

Catastrophe 理論による碎波の試み (2)

筒 井 茂 明*

1. 緒 言

Catastrophe 理論の応用¹⁾が考えられている分野としては、物理学の法則から出発し、その法則から得られる結果に対してこの理論を適用する physical な側面と、不十分な理解しか得られていない経験的な現象に対して Catastrophe 理論を応用することにより、内在する機構を再構成しようとする metaphysical な側面の2つが上げられる。また、この理論は、経験あるいは実験によって得られる結果を系統的に分類・整理し、現象を判り易くするための第1歩を与える1つの方法と考えられる。本研究は、前者の範ちゅうに属するものである。前報²⁾において、浅海における進行波に対する碎波モデルを得るため、次のような解析を行った。すなわち、水位変動および速度ポテンシャルからなる流体力学の基礎方程式を土屋・安田³⁾にならって摂動し、静水面からの水位変動のみで表わされた波動方程式に対する汎関数を定めた。次に、この Lagrangian から波動方程式の近似解であるエネルギー曲面を求め、その曲面の構造特性を調べた結果、これは Catastrophe 理論におけるポテンシャルの1つである Elliptic umbilic に相当し、このときに碎波モデルとなっていることを示した。しかし、そこで得られた結果による碎波現象の定性的な説明はともかく、従来の理論結果と比較するとき、定量的な不正確さは否めなかった。したがって、本報においては、この点を改良し、より精度の高い碎波モデルを得るため、高次の摂動展開とともに2・3の工夫を行い、さらに、このモデルから得られる波の特性、特に波形、波速および碎波限界について従来の理論結果と比較検討する。

2. 波動方程式と Hamiltonian

Catastrophe 理論は、保存力の作用する場における力学系のほとんどの場合に、エネルギー保存則が成立することを前提としているので、この理論を適用するため、波動運動におけるエネルギー曲面である Hamiltonian を次のようにして求める。ただし、本章における議論は前報と同じであるので、その概要のみを述べることにする。

一様水深域での進行波について考え、水底に原点を置き、水平および鉛直方向にそれぞれ x^* および z^* をとる。変数はすべて水深 h および時間 $\sqrt{h/g}$ を基準量とする無次元量を用いる。ここに、 g は重力の加速度である。

水位変動および速度ポテンシャルからなる流体力学の基礎方程式に対して Gardner-Morikawa 変換を施し、定常進行波に対する波動方程式を、静水面よりの水位変動のみで表示すると、3次のオーダーでは次式が得られる。

