

物質座標系による非線型長波

後 藤 智 明*

1. 序

本研究は、物質座標系 (Lagrange の方法) の表現を用いた非線型長波の方程式を新たに導びくことにより、津波や高潮などの陸岸へのはいあがりの問題に対して、波の有限波高性を考慮した解析手法を容易ならしめようとしたものである。

このような長波のはいあがりの問題を物質座標系で考える利点としては、特に実海岸のような複雑な陸岸地形に対しても適用可能であることがあげられる。

従来、物質座標系の式群は外力項が非線型となるため取り扱いがきわめて面倒となり、かえりみられることが少なかった。しかし、Miche¹⁾ は斜面上の短周期の波を記述するのに Lagrange の運動方程式を用いて成功したのであった。彼の特徴は水粒子の静水時位置からの変位が小さいと捉えて摂動を行うにあった。実際、後述のように物質座標系の式群を変動量で表現すると外力に線型項が現われ比較的取り扱いが容易になる。

首藤^{2),3)}は、この Miche の物質座標系に対する考え方を長周期の波へ適用することにより、長波の陸岸へのはいあがりについての解を得ている。

はじめに、この首藤の摂動法²⁾について考えてみる。第一次近似は線型の方程式となる。第二次近似は永年項を含む結果、すなわち、時間の経過とともに振幅が増大しやがては第一次近似をうわまわるものとなる。摂動の際の条件は (第一次近似) > (第二次近似) であったから、この関係が逆転するということは用いた摂動法がもはや適当なものではないことを意味している。したがって、高次近似の方程式を導びくためには摂動法を変えればよいのである。

また、首藤の摂動法の考え方は Miche と同様に水粒子の静水時位置からの変位が小さいというものであった。連続体の変形に関する考え方は微小変位理論と呼ばれる近似であろう。しかし、連続体のなかでも流体は大きな変形が許されるものであり、そのような近似を採用するものも有効であろう。

以上の考察により、本研究においては有限変位近似と

しての摂動法を採用することにした。この結果、この有限変位を表わす項が物質座標系による長波の表現のうえで非線型項となり、また波の有限波高性を意味するものであることが明らかとなった。

2. 変動量で表現された物質座標系の方程式

二次元非回転運動を対象とする。粘性は考えない。静水時を時刻の原点に選び、静水時に (a, b) なる位置にあった水粒子は、任意の時刻には $(\hat{x}, \hat{y})$ に到達し、その水粒子の受けている圧力を $\hat{p}$ とすると、連続および運動の式は、

$$\frac{\partial(\hat{x}, \hat{y})}{\partial(a, b)} = 1 \quad \dots\dots\dots (2.1)$$

$$\frac{\partial^2 \hat{x}}{\partial t^2} + \frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial(\hat{p}, \hat{y})}{\partial(a, b)} = 0 \quad \dots\dots\dots (2.2)$$

$$\frac{\partial^2 \hat{y}}{\partial t^2} + g + \frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial(\hat{x}, \hat{p})}{\partial(a, b)} = 0 \quad \dots\dots\dots (2.3)$$

となる。非回転運動を表わす式 (付記参照) は

$$\frac{\partial \hat{x}}{\partial a} \cdot \frac{\partial \hat{x}}{\partial b} = \frac{\partial \hat{y}}{\partial a} \cdot \frac{\partial \hat{y}}{\partial b} \quad \dots\dots\dots (2.4)$$

である。

いま、 $(\hat{x}, \hat{y})$ を水粒子の変位置量 (x, y) で、圧力 $\hat{p}$ を静水圧 $-\rho g b$ とその変動量 p を用いて

$$\left. \begin{aligned} \hat{x} &= a + x \\ \hat{y} &= b + y \\ \hat{p} &= -\rho g b + p \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots\dots (2.5)$$

と表わすと、式 (2.1) ~ (2.4) は変動量 x, y, p を用いて

$$\frac{\partial x}{\partial a} + \frac{\partial y}{\partial b} + \frac{\partial(x, y)}{\partial(a, b)} = 0 \quad \dots\dots\dots (2.6)$$

$$\frac{\partial^2 x}{\partial t^2} + \frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial p}{\partial a} + g \cdot \frac{\partial y}{\partial a} + \frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial(p, y)}{\partial(a, b)} = 0 \quad \dots\dots\dots (2.7)$$

