

線型長波の変形について

——システム関数を用いた解法——

真 野 明*

1. はじめに

従来、港湾の振動の問題における長波変形の研究には大別して2つの方法がある。1つは、線型性を仮定して、単振動定常状態の境界値問題を解こうとするもので、日高¹⁾、本間²⁾、桃井³⁾、合田⁴⁾、Keller & Keller⁵⁾、Miles⁶⁾ 各氏等枚挙に暇がないくらい多くの解析的研究がある。また数値的方法を大幅に用いた Lee⁷⁾、坂井・月岡⁸⁾ 諸氏の研究も同じ基礎に立っている。これらは時間領域をフーリエ変換して、個々の周波数について考えていることになり、間接的には周波数領域をあつかっていることと等価である。この意味で上述の研究は Miles & Munk⁹⁾ が湾水振動の問題で論じたスペクトルの概念と密接な関係がある。

第2の方法は非定常問題を時間領域で解こうとするもので、差分法等の数値的方法を用いれば、非線型効果や摩擦の効果等支配方程式の高次の項もあつかえるし、比較的複雑な地形の効果もとり入れることが出来る。しかし第2の方法だけで全体的な特性を明らかにしようすれば非常に多くの場合について解かなければならず、一般には、相互の方法の関連した研究が必要である。ところで、第1の方法は現在までのところ、定常問題を解くのに留まっており非定常問題にはふれていないようである。そこで本論文ではシステム関数論を応用して、第1の方法を非定常問題に展開しようとするものである。

2. 線型システム関数論の応用

フーリエ解析を用いたシステム関数論は Papoulis¹⁰⁾ に詳しく述べられているが、ここでは有限長さの不規則入力波に対する線型システム応答の問題への応用を考える。

いま線型システム L の入出力関数を $f(t), g(t)$ とし、それらのフーリエ変換をおのおの $\tilde{f}(\omega), \tilde{g}(\omega)$ とする。またインパルス入力 $\delta(t)$ に対する出力をインパルス応答として $h(t)$ で表わすと、式 (1)~(3) の関係がある。

$$g(t) = L[f(t)] \quad \dots\dots\dots (1)$$

$$h(t) = L[\delta(t)] \quad \dots\dots\dots (2)$$

$$H(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} h(t)e^{i\omega t} dt \quad \dots\dots\dots (3)$$

一般に線型システム関数 $H(\omega)$ は式 (3) によって定義されるが、単振動入力関数 $e^{i\omega t}$ は線型システムの固有関数であるので式 (4) の性質があり式 (5) で $H(\omega)$ を定義することも出来る。

$$H(\omega)e^{i\omega t} = L[e^{i\omega t}] \quad \dots\dots\dots (4)$$

$$H(\omega) = L[e^{i\omega t}] / e^{i\omega t} \quad \dots\dots\dots (5)$$

周波数領域ではよく知られた式 (6) の関係があり、 $\tilde{f}(\omega), \tilde{g}(\omega), \tilde{H}(\omega)$ はおのおの入力、出力およびシステムのスペクトルを表わしている。

$$\tilde{g}(\omega) = H(\omega) \cdot \tilde{f}(\omega) \quad \dots\dots\dots (6)$$

いま、入力波 $f(t)$ の継続時間を $2T$ とすると線型性から、式 (7) のようにフーリエ級数に分解出来、そのフーリエ変換は式 (8) となる。

$$f(t) = \begin{cases} \sum_{j=1}^{\infty} a_j \sin(\omega_j t/2), & 0 \leq t \leq 2T \\ 0, & t < 0 \text{ または } 2T < t \end{cases}$$

$$\omega_j = \frac{j\pi}{2T} \quad \dots\dots\dots (7)$$

$$\tilde{f}(\omega) = -i \sum_{j=1}^{\infty} a_j \left[\frac{\sin(\omega - \omega_j)T}{(\omega - \omega_j)} e^{-i(\omega - \omega_j)T} - \frac{\sin(\omega + \omega_j)T}{(\omega + \omega_j)} e^{-i(\omega + \omega_j)T} \right] \quad \dots\dots\dots (8)$$

