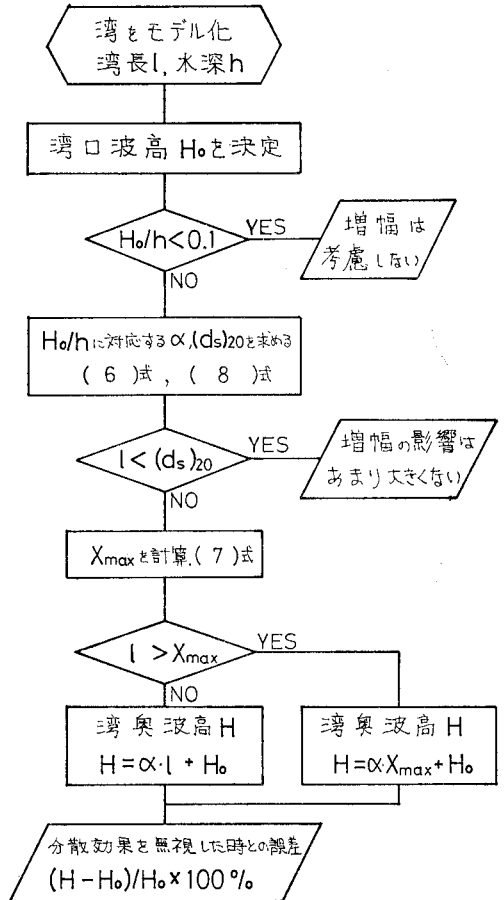


図-6 現実問題への適用のフローチャート

の外海波高 1.0 m のケースを除き、すべてのケースで $l > X_{\max}$ であり、湾内で分裂が完了することが予想される。湾内での波高増幅度 H_0/H は平均で 1.71 であり、線形の波であれば幅、水深ともに一定の水路では、波高の増加は起こらないので、71% の波高の増加が分散の効果により生ずることになる。

また、K1-1, K2-2 のケースでは湾奥での波高水深比が 0.93, 0.83 で、限界波高水深比より大きいので砕波が生じることが予想される。

図-6 に、現実問題へ適用した手順を示すフローチャートを掲げておく。

6. 固有値問題によるソリトン波高の計算

$K-dV$ 方程式は、若干の変換を行って Schrödinger 方程式の固有値問題に関係づけられ、その固有値問題を解くことにより、ソリトンの波高が求められる。さきに Rayleigh-Ritz の方法（以下 R-R 法という）を用いて得た波高と実験値を比較したが、今回は、R-R 法と Galerkin の方法（以下 G 法）により、モデル波を入力して、1st ソリトンの波高増加について検討した。

R-R 法では試験関数 ϕ の展開は以下の式で行った。

$$\phi = \phi_0 + a_1\phi_1 + a_2\phi_2 + a_3\phi_3 + a_4\phi_4 \dots \dots \dots (10)$$

ここで、 $\phi_n(x) = \{2^n n! \pi^{1/2}\}^{-1/2} H_n(x) e^{-x^2/2}$

$$H_n(x) = (-1)^n e^{x^2} d^n e^{-x^2} / dx^n$$

である。

また、G 法では第 $(2n-1)$ 固有値に対しては、境界条件 $x \rightarrow \pm\infty$ で $\phi \rightarrow 0$ を満足する偶関数として

$$\phi = \phi_0(a_1 + a_2 x^2) \dots \dots \dots (11)$$

であり、第 $2n$ 固有値に対しては境界条件を満足する奇関数として次式を与えた。

$$\phi = \phi_0(a_1 x + a_2 x^3) \dots \dots \dots (12)$$

第 1 固有値に対しては、両法とも 2% 程度の誤差で得られたが、第 2 固有値については十分な精度が得られなかった。

入力したモデル波は、次式で与えられる $\sin^2$ 形の波と $\tanh$ 形の波⁶⁾である。

$$\eta = H \sin^2 \pi X / L \dots \dots \dots (13)$$

$$\left. \begin{aligned} \eta &= 0.5H \{1 - \tanh(X \cdot A^{-1} + 2.5)\} \\ &\quad - (2.5A + X_0) \leq X \leq 0 \\ &= 0.5H \{1 + \tanh\{2(2.5A + X_0)A^{-1} \\ &\quad + X \cdot A^{-1} - 2.5\}\} \\ &\quad - 2(2.5A + X_0) \leq X \leq -(2.5A + X_0) \end{aligned} \right\} \dots (14)$$