$$\begin{aligned} & -c^*\zeta_\theta + (3/2)\zeta\zeta_\theta + (1/6)\zeta_{\theta\theta\theta} \\ & = -\varepsilon\{(1/15)\zeta_{\theta\theta\theta\theta\theta} + (2/3)\zeta\zeta_{\theta\theta\theta} + (3/2)\zeta_\theta\zeta_{\theta\theta} + (3/2)\zeta^2\zeta_\theta \\ & \quad - (1/6)c^*\zeta_{\theta\theta\theta} - (5/2)c^*\zeta\zeta_\theta + (1/2)c^*\zeta^2\zeta_\theta\} \\ & -\varepsilon^2\{(17/630)\zeta_{\theta\theta\theta\theta\theta\theta} + (2/5)\zeta\zeta_{\theta\theta\theta\theta\theta} + (4/3)\zeta_\theta\zeta_{\theta\theta\theta\theta} \\ & \quad + 2\zeta_{\theta\theta}\zeta_{\theta\theta\theta} + (15/2)\zeta\zeta_\theta\zeta_{\theta\theta} + (5/4)\zeta^2\zeta_{\theta\theta\theta} + (5/2)\zeta_\theta^3 \\ & \quad + (9/4)\zeta_\theta^3\zeta_\theta - (1/15)c^*\zeta_{\theta\theta\theta\theta\theta} - c^*\zeta\zeta_{\theta\theta\theta\theta} \\ & \quad - (7/2)c^*\zeta_\theta\zeta_{\theta\theta} - 6c^*\zeta^2\zeta_\theta + (1/6)c^*\zeta^2\zeta_{\theta\theta\theta} \\ & \quad + 4c^*\zeta\zeta_\theta - (1/2)c^*\zeta_\theta^3\} \\ & -\varepsilon^3\{(31/2835)\zeta_{\theta\theta\theta\theta\theta\theta\theta} + (68/315)\zeta\zeta_{\theta\theta\theta\theta\theta\theta} \\ & \quad + (17/18)\zeta_\theta\zeta_{\theta\theta\theta\theta\theta\theta} + (61/30)\zeta_{\theta\theta}\zeta_{\theta\theta\theta\theta\theta} \\ & \quad + (53/18)\zeta_{\theta\theta\theta}\zeta_{\theta\theta\theta\theta} + (26/3)\zeta_\theta\zeta_{\theta\theta\theta\theta} + 14\zeta\zeta_{\theta\theta}\zeta_{\theta\theta\theta} \\ & \quad + (151/12)\zeta_\theta^2\zeta_{\theta\theta\theta} + 16\zeta_\theta\zeta_\theta^2\zeta_\theta + (87/4)\zeta^2\zeta_\theta\zeta_\theta \\ & \quad + (65/4)\zeta\zeta_\theta^3 + (11/6)\zeta^3\zeta_{\theta\theta\theta} + (11/10)\zeta^2\zeta_{\theta\theta\theta\theta} \\ & \quad + (15/4)\zeta^4\zeta_\theta - (17/630)c^*\zeta_{\theta\theta\theta\theta\theta\theta} - (8/15)c^*\zeta\zeta_{\theta\theta\theta\theta\theta} \\ & \quad - (8/3)c^*\zeta_\theta\zeta_{\theta\theta\theta} - (14/3)c^*\zeta_{\theta\theta}\zeta_{\theta\theta\theta} - (13/4)c^*\zeta^2\zeta_{\theta\theta\theta} \\ & \quad - (53/2)c^*\zeta_\theta\zeta_\theta\zeta_{\theta\theta} - 10c^*\zeta_\theta^3 - (55/4)c^*\zeta^3\zeta_\theta \\ & \quad + (1/15)c^*\zeta_{\theta\theta\theta\theta\theta} + (3/2)c^*\zeta^2\zeta_{\theta\theta\theta} + (13/2)c^*\zeta^2\zeta_\theta\zeta_{\theta\theta} \\ & \quad + (63/4)c^*\zeta^2\zeta_\theta - (1/6)c^*\zeta_{\theta\theta\theta} - 6c^*\zeta\zeta_\theta \\ & \quad + (1/2)c^*\zeta_\theta^4\} \\ & - \dots, \dots\dots\dots (1) \end{aligned}$$

ここに、 $\theta = \varepsilon^{1/2}\{x - (1 + \varepsilon c^*)t\}$ 、 ε : 摂動パラメータであり、添字は常微分を表わしている。

式(1)の右边を逐次変形し、変換 $\zeta = \varphi_\theta$ 、 $\chi = \varphi_{\theta\theta}$ を用いて、 χ 、 χ_θ 、 φ_θ 、 $\varphi_{\theta\theta}$ および $\varphi_{\theta\theta\theta}$ による表示式にしたのち、変分原理

$$\delta \iint \mathcal{L}(\chi, \chi_\theta, \varphi_\theta, \varphi_{\theta\theta}, \varphi_{\theta\theta\theta})(d\theta)^2 = 0 \quad \dots\dots\dots (2)$$

に対する Lagrangian を求めると、次式が得られる。

$$\mathcal{L} = -(1/6)\chi_\theta\varphi_\theta - (1/12)\chi^2 + \mathcal{L}^* \dots\dots\dots (3.1)$$