式 (6), (8) および受動システムの性質を使って出力波 $g(t)$ は式 (9) のように表わされる。

$$g(t) = \frac{2}{\pi} \sum_{j=1}^{\infty} a_j \int_0^{\infty} A(\omega) \left[\frac{\sin(\omega - \omega_j)T}{\omega - \omega_j} \sin(\phi(\omega) - (\omega - \omega_j)T) - \frac{\sin(\omega + \omega_j)T}{\omega + \omega_j} \sin(\phi(\omega) - (\omega + \omega_j)T) \right] \cos \omega t d\omega \quad \dots\dots\dots (9)$$

ここで

$$H(\omega) = A(\omega) \cdot e^{i\phi(\omega)} \quad \dots\dots\dots (10)$$

式 (9) により、 $H(\omega)$ の絶対値 $A(\omega)$ と位相部分 $\phi(\omega)$ がわかっていれば、有限長さの任意の入力波形に対する出力波形を計算出来る。

3. 港湾のシステム関数

港湾の振動問題を解くために、港湾（領域 1）と外海

* 正会員 工修 東北大学工学部 土木工学科

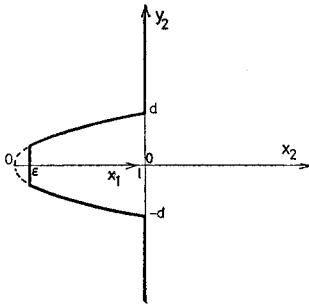


図-1 座標系

(領域2)の2つの領域からなるモデルを考え、以下の各量におおの添字 1, 2 をつける (図-1 参照). 領域 1 については 1 次元伝播理論を用いることとし、単振動定常状態を考えると水面変位 $\eta_1(x_1, t)$ は式 (11) で表わされ、支配方程式は式 (12) となる.

$$\eta_1(x_1, t) = \eta_1(x_1) e^{i\omega t} \quad \dots\dots\dots (11)$$

$$\frac{d}{dx_1} \left(b_1 \cdot h_1 \cdot \frac{d\eta_1(x_1)}{dx_1} \right) + \frac{b_1 \omega^2}{g} \eta_1(x_1) = 0 \quad \dots\dots\dots (12)$$

ここで b_1, h_1 はおおの湾幅、および水深であり、 x_1 は湾軸方向の空間座標である. 具体的な地形として、式 (13) の放物線型を考え本間博士²⁾の求めた一般解 (14) を用いる.

$$h_1(x_1) = h_0 x_1^m, \quad b_1(x_1) = b_0 x_1^n \quad \dots\dots\dots (13)$$

$$\eta_1(x_1) = x_1^p [B_1 H_q^{(1)}(\kappa_1 x_1) + C_1 H_q^{(2)}(\kappa_1 x_1)] \quad \dots\dots\dots (14)$$

ここで

$$p = 1 - m/2, \quad q = (1 - m - n)/(2 - m), \quad (m \neq 2)$$

$$\kappa_1 = \omega / p \sqrt{g h_1}$$

また、領域 2 として、一様水深 h_2 の半無限領域を考え、海岸線を $x_2 = 0$ とし、波向は海岸線に直交しているものとする定常状態の一般解は式 (15) となる.

$$\eta_2(x_2, y_2, t) = [\alpha \cdot (e^{ik_2 x_2} + e^{-ik_2 x_2}) + \eta_2 f(x_2, y_2)] e^{i\omega t} \quad \dots\dots\dots (15)$$

ここで $\eta_2^+(x_2, t) = \alpha e^{ik_2 x_2} e^{i\omega t}$ は入力波を表わし、 $\eta_2 f(x_2, y_2)$ は、湾口からの散乱波を表わしている. 式 (14), (15) に対し、湾口 ($x_1 = l, x_2 = 0$) で平均水位、流量の連続、湾奥 ($x_1 = \varepsilon$) で完全反射の境界条件を使って $\eta_1(x_1)$ を解くと式 (16) が得られる.