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} + \frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial p}{\partial b} - g \cdot \frac{\partial x}{\partial a} + \frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial(x, p)}{\partial(a, b)} = 0 \quad \dots\dots\dots (2.8)$$

$$\left(1 + \frac{\partial x}{\partial a}\right) \cdot \frac{\partial x}{\partial b} = \left(1 + \frac{\partial y}{\partial b}\right) \cdot \frac{\partial y}{\partial a} \quad \dots\dots\dots (2.9)$$

と書くことができる。

これらが変動量で表現された物質座標系の式群であり、式 (2.1) ~ (2.4) と比べ外力に線型項が現われ取り扱いが容易となる。たとえば、弱非線型の仮定が可能

* 学生会員 工修 東北大学大学院 工学研究科

場合、式 (2.9) から連続の式が Laplace の式を満足することや、式 (2.7), (2.8) から圧力方程式として

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} + \frac{p}{\rho} + g \cdot \frac{\partial \Phi}{\partial b} = 0 \quad \dots\dots\dots (2.10)$$

が導びかれることがあげられる。ここで、 $x = \partial \Phi / \partial a$, $y = \partial \Phi / \partial b$ である。

この関係を用いて表面波に対し

$$\begin{aligned} \eta &= H \sin(ka - \sigma t) \\ \Phi &= \frac{gH}{\sigma^2} \frac{\cosh k(b+h)}{\cosh kh} \sin(ka - \sigma t) \quad \dots\dots\dots (2.11) \end{aligned}$$

という解の組み合わせを得ることも可能である。

3. 水平床上の長波の方程式

いま、水平方向に l , 鉛直方向に d という特性長を考え、長波の運動は $d^2/l^2 = \sigma \ll 1$ によって特徴づけられるものとする。ここで、 $A = a/l$, $B = b/d$, $X = x/l$, $Y = y/d$, $P = p/\rho g d$, $T = \sqrt{g d} \cdot t/l$ なる無次元量を導入すると、式 (2.6) ~ (2.9) は

$$\frac{\partial X}{\partial A} + \frac{\partial Y}{\partial B} + \frac{\partial(X, Y)}{\partial(A, B)} = 0 \quad \dots\dots\dots (3.1)$$

$$\frac{\partial^2 X}{\partial T^2} + \frac{\partial P}{\partial A} + \frac{\partial Y}{\partial A} + \frac{\partial(P, Y)}{\partial(A, B)} = 0 \quad \dots\dots\dots (3.2)$$

$$\sigma \frac{\partial^2 Y}{\partial T^2} + \frac{\partial P}{\partial B} - \frac{\partial X}{\partial A} + \frac{\partial(X, P)}{\partial(A, B)} = 0 \quad \dots\dots\dots (3.3)$$

$$\left(1 + \frac{\partial X}{\partial A}\right) \cdot \frac{\partial X}{\partial B} = \sigma \cdot \left(1 + \frac{\partial Y}{\partial B}\right) \cdot \frac{\partial Y}{\partial A} \quad \dots\dots\dots (3.4)$$

となる。

また、ここで従属変数 X, Y, P を

$$\begin{aligned} X &= \sum_{n=0}^{\infty} \sigma^n X_n, \quad Y = \sum_{n=0}^{\infty} \sigma^n Y_n, \quad P = \sum_{n=0}^{\infty} \sigma^n P_n \\ &\dots\dots\dots (3.5) \end{aligned}$$

と展開し、式 (3.1) ~ (3.4) に代入して最低次の項をあつめると、

$$\frac{\partial X_0}{\partial A} + \frac{\partial Y_0}{\partial B} + \frac{\partial(X_0, Y_0)}{\partial(A, B)} = 0 \quad \dots\dots\dots (3.6)$$

$$\frac{\partial^2 X_0}{\partial T^2} + \frac{\partial P_0}{\partial A} + \frac{\partial Y_0}{\partial A} + \frac{\partial(P_0, Y_0)}{\partial(A, B)} = 0 \quad \dots\dots\dots (3.7)$$

$$\frac{\partial P_0}{\partial B} - \frac{\partial X_0}{\partial A} + \frac{\partial(X_0, P_0)}{\partial(A, B)} = 0 \quad \dots\dots\dots (3.8)$$

$$\left(1 + \frac{\partial X_0}{\partial A}\right) \cdot \frac{\partial X_0}{\partial B} = 0 \quad \dots\dots\dots (3.9)$$