* 正会員 工修 琉球大学助手 理工学部土木工学科

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}^* = & -(1/4)\varphi_\theta^3 + (1/2)c^*\varphi_\theta^2 + \varepsilon\{-(3/20)\varphi_\theta\varphi_{\theta\theta}^2 \\
& + (21/80)\varphi_\theta^4 + (1/10)c^*\varphi_\theta^3 - (19/20)c^*\varphi_\theta^2\} \\
& + \varepsilon^2\{-(71/1400)\varphi_\theta^2\varphi_{\theta\theta}^2 + (73/210)c^*\varphi_\theta\varphi_{\theta\theta}^2 \\
& - (99/2800)\varphi_\theta^5 - (157/175)c^*\varphi_\theta^4 \\
& + (347/700)c^*\varphi_\theta^3 + (288/175)c^*\varphi_\theta^2\} \\
& + \varepsilon^3\{(139/420)\varphi_\theta^3\varphi_{\theta\theta}^2 - (1867/3500)c^*\varphi_\theta^2\varphi_{\theta\theta}^2 \\
& - (549/700)c^*\varphi_\theta\varphi_{\theta\theta}^2 - (331/800)\varphi_\theta^6 \\
& + (12707/7000)c^*\varphi_\theta^5 + (3209/3500)c^*\varphi_\theta^4 \\
& - (2342/875)c^*\varphi_\theta^3 - (947/350)c^*\varphi_\theta^2\} \\
& + \dots, \dots\dots\dots (3.2)
\end{aligned}$$

さらに、正準変換を行って式(3.2)に対する Hamiltonian を求めると、結局次式が得られる。

$$\begin{aligned}
\mathcal{H} = & \{[(1/4) - (1/10)\varepsilon c^* - (347/700)\varepsilon^2 c^*] \\
& + (2342/875)\varepsilon^3 c^* + \dots\} + \{-(21/80) \\
& + (157/175)\varepsilon c^* - (3209/3500)\varepsilon^2 c^* + \dots\}\varepsilon\zeta \\
& + \{(99/2800) - (12707/7000)\varepsilon c^* + \dots\}\varepsilon^2\zeta^2 \\
& + \{(331/800) - \dots\}\varepsilon^3\zeta^3 + \dots\}\zeta^3 \\
& - [(1/2) - (19/20)\varepsilon c^* + (288/175)\varepsilon^2 c^*] \\
& - (947/350)\varepsilon^3 c^* + \dots\}c^*\zeta^2 + q\zeta \\
& + [(1/12) - \{(3/20) - (73/210)\varepsilon c^* + (549/700)\varepsilon^2 c^* \\
& - \dots\}\varepsilon\zeta - \{(71/1400) + (1867/3500)\varepsilon c^* \\
& + \dots\}\varepsilon^2\zeta^2 + \{(139/420) + \dots\}\varepsilon^3\zeta^3 + \dots]\zeta_\theta^2 \\
& \dots\dots\dots (4)
\end{aligned}$$

3. 砕波に対する Catastrophe モデル

3.1 砕波モデル

ここでは、非線形長波に対する Catastrophe ポテンシャルを求め、砕波のモデル化を試みる。式(4)は波動方程式(1)の近似解であり、この解曲面は、基本的には2変数(ζ, ζ_θ)に関する3次式で近似されることがわかる。Catastrophe 理論⁴⁾によると、2変数の3次式で表わされるポテンシャルの型は、

$$V_i = X^3 \pm XY^2 + a_i Y^2 + b_i X + c_i Y, \quad i=1, 2 \quad \dots\dots\dots (5)$$

の2種類である。ここに、 a_i, b_i および c_i はパラメータで、複号の正・負はそれぞれ Hyperbolic umbilic および Elliptic umbilic に対応する。 $(X, Y) \equiv (\zeta, \zeta_\theta)$ と等置し、 ζ^3 および $\zeta\zeta_\theta^2$ の係数の符号を調べれば、式(4)が Elliptic umbilic に相当することがわかる。したがって、式(4)を式(5)の型に変形すれば、砕波モデルが得られるものと期待される。そのためには、次のような方法を採用する。

ζ^3 の係数には $\varepsilon\zeta$ による高次の補正項が存在し、 $\varepsilon\zeta$ と εc^* の間には関数関係がある。したがって、これら高次の項のもつ情報を局所波速 εc^* を通して低次の項に還元することにより、各係数を修正する。すなわち、 $\zeta_\theta=0$ のときの $\varepsilon\zeta$ と εc^* の関係を用いるが、ここでは1つの手段として $q \equiv \mathcal{H} \equiv 0$ のときの関係式を用いることにす