$$H_0(\omega; 0) = \lim_{x_1 \rightarrow 0} H_0(\omega; x_1)$$

$$= \frac{2}{(Z_l/2)^q \Gamma(1-q) [J_{-q}(Z_l) - \gamma_n J_{1-q}(Z_l) \cdot \phi_2 + i \gamma_n \cdot J_{1-q}(Z_l) \cdot \phi_1]} \quad \dots\dots\dots (20)$$

ここで Γ はガンマ関数を表わす.

式 (10), (17) より明らかなようにシステム関数の絶対値部分は定常状態の波高増幅率を表わし、これについてはいくつかの地形について解が求められている. 式 (20) において $m = n = 0, \gamma_n = 1.0$ (矩形湾) の場合、あるいは、

$$\eta_1(x_1) = \left(\frac{x_1}{l} \right)^{pq} \times \left[\frac{2\alpha \Delta_1(x_1)}{[\Delta_1(l) + \gamma_n \cdot \Delta_2(l) \cdot \phi_2 - i \gamma_n \cdot \Delta_2(l) \cdot \phi_1]} \right] \quad \dots\dots\dots (16)$$

ここで $\Delta_1(x_1) = J_{q-1}(Z_l) Y_q(Z_{x_1}) - Y_{q-1}(Z_l) J_q(Z_{x_1})$
 $\Delta_2(x_1) = J_{q-1}(Z_l) Y_{q-1}(Z_{x_1}) - Y_{q-1}(Z_l) J_{q-1}(Z_{x_1})$
 $Z = \kappa x, \quad Z_l = Z|_{x=l}, \quad Z_{x_1} = Z|_{x=x_1}, \quad Z_l = Z|_{x=l}$
 J_q, Y_q 等はおおの q 次のベッセル関数、 γ_n はマン関数、 $\gamma_n = \sqrt{h_1(l)/h_2}$

$$\phi_1 = \phi_1(k_2 d) = \frac{2}{\pi} \cdot k_2 d \int_0^{k_2 d} \frac{\sin^2(ud)}{(ud)^2 \sqrt{k_2^2 - u^2}} du$$

$$\phi_2 = \phi_2(k_2 d) = \frac{2}{\pi} \cdot k_2 d \int_{k_2 d}^{\infty} \frac{\sin^2(ud)}{(ud)^2 \sqrt{u^2 - k_2^2}} du$$

$2d$ は湾口幅

さて入力波 $\eta_2^+(x_2, t)$ と出力波 $\eta_1(x_1, t) = \eta_1(x_1) e^{i\omega t}$ が求められたので、式 (5) の定義に従ってシステム関数を定義する.

$$H_\varepsilon(\omega; x_1, x_2) \equiv \eta_1(x_1, t) / \eta_2^+(x_2, t) \quad \dots\dots\dots (17)$$

式 (17) は x_2 地点の入力波に対する、 x_1 地点の出力波の関係を示すシステム関数である. ここで領域 2 は一様水深としているので、 $x_2 = 0$ としても一般性は失われず、これを $H_\varepsilon(\omega; x_1)$ と記述する.

$$H_\varepsilon(\omega; x_1) = \left(\frac{x_1}{l} \right)^{pq} \times \frac{2\Delta_1(x_1)}{[\Delta_1(l) + \gamma_n \cdot \Delta_2(l) \cdot \phi_2 - i \gamma_n \cdot \Delta_2(l) \cdot \phi_1]} \quad \dots\dots\dots (18)$$

実際の港湾では、湾奥で水深が零になっている場合があり式 (13) の地形形状の仮定から、 $m \neq 0$ の場合は ε を零に漸近させることによって $h_1(\varepsilon) = 0$ となる. この場合のシステム関数はベッセル関数の原点近傍の性質を使って式 (18) より導かれる.