ここで、 X_0 : 波形の変曲点から対称軸までの距離

A : 波前面の勾配を決定するパラメータ

である。

図-7 は、 $\sin^2$ 波の初期波高水深比 H_0/h が 0.25 で周期の異なる場合に 1st ソリトンの波高が、初期波高の

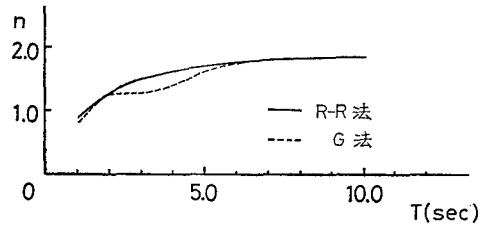


図-7 $\sin^2$ 波の増幅度

何倍になるかを示したものである。ここでの周期とは、時間波形における静水面の立ち上りから、再び静面水を横切るまでの長さである。周期 T が $2.0 < T < 6.0$ sec では、G 法の増幅度 n が R-R 法より小さくなっている。G 法の試験関数が、式 (11)、式 (12) に示したように 2 項だけのためと思われる。また、 $T=1$ sec 増幅度が 1 以下となっているが、これは次のように考えられる。Schrödinger 方程式の固有値はポテンシャルが sech^2 形の時に次式で与えられる。

$$\lambda = -0.25\alpha^2 [-(1+2n) + (1+4U_0/\alpha^2)^{1/2}]$$

ここで、 $\alpha = c[U_0/2]^{1/2}$ であり、 U_0 は初期波の波高である。 $c > 1$ では、 $2|\lambda| < U_0$ なる固有値が 1 つ求まることがわかっているが、その波形は孤立波より急である。よって、波長を有効波長で考えると、初期波の波長が同じ波高の孤立波の有効波長より短いときは、 U_0 より小さい波高のソリトンが 1 つ発生すると考えられる。しかるに、 $L = \sqrt{gh} \cdot T$ より $T=1.0$ sec の $\sin^2$ 波の波長は、 $h=20$ cm で 1.4 m であるが、 $H/h=0.25$ の孤立波の有効波長は 1.45 m と成り、波長が有効波長より短くなるので増幅度が 1 以下となると考えられるのであろう。

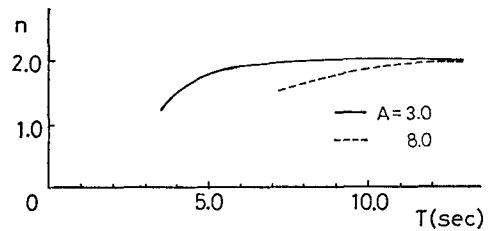


図-8 $\tanh$ 波の増幅度

図-8 は、 $\tanh$ 波に対し横軸に周期、縦軸に増幅度をとったものである。 $\sin^2$ 波と違い、R-R 法、G 法とも同じような値を得た。 $H_0/h=0.25$ である。波高が最大で 2 倍となる様子がよくわかる。

7. おわりに

以上、孤立性段波がソリトンに分裂する過程での波高増加に着目し、得られた結果をモデル化した湾内におけ

る津波の挙動に適用を試みた。以下に本研究の結論を述べる。

1) 初期波の波高水深比が0.1以上で、さきに定義した孤立性段波の周期より求めた波長が同じ波高の孤立波の有効波長より長い場合には分散による波高増加が生じる。

2) 波高の増加は、初期波高水深比によって定まる波高増加率を勾配とする1次式により近似できる。

3) 分裂の水平スケールとして3種類を提案したが、それらを実際の湾へ適用した結果、湾内水深が浅く湾長の長い湾では、分散効果による波高増加が大きくなり湾奥において線形波の波高の1.7倍程度になる可能性がある。このような湾では分散項を考慮して数値計算を行う必要がある。

最後に、実験・データ整理に措しみなく協力して頂いた青木信也氏(現 東北大学大学院)に感謝の意を表します。

参 考 文 献

- 1) 岩崎敏夫・真野 明・小杉達郎: 孤立性段波のソリトン分裂に関する研究, 第22回海岸工学講演会論文集, pp. 47~51, 1975.
- 2) 岩崎敏夫・鈴木義和: 孤立性段波よりのソリトンの変形と碎波に関する研究, 第24回海岸工学講演会論文集, pp. 45~49, 1977.
- 3) Hammack, J. L. and H. Segur: The Korteweg-de Vries equation and water waves. Part 2, Jour. Fluid Mech., Vol. 65, Part 2, pp. 289~314, 1974.
- 4) Nagashima, H.: Deformation of nonlinear shallow water waves, Scientific Paper of the Institute of Physical and Chemical Research, Vol. 71, pp. 13~44, 1977.
- 5) Munk, W. H.: Solitary wave theory and its application of surf problems. Ann. N.Y. Acad. Sci., Vol. 51, pp. 376~424, 1949.
- 6) 長島秀樹: $K-dV$ soliton とその応用, 第21回海岸工学講演会論文集, pp. 49~55, 1974.