る。式(4)において $\eta_\theta=0$ として、 $\varepsilon\zeta$ について逐次近似により解くと、次式が得られる。

$$\begin{aligned}
& \{(1/4) - (5/8)\varepsilon c^* + (9/8)\varepsilon^2 c^* \\
& - (2821/1400)\varepsilon^3 c^* + \dots\}\zeta^3 \\
& - \{(1/2) - (19/20)\varepsilon c^* + (288/175)\varepsilon^2 c^* \\
& - (947/350)\varepsilon^3 c^* + \dots\}c^*\zeta^2 \equiv 0 \quad \dots\dots\dots (6)
\end{aligned}$$

ζ_θ^2 の係数の根は波の特異点であり、最大波の条件式を与える。同様に、式(6)から $\zeta\zeta_\theta^2$ の係数は、 $(3/20) - (517/2100)\varepsilon c^* + (1544/2625)\varepsilon^2 c^* - \dots$ と修正される。

以上をまとめると、砕波モデルとなるエネルギー曲面は、次式で与えられる。

$$\begin{aligned}
\mathcal{H} = & [(1/4) - (5/8)\varepsilon c^* + (9/8)\varepsilon^2 c^* \\
& - (2821/1400)\varepsilon^3 c^* + \dots]\zeta^3 \\
& - [(1/2) - (19/20)\varepsilon c^* + (288/175)\varepsilon^2 c^* \\
& - (947/350)\varepsilon^3 c^* + \dots]c^*\zeta^2 + q\zeta \\
& + [(1/12) - \{(3/20) - (517/2100)\varepsilon c^* \\
& + (1544/2625)\varepsilon^2 c^* - \dots\}\varepsilon\zeta]\zeta_\theta^2 \quad \dots\dots\dots (7)
\end{aligned}$$

ここで、

$$\eta = \varepsilon\zeta, \quad C/\sqrt{gh} = 1 + \varepsilon c^*, \quad X = x - (C/\sqrt{gh})t \quad \dots\dots\dots (8)$$

において、式(7)をさらに変形すると次式が得られる。

$$\begin{aligned}
& \{a_0(\varepsilon c^*) - \eta\}\eta_X^2 \\
& = a_1(\varepsilon c^*)\{a_4(\varepsilon c^*) - a_3(\varepsilon c^*)\eta + a_2(\varepsilon c^*)\eta^2 - \eta^3\} \\
& \quad \dots\dots\dots (9)
\end{aligned}$$

ここに、

$$\left. \begin{aligned}
a_0(\varepsilon c^*) &= (5/9) + (517/567)\varepsilon c^* \\
& \quad - (121799/178605)\varepsilon^2 c^* + \dots, \\
a_1(\varepsilon c^*) &= 12a_0(\varepsilon c^*) \cdot P, \\
a_2(\varepsilon c^*) &= \{(1/2) - (19/20)\varepsilon c^* + (288/175)\varepsilon^2 c^* \\
& \quad - (947/350)\varepsilon^3 c^* + \dots\}\varepsilon c^*/P, \\
a_3(\varepsilon c^*) &= \varepsilon^2 q/P, \\
a_4(\varepsilon c^*) &= \varepsilon^3 \mathcal{H}/P, \\
P &= (1/4) - (5/8)\varepsilon c^* + (9/8)\varepsilon^2 c^* \\
& \quad - (2821/1400)\varepsilon^3 c^* + \dots \\
& \quad \dots\dots\dots (10)
\end{aligned} \right\}$$

式(9)および(10)が砕波モデルの基礎式であり、次のような解が得られる。式(9)右辺の3次式の3実根をそれぞれ $\eta_1, -\eta_2, -\eta_3$ ($\eta_1 > 0, \eta_3 \geq \eta_2 \geq 0$) とし、 η_X^2 の係数の根を η_4 とすると、波形、波長、静水面と波の谷との距離は、それぞれ次式で与えられる。

$$\left. \begin{aligned}
\eta &= -\eta_2 + (\eta_1 + \eta_2) \operatorname{cn}^2 u / (1 - k^2 \operatorname{sn}^2 \tilde{\gamma} \cdot \operatorname{sn}^2 u) \\
|X| &= 2\alpha\beta \{ \operatorname{dn}^2 \tilde{\gamma} \cdot u + \operatorname{sn} \tilde{\gamma} \cdot \operatorname{dn} \tilde{\gamma} / \operatorname{cn} \tilde{\gamma} \cdot \Pi(u, \tilde{\gamma}) \} \\
& \quad \dots\dots\dots (11)
\end{aligned} \right\}$$