$$H_0(\omega; x_1) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} H_\varepsilon(\omega; x_1) = \left(\frac{x_1}{l} \right)^{pq} \times \frac{2J_{-q}(Z_{x_1})}{[J_{-q}(Z_l) - \gamma_n \cdot J_{1-q}(Z_l) \cdot \phi_2 + i \gamma_n \cdot J_{1-q}(Z_l) \cdot \phi_1]} \quad \dots\dots\dots (19)$$

さらに湾奥におけるシステム関数は

$m = 0, n = 1.0, \gamma_n = 1.0$ (三角形湾) の場合には合田博士⁴⁾の結果と一致する. また式 (18) において、 $m = n = 1.0, \gamma_n = 1.0$ とすると酒井・山本¹¹⁾諸氏の結果と一致する. このように式 (18) ~ (20) が多くの解を包含しているのは、

本間博士の解 (14) の一般性に基いている。

さらに梶浦博士¹²⁾は、式 (20) の $m=1.0$, $n=0$, $\gamma h=1.0$ の地形に対し、Tuck & Hwang 変換を用いて非線型効果を取り入れ遡上高の式を導いているが得られた式は式 (20) の結果と一致している。

著者ら¹³⁾は外海を 1 次元理論を使い一様断面とした場合についても解を得ており、それらを列記すると式 (21) ~ (23) のようになる。

$$H'_i(\omega; x_1) = \left(\frac{x_1}{l}\right)^{pq} \frac{2\Delta_i(x_1)}{[\Delta_i(l) - i\gamma \cdot \Delta_i(l)]} \quad \dots\dots\dots (21)$$

$$H'_0(\omega; x_1) = \left(\frac{x_1}{l}\right)^{pq} \frac{2J_{-q}(Z_l)}{[J_{-q}(Z_l) + i\gamma \cdot J_{1-q}(Z_l)]} \quad \dots\dots\dots (22)$$

$$H'_0(\omega; 0) = \frac{2}{(Z_l/2)^q \Gamma(1-q) [J_{-q}(Z_l) + i\gamma \cdot J_{1-q}(Z_l)]} \quad \dots\dots\dots (23)$$

ここで、 $\gamma = b_1(l)/\sqrt{h_1(l)}/b_2\sqrt{h_2}$, b_2 は外海幅である。これらを (18) ~ (20) と比較すると分母の大括弧中の表現が異なるだけで他は全く一致している。

最後に式 (20) の独立変数 Z_l について検討する。式 (14), (16) より式 (24) が導かれる。

$$Z_l = \frac{\omega l}{p\sqrt{gh_1(l)}} = \omega T_0 = \omega^*, \quad T_0 = \frac{l}{p\sqrt{gh_1(l)}} \quad \dots\dots\dots (24)$$

ここで T_0 は波が湾口から湾奥まで伝播するのに要する伝播時間であり、 Z_l (または ω^*) は T_0 で無次元化した周波数である。

4. 計算結果

3. でシステム関数が求まったので式 (9) に代入すれば、出力波が求まるが、解析的には積分出来ないの、数値積分が必要であり、その積分精度を検定する。いま式 (23) において $m=n=0$ すなわち矩形湾の場合にはシステム関数が ω に関する周期関数になっており、フーリエ変換により式 (25) に示すようなデルタ関数列よりなるインパルス応答関数を求めることが出来る。

$$h(t) = \sum_{j=0}^{\infty} B_{2j+1} \delta(t - (2j+1)T_0) \quad \dots\dots\dots (25)$$

$$B_j = \left(\frac{4}{1+\gamma}\right) \left(\frac{\gamma-1}{\gamma+1}\right)^{(j-1)/2}$$

