

有限要素法による波動解析について (第1報)

滝 川 清*・田 淵 幹 修**

1. はじめに

複雑な海底形状を有する沿岸での波の挙動を、より現実的な状況の下で解析する事はなかなか困難な事であり有限要素法を用いた例^{1),2)}も数少ないようである。本研究は、この様な波の挙動を、水深の変化を直接考慮し、かつ、波の有限振幅性を含めて有限要素法を用い解析を行うものである。

速度ポテンシャルを持つ波の運動の基礎式は変分原理に支配される事が Luke³⁾ によって示されているが、これを用いての一般の開領域における進行波に対する計算例は見受けられないようである。本法は、この変分原理を応用して、さらに、井島⁴⁾のポテンシャル接続法を利用した開境界処理を行う事により、一般的な状況での波動問題への有限要素法の適用を試みたものであって、解析方法については、すでに文献⁵⁾に発表した。今回は、この解析方法の計算精度について検討を加え、若干の適用計算を行なったのでここに報告するものである。

2. 有限振幅非定常波動解析

(1) 基礎方程式

図-1 に示す水深方向に2次元の領域での流体の運動を考える。解析領域 $V(\eta)$ は表面変動量 $\eta(x, t)$ の関数である。座標系は、

静水面上に x 軸を取り、これと垂直上向きに y 軸を取る。また、流体は速度ポテンシャル $\Phi(x, y, t)$ を有するとして、時間を t 、重力の加速度を g と表わすと運動の支配方程式は解析領域 $V(\eta)$ 内で

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} = 0 \quad \dots\dots\dots (1)$$

である。また、境界条件は以下ようになる。まず、自

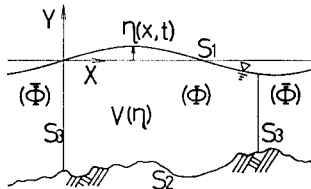


図-1 解析領域

由表面境界 S_1 上では

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} + \frac{1}{2} \left\{ \left(\frac{\partial \Phi}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \Phi}{\partial y} \right)^2 \right\} + g\eta = 0 \quad \dots\dots\dots (2)$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial n} = n_y \frac{\partial \eta}{\partial t} \quad \dots\dots\dots (3)$$

ここで、 n は境界外向き法線方向を意味し、 n_y は n の y 軸方向余弦である。また、海底や構造物などの不透過な境界面 S_2 では、

$$\frac{\partial \Phi}{\partial n} = 0 \quad \dots\dots\dots (4)$$

である。さらに、流体中に設けた仮想の左右両境界 S_3 では、 $\partial \Phi / \partial n$ の条件として

$$\frac{\partial \Phi}{\partial n} = \frac{\partial \bar{\Phi}}{\partial n} \quad \dots\dots\dots (5)$$

とする。ここに、 $\bar{\Phi}$ は解析領域外部での速度ポテンシャルを意味する。この $\bar{\Phi}$ の表示および境界 S_3 での処理については、本節(4)で説明している。

(2) 変分原理

変動する解析領域 $V(\eta)$ での波の運動は式(1)から式(4)で示される境界値問題であって、これは変分原理によって支配されることが Luke³⁾ によって示されている。ここでは、さらに仮想境界 S_3 での条件式(5)を考慮して、ある時刻 t での汎関数 χ を次のように考える。

$$\begin{aligned} \chi = & \frac{1}{2} \iint_{V(\eta)} \left\{ \left(\frac{\partial \Phi}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \Phi}{\partial y} \right)^2 \right\} dx dy + \frac{g}{2} \int_{S_1} \eta^2 dx \\ & + \int_{S_1} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial t} \right) \eta dx - \int_{S_1} \left(\frac{\partial \eta}{\partial t} \right) \Phi dx - \int_{S_3} \left(\frac{\partial \bar{\Phi}}{\partial n} \right) \Phi dS_3 \\ & \dots\dots\dots (6) \end{aligned}$$