$$L/h = 4\alpha\beta K \{ \operatorname{dn}^2 \tilde{\gamma} + \operatorname{sn} \tilde{\gamma} \cdot \operatorname{dn} \tilde{\gamma} / \operatorname{cn} \tilde{\gamma} \cdot Z(\tilde{\gamma}) \} \quad \dots\dots\dots (12)$$

$$\begin{aligned}
\delta/h &= 2\alpha\beta \cdot (H/L) \cdot (\operatorname{dn} \tilde{\gamma} / \operatorname{cn} \tilde{\gamma})^2 \\
& \quad \cdot \{ E/k^2 + (2 - \operatorname{sn}^2 \tilde{\gamma} - 1/k^2)K \\
& \quad + \operatorname{sn} \tilde{\gamma} / \operatorname{cn} \tilde{\gamma} \cdot \operatorname{dn} \tilde{\gamma} \cdot (2 - \operatorname{sn}^2 \tilde{\gamma} - 1/k^2 / \operatorname{sn}^2 \tilde{\gamma}) \\
& \quad \cdot K \cdot Z(\tilde{\gamma}) \} \quad \dots\dots\dots (13)
\end{aligned}$$

ここに,

$$\left. \begin{aligned} \alpha^2 &= 1/a_1(\varepsilon c^*), \\ \beta^2 &= (\eta_4 + \eta_2)/(\eta_1 + \eta_3), \\ \operatorname{sn}^2 \gamma &= (\eta_1 + \eta_3)/(\eta_4 + \eta_3), \\ \mu^2 &= (\eta_1 + \eta_2)/(\eta_4 + \eta_3), \\ k^2 &= (\eta_1 + \eta_2)(\eta_4 + \eta_3)/(\eta_4 + \eta_2)(\eta_1 + \eta_3) \end{aligned} \right\} \dots (14)$$

であり, $H/h = \eta_1 + \eta_2$: 波高, K, E : 第1種および第2種の完全楕円積分, $\operatorname{sn}, \operatorname{cn}, \operatorname{dn}$: Jacobi の楕円関数, k^2 : 母数, Z : ゼータ関数, Π : パイ関数である.

$\eta_1 \rightarrow \eta_4$ のとき砕波が生じ, 式 (11)~(13) は次のようになる.

$$\left. \begin{aligned} \eta_0 &= -\eta_2 + (\eta_1 + \eta_2) \cdot (\cosh u - 1/\mu \cdot \sinh u)^2 \\ |X| &= 2\alpha u \end{aligned} \right\} \dots (15)$$

$$L_b/h = 2\alpha \log \{(1+\mu)/(1-\mu)\} \dots (16)$$

$$\partial_b/h = -\eta_3 + 4\alpha/\mu \cdot (H_b/L_b) \dots (17)$$

その波頂角は,

$$\omega = \pi - 2 \tan^{-1} (1/\alpha/\mu \cdot H_b/h) \dots (18)$$

で与えられる. 前報において述べたように, 上式で表わされる波形は, 厳密な意味での砕波波形でなく, 漸近的に近づく極限の波形を表わすと考えるべきである.

$k^2=1$ のときには孤立波が得られ, 次式で表わされる.

$$\left. \begin{aligned} \eta &= \eta_1 \cdot \operatorname{sech}^2 u / (1 - 1/\beta^2 \cdot \tanh^2 u) \\ |X| &= 2\alpha \beta \{u - 1/\beta \cdot \log \sqrt{(\beta + \tanh u)/(\beta - \tanh u)}\} \end{aligned} \right\} \dots (19.1)$$

$$\eta_0 = \eta_1 \exp \{-|X|/\alpha\} \dots (19.2)$$

3.2 波の各理論の比較

(1) 孤立波

波高と波速の関係は, 次式で与えられる.

$$\frac{H}{h} = \left\{ \frac{1 - (19/10)\varepsilon c^* + (576/175)\varepsilon^2 c^{*2} - (947/175)\varepsilon^3 c^{*3} + \dots}{1 - (5/2)\varepsilon c^* + (9/2)\varepsilon^2 c^{*2} - (2821/350)\varepsilon^3 c^{*3} + \dots} \right\} 2\varepsilon c^* \dots (20)$$