式 (25) を使えば出力波形 $g(t)$ は $h(t)$ と $f(t)$ の重畳積分で表われ、正確な値を得ることが出来る。

図-2 は長さ $8T_0$ の継続時間を有する入力波で、式 (9) の $j=1, 4, 5, 6$ の成分波に、振幅 1 を与えて計算したものである。実線が入力波形で、点線が出力波形である。上の 4 つのグラフが各成分に対するもので、一番下のグラフがそれらを合成したものである。式 (9) による出力波と式 (25) による出力波を比較したところ、いずれの成分波においても相対誤差は 0.5% 以下であった。

図-3~5 は (20) のシステム関数のグラフを示した

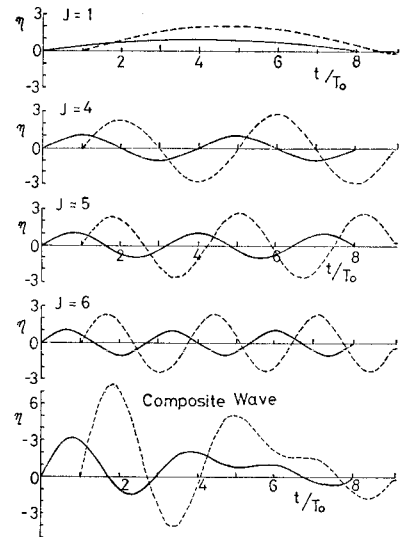


図-2 矩形湾テスト波形 ($\gamma=0.707$)

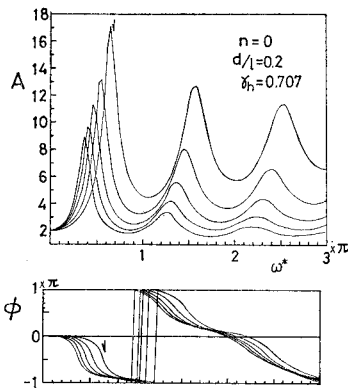


図-3 システム関数 水深の効果 (矢印上から順に $m=1.0$, 0.75, 0.5, 0.25, 0.0)

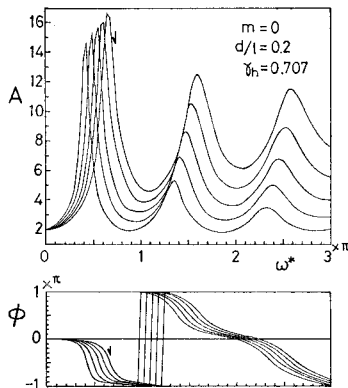


図-4 システム関数 湾幅の効果 (矢印上から $n=1.0$, 0.75, 0.5, 0.25, 0.0)

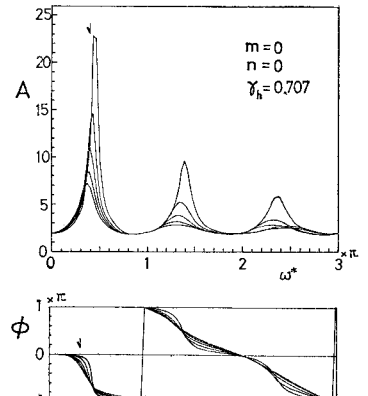


図-5 システム関数 d/l の効果 (矢印上から $d/l=0.2$, 0.4, 0.6, 0.8, 1.0)

表—1 第1共振増幅率と共振周期 ($\gamma_h=0.707$)