変分を受ける独立量は Φ および η であって、 $(\partial \Phi / \partial t)$ 、 $(\partial \eta / \partial t)$ および $(\partial \bar{\Phi} / \partial n)$ は変分を取るに際して定数であると見做される。式(6)の第1変分 $\delta \chi$ を取り、結果のみを示す次のようになる。

$$\begin{aligned} \delta \chi = & - \iint_{V(\eta)} \left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} \right) \delta \Phi dx dy \\ & + \int_{S_1} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial n} - n_y \frac{\partial \eta}{\partial t} \right) \delta \Phi dS_1 + \int_{S_2} \frac{\partial \Phi}{\partial n} \delta \Phi dS_2 \\ & + \int_{S_3} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial n} - \frac{\partial \bar{\Phi}}{\partial n} \right) \delta \Phi dS_3 \end{aligned}$$

* 正会員 工修 熊本大学助手 工学部環境建設工学科
** 正会員 熊本大学講師 工学部環境建設工学科

$$+\int_{S_1}\left[\frac{\partial\Phi}{\partial t}+\frac{1}{2}\left\{\left(\frac{\partial\Phi}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial\Phi}{\partial y}\right)^2\right\}+g\eta\right]\delta\eta dx \quad (7)$$

すなわち、式(6)の汎関数を停留にする条件として、式(1)および境界条件式(2)から式(5)の全部が同時に得られる。次節においてこの汎関数を用いる方法を示す。

(3) 有限要素法による定式化

解析領域 V を簡単のため三角形要素群に分割して、1つの要素 i, j, m 内の速度ポテンシャル Φ をその節点値 $\{\Phi\}^T = [\Phi_i, \Phi_j, \Phi_m]$ で表現すると、 Φ は x, y の1次式で近似され次式で表わされる。

$$\Phi = [N_i, N_j, N_m][N] \{\Phi\} \quad (8)$$

ここに、 $[N]$ は3節点要素での形状関数である。これを用いると1つの要素内で

$$\frac{\partial\Phi}{\partial x} = \left[\frac{\partial N}{\partial x}\right] \{\Phi\} = \mathbf{B}^T \{\Phi\} \quad (9)$$

$$\frac{\partial\Phi}{\partial y} = \left[\frac{\partial N}{\partial y}\right] \{\Phi\} = \mathbf{C}^T \{\Phi\} \quad (10)$$

である。一方、表面変動量 $\eta(x, t)$ は、表面上の i, j 節点間で x の1次式で近似すると、

$$\eta = [L_i, L_j][L] \{\eta\} \quad (11)$$

である。 $[L]$ は線要素での形状関数である。

ところで、この場合の解析領域 V は独立な変関数 η の関数であり、上述の関係式をそのまま用いると、自由表面に關係する要素の形状関数 $[N]$ の中に未知量 η が入って来てしまい、

非線形な多元連立方程式を解かねばならない。しかるに、ここでは、式(6)の汎関数を用いるために、Newton-Raphson⁶⁾ 法的手法を用いる事にする。

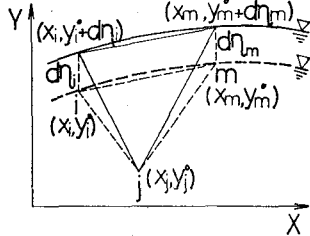


図-2 表面要素

いま、時刻 $t=t_0$ と $t=t_0+\Delta t$ での Φ および η をそれぞれ Φ_0, η_0 および Φ, η と書き、 Δt 間の増分を $d\Phi, d\eta$ とすると次式が成立する。

$$\Phi = \Phi_0 + d\Phi, \quad \eta = \eta_0 + d\eta \quad (12)$$

さらに、図-2に示すように、2節点 i, m が自由表面上にある三角形要素の場合、表面が $d\eta_i, d\eta_m$ だけ変動すると、三角形の面積 Δ は次のように表わされる。

$$\Delta = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} 1, & x_i, & y_i^0 + d\eta_i \\ 1, & x_j, & y_j^0 \\ 1, & x_m, & y_m^0 + d\eta_m \end{vmatrix} = \Delta_0 + \mathbf{P}^T \{d\eta\} \quad (13)$$

ここで、 Δ_0 は時刻 $t=t_0$ での三角形の面積を意味し、また、 $\{d\eta\}^T = [d\eta_i, 0, d\eta_m]$ である。そこで、この面積