がえられる。なお、式 (3.9) において、ここでは周期的な波動運動を取り扱っているものであり、 $1 + \partial X_0 / \partial A \approx 0$ となり、結局

$$\frac{\partial X_0}{\partial B} = 0 \quad \dots\dots\dots (3.9)'$$

である。したがって、この近似においては水粒子の運動は、式 (3.8) から鉛直方向加速度が無視されており、また式 (3.9)' から水粒子の水平方向変位は鉛直方向には変化しないことがわかる。

境界条件は、自由表面では最初水表面を形成していた水粒子は常に水表面に存在することであり、

$$B=0 \quad \text{で} \quad P_0=0 \quad \dots\dots\dots (3.10)$$

水底では、最初水底にあった水粒子は水底を離れることがないというものであり、水平床を考えると

$$B=-h \quad \text{で} \quad Y_0=0 \quad \dots\dots\dots (3.11)$$

となる。

連続の式 (3.6) は式 (3.9)' から鉛直方向に積分することが可能であり、境界条件 (3.11) を用いると

$$Y_0 = - \frac{(B+h) \frac{\partial X_0}{\partial A}}{1 + \frac{\partial X_0}{\partial A}} \quad \dots\dots\dots (3.12)$$

となる。また、鉛直方向の運動の式 (3.8) も同様に境界条件 (3.10) を用いて

$$P_0 = - \frac{B \frac{\partial X_0}{\partial A}}{1 + \frac{\partial X_0}{\partial A}} \quad \dots\dots\dots (3.13)$$

と書くことができる。この兩式を水平方向の運動の式 (3.7) に代入し整理すると、

$$\frac{\partial^2 X_0}{\partial T^2} - \frac{h \frac{\partial^2 X_0}{\partial A^2}}{\left(1 + \frac{\partial X_0}{\partial A}\right)^3} = 0 \quad \dots\dots\dots (3.14)$$

が求まる。ここで、はじめ水表面に存在していた水粒子の鉛直変位を $\zeta_0 (= Y_0|_{B=0})$ とすると、式 (3.12), (3.14) から

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial^2 X_0}{\partial T^2} + \frac{\frac{\partial \zeta_0}{\partial A}}{1 + \frac{\partial X_0}{\partial A}} &= 0 \\ \zeta_0 + \frac{h \frac{\partial X_0}{\partial A}}{1 + \frac{\partial X_0}{\partial A}} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots\dots (3.15)$$

が求まる。これが物質座標系による長波の運動そして連続方程式である。

また、この長波の方程式は次の二つの仮定が満たされるとき容易に物理的な考察からも導びくことができる。

- (仮定) 1. 水粒子の鉛直方向加速度が無視可能。
2. 最初鉛直断面を形成した水粒子は運動後も同一鉛直断面を形成する。

いま静水時に M の位置にあった水粒子が、任意の時刻に x だけ水平方向に変位し、 M' の位置に到達したものとする。このときはじめ水表面に存在していた水粒子の鉛直変位を η とおく。

質量の連続を考える。図-1 において両斜線部の面積が等しいことにより、

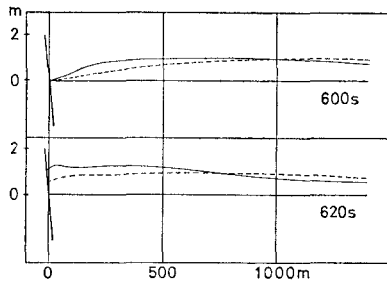


図-3 空間波形の例

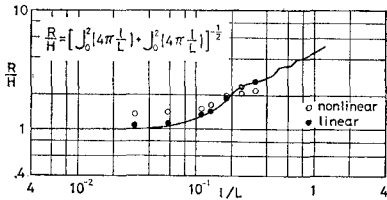


図-4 長波の遡上高の計算結果

下まわったりしている。計算の精度については、水理実験結果と詳細に検討する必要があるが、このように長波のはいあがり高に関して波の有限波高性を考慮した計算が容易に可能であることがいえる。