上式と従来の理論との比較を 図-1 に示す. 波速は, 白丸で示されている Longuet-Higgins ら⁵⁾の数値計算値および破線で表わされている Fenton⁶⁾の9次近似式とほぼ一致するが, Longuet-Higgins らの値に見られるような最大波近くでの曲率の急激な変化と, それに伴う2価関数の特性は表わされていない. 式 (20) を反転し, べき級数で近似すると,

$$\begin{aligned} \varepsilon c^* &= (1/2) \cdot (H/h) - (3/20) \cdot (H/h)^2 \\ &\quad + (3/56) \cdot (H/h)^3 - (309/5600) \cdot (H/h)^4 \\ &\quad + \dots \end{aligned} \dots (21)$$

が得られる. この式は, Fenton の9次近似式

$$(1 + \varepsilon c^*)^2 = \sum_{n=0}^9 A_n \cdot (H/h)^n \dots (22)$$

から得られる式と4次のオーダーまで完全に一致している.

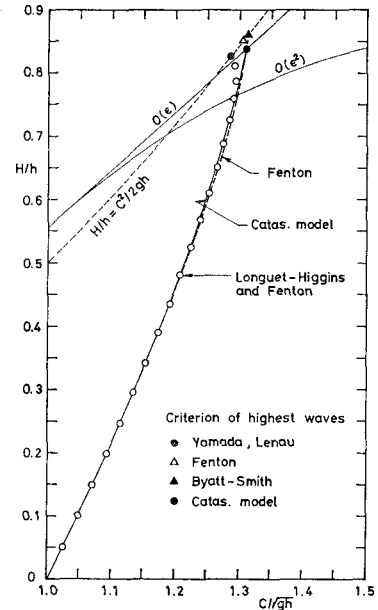


図-1 孤立波の波高と波速の関係

ηx^2 の係数の根

$$\eta = (5/9) + (517/567)\varepsilon c^* - (121799/178605)\varepsilon^2 c^{*2} + \dots \dots (23)$$

と, 波高-波速曲線(20)との交点において砕波が生じる. 式 (23) の ε のオーダーが1次および2次の場合を 図-1 に細い実線で併記してある. 同図からわかるように, Yamada⁷⁾, Lenau⁸⁾の最大波高に近い値が得られるのは, 式 (23) の ε^1 のオーダーまで用いた場合である. また,

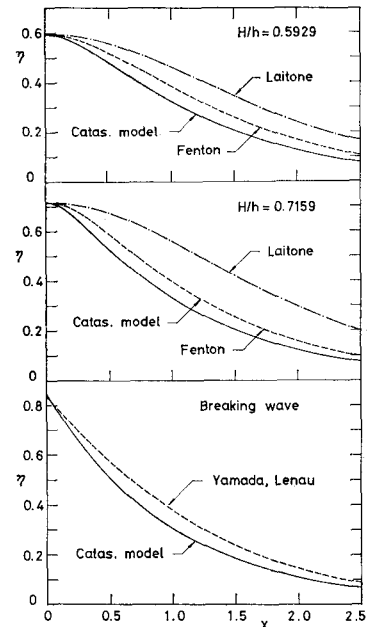


図-2 孤立波の波形

式 (23) は、式 (20) より ε のオーダーが2次低く、この級数がどちらの曲線近くに収束するかが判断できない。したがって、以下では、上述の結果を参照して、最大波の条件式として次式を用いることにする。

$$\eta = (5/9) + (517/567) \varepsilon c^* \dots\dots\dots (24)$$

このときの最大波高および波速は、それぞれ $H_0/h = 0.8375$ および $C_0/\sqrt{gh} = 1.309$ となり、波頂角は約 99° である。

図-2 は、Byatt-Smith⁹⁾ が積分方程式から波形の計算を行った波および Yamada, Lenau の砕波波形について、孤立波の波形を比較したものである。ただし、Byatt-Smith の波形は、Fenton の波形とほとんど同じである。本研究による波形は、1 つには最大波の波頂角が小さいため、他のいずれの波形よりも変化が急であり、全体的にやせた波形となっている。しかし、これらの波形との差違は、波高が変化してもほぼ一定である。一方、クノイド波¹⁰⁾ から得られる孤立波のそれは、波高が大きくなると、増大することがわかる。