の変化を考慮して式(9)、式(10)を書き改めると次のようになる。ただし、 $d\Phi, d\eta$ の2次以上の項は無視している。

$$\frac{\partial\Phi}{\partial x} = (\mathbf{B}_0^T + \{d\eta\}^T \mathbf{B}_1^T) \{\Phi_0 + d\Phi\} \quad (14)$$

$$\frac{\partial\Phi}{\partial y} = (\mathbf{C}_0^T + \{d\eta\}^T \mathbf{C}_1^T) \{\Phi_0 + d\Phi\} \quad (15)$$

ここに、 $\mathbf{B}_0, \mathbf{C}_0$ は式(9)、式(10)で示す $\mathbf{B}, \mathbf{C}$ の時刻 $t=t_0$ での係数マトリックスを意味する。また、マトリックス $\mathbf{B}_1, \mathbf{C}_1$ および $\mathbf{P}$ の表示については文献⁵⁾を参照されたい。また、 i 点のみが自由表面上にある場合は、以上の諸式で $d\eta_m$ を0とすればよい。

以上の関係式を用いて、式(6)の汎関数をマトリックス表示すると次式のようにになる。

$$\begin{aligned} \chi = & \frac{1}{2} \sum_V \{\Phi_0 + d\Phi\}^T [(\mathbf{B}_0 + \mathbf{B}_1 \{d\eta\})(\mathbf{B}_0^T + \{d\eta\}^T \mathbf{B}_1^T) \\ & + (\mathbf{C}_0 + \mathbf{C}_1 \{d\eta\})(\mathbf{C}_0^T + \{d\eta\}^T \mathbf{C}_1^T)] \\ & \times \{\Phi_0 + d\Phi\} (\Delta_0 + \mathbf{P}^T \{d\eta\}) \\ & + \frac{g}{2} \sum_{S_1} \{\eta_0 + d\eta\}^T \mathbf{L} \{\eta_0 + d\eta\} + \sum_{S_1} \{\eta_0 + d\eta\}^T \mathbf{L} \left\{ \frac{\partial\Phi}{\partial t} \right\} \\ & - \sum_{S_1} \{\Phi_0 + d\Phi\}^T \mathbf{L} \left\{ \frac{\partial\eta}{\partial t} \right\} - \sum_{S_3} \{\Phi_0 + d\Phi\}^T \mathbf{S} \left\{ \frac{\partial\Phi}{\partial n} \right\} \end{aligned} \quad (16)$$

ここで、 $\mathbf{L}$ は自由表面 S_1 上での積分項であって、

$$\mathbf{L} = \int_e [L]^T [L] dx \quad (17)$$

である。また $\mathbf{S}$ は、ここでは境界 S_3 上での積分項であって、図-3に示す様に境界面上の積分を考えて、

$$\mathbf{S} = \int_e [N_i, N_j]^T [N_i, N_j] dS \quad (18)$$

である。また、 $\sum_V, \sum_{S_1}, \sum_{S_3}$ はそれぞれ解析領域 V 、境界 S_1 および境界 S_3 に関する総和を意味する。

さて、式(16)を $d\Phi$ および $d\eta$ に関して変分 $\delta\chi$ をとり、この $\delta\chi$ から停留条件として、 $d\Phi, d\eta$ に関する2組の連立方程式が得られ次式のようにになる。なお、変分をとるに際しては $d\Phi, d\eta$ に関する2次以上の項は無視している。

$$\begin{aligned} \sum_V \{ & [\mathbf{B}_0^T \Phi_0 \mathbf{I} + \mathbf{B}_0 \Phi_0^T] \mathbf{B}_1 + (\mathbf{C}_0^T \Phi_0 \mathbf{I} + \mathbf{C}_0 \Phi_0^T) \mathbf{C}_1 \} \Delta_0 \\ & + (\mathbf{B}_0 \mathbf{B}_0^T + \mathbf{C}_0 \mathbf{C}_0^T) \Phi_0 \mathbf{P}^T \{d\eta\} \\ & + \sum_V (\mathbf{B}_0 \mathbf{B}_0^T + \mathbf{C}_0 \mathbf{C}_0^T) \Delta_0 \{d\Phi\} \\ = & - \sum_V (\mathbf{B}_0 \mathbf{B}_0^T + \mathbf{C}_0 \mathbf{C}_0^T) \Phi_0 \Delta_0 + \sum_{S_1} \mathbf{L} \left\{ \frac{\partial\eta}{\partial t} \right\} \\ & + \sum_{S_3} \mathbf{S} \left\{ \frac{\partial\Phi}{\partial n} \right\} \quad (19) \\ \{ & \sum_V \mathbf{P} \Phi_0^T (\mathbf{B}_0 \Phi_0^T \mathbf{B}_1 + \mathbf{C}_0 \Phi_0^T \mathbf{C}_1) + g \sum_{S_1} \mathbf{L} \} \{d\eta\} \\ & + \sum_V \mathbf{P} \Phi_0^T (\mathbf{B}_0 \mathbf{B}_0^T + \mathbf{C}_0 \mathbf{C}_0^T) \{d\Phi\} \end{aligned}$$