以上の例はすべて波形勾配 $10^{-4} \sim 10^{-5}$ 程度の計算である。しかし、これ以上波形勾配の大きい波の場合については砕波（ここでは水粒子の追いつき、追い越しをさす）がおこると式 (4.2) 中の分母の項がゼロに近くなり計算が発散する。このように砕波をおこす場合の計算は今後何らかの方法を考える必要がある。

6. 結 論

本研究は暗に津波の陸岸へのはいあがりに関する、波の有限波高性を考慮した計算手法を目的としていた。津波は一般に非砕波または surging 型の砕波であることを考えると、本研究で導出した物質座標系による非線型長波の方程式で取り扱える例は数多くあると考えられる。

なお、計算は東北大学大型計算機センター ACOS-6 および東京大学大型計算機センター HITAC 8800/8700 を使用した。

謝 辞： この研究を行うにあたり、東北大学首藤伸夫教授には多くの助言を賜った。ここに記して厚く謝意を表する。

参 考 文 献

- 1) Miche, R.: Mouvements ondulatoires de la mer en profondeur constante ou décroissante, Annales des Ponts et Chaussées, 114e, 1944.
- 2) 首藤伸夫：長波のはいあがり高，第 13 回海講，

1967.

- 3) Shuto, N.: Standing waves in front of a sloping dike, Proc. 13th Conf. on Coastal Eng., ASCE, 1972.
- 4) 首藤伸夫・後藤智明：津波の遡上に関する数値解析，第 24 回海講，1977.

付．物質座標系による非回転の表現

(1) 空間座標系の表現からの変換

空間座標系 (Euler の方法) の非回転の表現式は

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial v}{\partial x} \quad \dots\dots\dots (1)$$

であり、これを物質座標系への変換式、すなわち

$$\left(\frac{\partial}{\partial a} \right) = \left(\frac{\partial x}{\partial a} \frac{\partial}{\partial b} + \frac{\partial y}{\partial a} \frac{\partial}{\partial b} \right) \left(\frac{\partial}{\partial x} \right) \quad \dots\dots\dots (2)$$

で変換をすると

$$\frac{\partial(x, u)}{\partial(a, b)} = \frac{\partial(y, v)}{\partial(a, b)} \quad \dots\dots\dots (3)$$

が得られる。またこの式を変形すると

$$\left(\frac{\partial x}{\partial a} \right)^2 \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial x}{\partial b} \right) = \left(\frac{\partial y}{\partial b} \right)^2 \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial y}{\partial a} \right) \quad \dots\dots\dots (4)$$

とも書き改めることができる。

(2) 流体要素の実質的な非回転

ある流体要素が伸び縮みはするが実質的には非回転であるとした場合物質座標系の考え方では式 (4) と異なる表現になる。

いま、時刻の原点に矩形 (図-5 の (a)) であった流体要素が任意の時刻に 図-5 の (b) のごとく変化したとすると、流体要素の回転角 α, β は

$$\alpha = \frac{\frac{\partial y}{\partial a}}{\frac{\partial x}{\partial a}}, \quad \beta = \frac{\frac{\partial x}{\partial b}}{\frac{\partial y}{\partial b}}$$

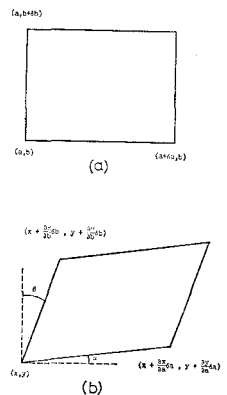


図-5 非回転の表現

であり、 $\alpha = \beta$ ならば実質的には流体要素は非回転であるといえよう。したがって

$$\frac{\partial x}{\partial a} \frac{\partial x}{\partial b} = \frac{\partial y}{\partial a} \frac{\partial y}{\partial b} \quad \dots\dots\dots (5)$$

となる。

式 (4) と (5) は同値ではない。この非回転の表現において両者の違う理由は不明である。しかし、本研究の近似においては、両者とも $\partial x / \partial b = 0$ が導びかれる。