$m \backslash n$	$d/l=0.2$					$d/l=0.4$					$d/l=0.6$					$d/l=0.8$				
	0.00	0.25	0.50	0.75	1.00	0.00	0.25	0.50	0.75	1.00	0.00	0.25	0.50	0.75	1.00	0.00	0.25	0.50	0.75	1.00
0.00	14.7 4.6	15.3 4.0	15.7 3.6	16.0 3.2	16.7 3.0	8.4 4.9	8.5 4.6	8.7 4.0	8.9 3.6	9.1 3.2	6.3 5.3	6.3 4.6	6.3 4.3	6.4 3.8	6.5 3.2	5.2 5.8	5.2 4.9	5.2 4.3	5.2 3.8	5.3 3.0
0.25	17.4 4.3	17.5 3.8	17.8 3.3	18.8 2.9	19.7 2.7	9.6 4.6	9.8 4.0	9.9 3.6	10.2 3.2	10.5 2.8	7.0 4.9	7.0 4.3	7.1 3.8	7.3 3.2	7.5 2.9	5.6 5.3	5.6 4.3	5.7 3.8	5.8 3.4	6.1 2.8
0.50	20.1 3.8	20.6 3.4	22.2 2.9	23.0 2.7	24.0 2.4	10.9 4.0	11.3 3.6	11.7 3.0	12.2 2.8	12.6 2.5	7.9 4.3	8.0 3.8	8.3 3.2	8.5 2.8	8.9 2.5	6.3 4.6	6.4 3.8	6.5 3.2	6.8 2.8	7.3 2.4
0.75	24.9 3.4	26.4 2.9	28.0 2.6	29.6 2.3	30.9 2.1	13.3 3.6	13.8 3.0	14.8 2.8	15.2 2.4	16.1 2.1	9.3 3.8	9.6 3.2	10.0 2.8	10.6 2.4	11.3 2.1	7.3 3.8	7.6 3.2	7.9 2.7	8.5 2.4	9.4 2.0
1.00	30.6 2.9	35.4 2.5	36.7 2.1	41.3 1.9	44.4 1.8	16.7 3.0	18.1 2.6	19.1 2.2	20.8 2.0	22.4 1.8	11.7 3.0	12.4 2.7	13.3 2.3	14.4 2.0	15.7 1.8	9.1 3.2	9.6 2.7	10.4 2.3	11.5 1.9	13.3 1.0

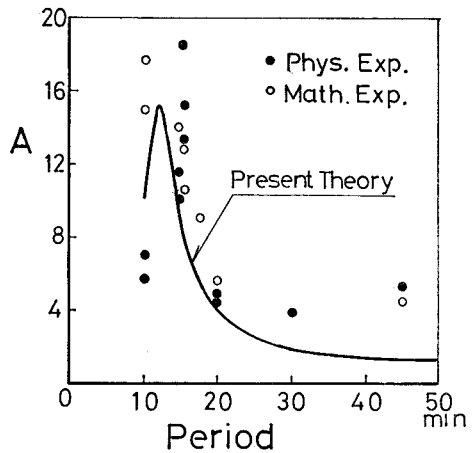
もので上側が波高増幅率 A を、下側が位相部分 ϕ を示す。横軸は無次元周波数 ω^* である。図—3 は水深の効果を示したもので、 $n=0$, $d/l=0.2$, $\gamma_h=1.0$ と固定し、 $m=0, 0.25, 0.5, 0.75, 1.0$ と変化させてある。 m が大きくなると共振増幅率は増大し、その位置は高周波側にずれる。共振増幅率は第1共振点で最も大きく、高周波側のものほど値は小さい。図—4 は湾幅の効果を示したもので、 $d/l=0.2$, $m=0$, $\gamma_h=0.707$ と固定し、 $n=0, 0.25, 0.5, 0.75, 1.0$ と変化させてある。 n が大きくなると共振増幅率は増大し共振点は高周波側へずれる。しかしその増大の様子は、図—3 ほど顕著でない。図—5 は湾の細長比 d/l の効果を示したもので $m=n=0$, $\gamma_h=0.707$ と固定し、 $d/l=0.2, 0.4, 0.6, 0.8, 1.0$ と変化させてあり、 d/l が小さくなると共振増幅率は増大し共振点は高周波側へずれる。

次にこれらの第1共振増幅率とその周期が、 $m, n, d/l$ でどのような値になるかを示したのが表—1 である。上段が共振増幅率であり、下段が共振周期を T_0 で割って無次元化したものである。 m や n が増加するに従って増幅率は増大し、周期が減少していく様子がわかる。