(2) 周期波

まず、砕波限界曲線は、図-3 に示す通りである。式 (23) あるいは (24) を最大波の条件式として用いたいずれの場合も、これらの曲線は Miche¹¹⁾ あるいは首藤¹²⁾

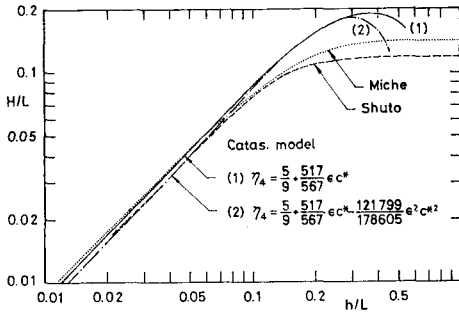


図-3 各種の砕波限界

の曲線と同じ傾向を示し、長波理論の適用範囲を示す $h/L < 0.05$ 程度においてはよく一致することがわかる。式 (23) を用いた場合には首藤の砕波限界に近く、式 (24) を用いた場合よりも H/L の値は小さいが、前述したように、この場合には孤立波の最大波の値に問題がある。したがって、式 (24) を用いて周期波の諸量を計算し、その特性について従来の理論結果と比較検討する。

まず、波形には、孤立波の場合と同じ傾向が見られる。図-4 は、周期 $T\sqrt{g/h}$ に対する波速の変化を $h/H = 2$ について示したものである。Stokes の第1および第2定義による波速は、それぞれ $T\sqrt{g/h} = 10, 20$ において Stokes 波の波速と交わる。これらの交点をクノイド波理論の適用限界と考えると、本研究による波速は、これらの波速より最大 5% 程度大きな値となっている。図-5 は、 $T\sqrt{g/h} = 20$ のときの h/H に対する波速の変化を

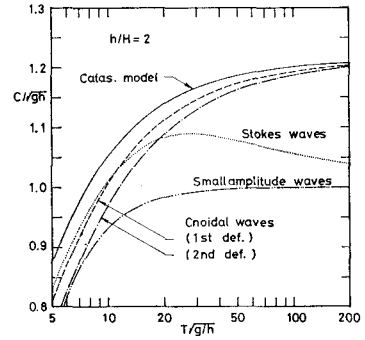


図-4 周期と波速の関係

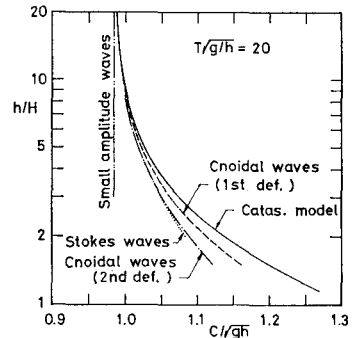


図-5 波高と波速の関係

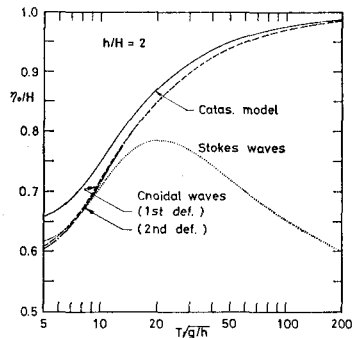


図-6 周期と静水面上の峰高の関係

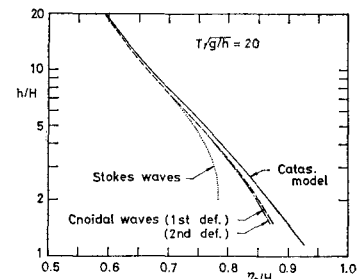


図-7 波高と静水面上の峰高の関係

示すものである。波高の増大とともにこれらの曲線の差違は大きくなり、クノイド波の最大波付近では、第1定義による波速と約4%、第2定義のそれとは約8%前後の差違が生じている。

次に、波形の1特性である静水面よりの最大水位変動 η_0/H の変化を、 h/H および $T\sqrt{g/h}$ をパラメータとして表わすと、図-6 および 7 が得られる。これらの場合にも、本研究による値が最大5%程度大きくなっている。