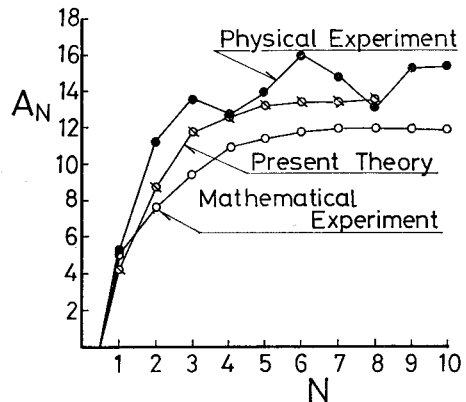
いま、実際の湾として両石湾をとりあげ応用を試みる。両石湾は浪板埼、白埼を結ぶ線が湾口と考えられ、 $l=4.0$ km, $d/l=0.4$, 湾口水深 50 m である。また、水深変化、幅変化に関しては、 $m=n=0.75$ が適当と考えられる。表—1 より増幅率は 15.2、共振周期は $2.4T_0$ となる。式 (24) を使うと $T_0=5.0$ 分が求められ、共振周期は 12 分と求まる。これは両石湾の模型実験で得られている 15~16 分より 3~4 分程度短い、その理由は明らかでない。

図—6 は、本理論の定常状態増幅率と水理実験・数値実験の結果を比較したもので、前述の共振周期がずれること以外は共振ピークの値も比較的良く一致しており、他の周期についても満足出来る結果である。

図—7 は、共振周期における 1 波毎の増幅率 A_N を波の序数 N を横軸にとって、本理論、水理実験、数値



図—6 両石湾の定常状態増幅率特性



図—7 両石湾の非定常状態増幅率特性

実験の結果について比較したものであるが、序数が増すにつれて、波が増幅していく様子やそれらの値等良く一致している。

5. おわりに

本論文で定義したシステム関数により定常状態の解を発展させ、非定常問題があつかえることがわかった。今

後はシステム関数の拡張を行いたいと考えている。

本研究にあたって、東北大学工学部岩崎敏夫教授より貴重な御教唆をいただいた。また、計算にあたっては、東北大学大型計算機センターの ACOS シリーズ 77 を利用した。ここに記して厚く謝意を表する。

参 考 文 献

- 1) 日高孝次： 静振決定の新方法，海と空，第 16 卷，pp. 93~104, 1936.
- 2) 本間 仁： 長波の変形に就て，土木学会誌，第 19 卷，第 9 号，pp. 741~763, 1933.
- 3) 桃井高夫： 矩形湾における長波〔I〕，地震研究所彙報，第 48 卷，pp. 871~891, 1970.
- 4) 合田良実： 長方形および扇形の港の副振動について——フーリエ変換を用いた解法——，第 10 回海講講演集，pp. 53~58, 1963.
- 5) Keller, J. B. and H. B. Keller: Water wave run-up on a beach, 1964.
- 6) Miles, J. W.: Resonant response of harbours: an equivalent-circuit analysis, J. Fluid Mech., Vol. 46, pp. 241~265, 1971.
- 7) Lee, J. J.: Wave Induced Oscillation in Harbours of Arbitrary Geometry, J. Fluid Mech., Vol. 45, 1971.
- 8) 坂井藤一・月岡康一： 波動解析への有限要素法の適用（第 3 報），第 22 回海講講演集，pp. 97~101, 1975.
- 9) Miles, J. and W. Munk: Harbour Paradox, WW. Div., A.S.C.E., pp. 111~130, 1961.
- 10) Papoulis, A.: The Fourier Integral and Its Applications, 1962.
- 11) 酒井哲郎・山本方人： 水深および湾幅がともに減少する湾における長波の湾水振動，第 23 回海講講演集，pp. 411~415, 1976.
- 12) Kajiura, K.: Local behaviors of Tsunamis, IUTAM symposium on "surface gravity waves on water of varying depth," 1976.
- 13) 真野 明・岩崎敏夫： 湾内津波の変形，東北支部技術研究発表会講演概要，1978.