以上のように、Catastrophe モデルからは、静水面と波の谷との距離はより小さく、かつ、波速の大きい波、すなわち、長周期側の波が得られることがわかる。この原因として、砕波モデルにおいて波速 sc^* で表わされた級数のオーダーが不十分であること、あるいは、3.1において砕波モデルを得るときに、定数 $q \cong \mathcal{H} \cong 0$ としたときの波高と波速の関係を用いて、 η の4次以上の項を波速 sc^* の項として近似したことなどが考えられる。波高が大きいとき、いずれの理論が有用かは、これらの理論において導入されている種々の仮定を満たすような実験装置と実験条件から得られる結果による検証を待つべきである。

最後に、波の水粒子速度について述べる。たとえば、水平成分は、

$$\begin{aligned} u/\sqrt{gh} &= A - (z^2/2)A_{xx} + (z^4/24)A_{xxxx} - \cdots \\ A &= \eta + \{(1/2)\eta^2 - sc^*\eta + (1/2)\eta_{xx}\} + \cdots \end{aligned} \quad (25)$$

と表わされるが、式(11)を見ればわかるように、波形には特異点が含まれている。したがって、砕波波高に近づくと上式の高次の微係数が大きくなり、 $u/\sqrt{gh}$ が $C/\sqrt{gh}$ よりもかなり大きくなる。クノイド波理論においても、最大波付近で同様の現象が生じるが、これは、前述したように砕波波高近くでの波速は微妙に変化し、この変化が波形あるいは砕波時の波頂角に敏感に影響することと関係があり、この現象の改善は、砕波モデルの級数をより正確に表現することに依存しているであろう。

4. 結 言

Catastrophe 理論を適用して砕波モデルを作り、波形、波速、砕波限界について従来の理論と比較検討した結果を要約すると、次のようになる。

1) 砕波限界は、 $h/L < 0.05$ 程度において Miche, 首藤の限界曲線とほぼ一致する。2) 孤立波および周期波の波形は、クノイド波のそれよりも鋭い峰を有し、その変化は急である。3) 周期波の波速は、従来の理論値よりもやや大きな値を示し、孤立波のときには、砕波波高のごく近くを除いて、従来の理論結果とほぼ一致する。

最後に、本研究にあたり終始温かい御指導いただいた京都大学防災研究所 土屋義人教授、ならびに御鞭撻をいただいた琉球大学理工学部 河野二夫教授に深く謝意を述べるものである。

参 考 文 献

- 1) Thom, R.: The two-fold way of catastrophe theory, Lecture Notes in Mathematics, 525, Springer-Verlag, pp. 235-252, 1976.
- 2) 筒井茂明: Catastrophe 理論による砕波の試み, 第24回海岸工学講演会論文集, pp. 35-39, 1977.
- 3) 土屋義人・安田孝志: 新しいクノイド波理論の試み, 第21回海岸工学講演会論文集, pp. 65-71, 1974.
- 4) Thom, R.: Structural Stability and Morphogenesis, (Trans. by D. H. Fowler and C. H. Waddington), Benjamin Inc., Massachusetts, 348 p., 1975.
- 5) Longuet-Higgins, M. S. and J. D. Fenton: On the mass, momentum, energy and circulation of a solitary wave. II, J. Roy. Soc. Lond., A. 340, pp. 471-493, 1974.
- 6) Fenton, J. D.: A ninth-order solution for the solitary wave, J. Fluid Mech., pp. 257-271, 1972.
- 7) Yamada, H.: On the highest solitary wave, Rep. Res. Inst. Appl. Mech., Kyushu Univ., 5, pp. 53-67, 1957.
- 8) Lenau, C. W.: The solitary wave of maximum amplitude, J. Fluid Mech., pp. 309-320, 1966.
- 9) Byatt-Smith, J. G. S.: An exact integral equation for steady surface waves, Proc. Roy. Soc. Lond., A. 315, pp. 405-418, 1970.
- 10) Laitone, E. V.: Series solutions for shallow water waves, J. Geo. Res., Letters, pp. 995-998, 1965.
- 11) 石原藤次郎・本間 仁編: 応用水理学, 中II, 丸善, 東京, 592 p., 1958.
- 12) 首藤伸夫: 有限振幅波について—高次級数解による進行波の砕波限界—, 土木研究所報告, 第111号, pp. 1-9, 1961.