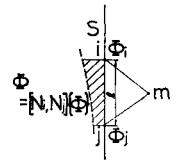


図-3 境界上積分

$$= -\frac{1}{2} \sum_{\mathcal{F}} \mathbf{P} \Phi_0^T (\mathbf{B}_0 \mathbf{B}_0^T + \mathbf{C}_0 \mathbf{C}_0^T) \Phi_0 - g \sum_{S_1} \mathbf{L} \eta_0 \\ - \sum_{S_1} \mathbf{L} \left\{ \frac{\partial \Phi}{\partial t} \right\} \dots\dots\dots (20)$$

ここで、 $\mathbf{I}$ は単位マトリックス、 Φ_0 、 η_0 はそれぞれ $\{\Phi_0\}$ 、 $\{\eta_0\}$ を意味する。

上の両式は、 $\partial\Phi/\partial t$ 、 $\partial\eta/\partial t$ なる時刻 t での状態量を含んだままであるので、ここではこれを次のように考える。

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} = \frac{2}{\Delta t} d\Phi - \left(\frac{\partial \Phi}{\partial t} \right)_0, \quad \frac{\partial \eta}{\partial t} = \frac{2}{\Delta t} d\eta - \left(\frac{\partial \eta}{\partial t} \right)_0 \\ \dots\dots\dots (21)$$

サフィックス $()_0$ は時刻 $t=t_0$ での値を意味する。

(4) 開境界処理

境界 S_3 を開放された境界とするための処理を開境界処理と呼んで、ここにその方法を説明する。

図-1 に示したような系で、 x の負の方向から波が入射する場合を考え、入射位置 ($x=x_0$) での水深を h_0 とし、通過位置での水深を h_t とする。この場合、構造物等の周辺では、いわゆる散乱波が発生するが、境界 S_3 をこれらの構造物から十分な位置に設ける事によって、この種の波を境界 S_3 で無視することができて、入射および通過の位置での速度ポテンシャルは次のように表現される。

$$\left. \begin{array}{l} \text{入射位置: } \bar{\Phi}_{\text{inp}} = \bar{\Phi}_i + \bar{\Phi}_r \\ \text{通過位置: } \bar{\Phi}_{\text{out}} = \bar{\Phi}_t \end{array} \right\} \dots\dots\dots (22)$$

ここに、 $\bar{\Phi}_i$ 、 $\bar{\Phi}_r$ はそれぞれ入射および反射波を意味し、 $\bar{\Phi}_t$ は通過波を意味する。いま、簡単のために、入射波 $\bar{\Phi}_i$ が正弦波の場合を考えると

$$\left(\frac{\partial \bar{\Phi}}{\partial n} \right)_{\text{inp}} = \frac{ga}{\sigma} \cdot l_{x_0} \cdot k_0 (e^{-ik_0 x_0} - A_r e^{ik_0 x_0}) \\ \times \frac{\cosh k_0 (h_0 + y)}{\cosh k_0 h_0} e^{i\sigma t} \dots\dots\dots (23)$$

$$\left(\frac{\partial \bar{\Phi}}{\partial n} \right)_{\text{out}} = \frac{ga}{\sigma} \cdot l_{x_t} \cdot k \cdot A_t \cdot e^{-i\int k dx} \cdot \frac{\cosh k (h_t + y)}{\cosh k h_t} e^{i\sigma t} \\ \dots\dots\dots (24)$$

である。ここに、 a 、 σ はそれぞれ入射波の振幅および周波数 ($2\pi/T$; T は周期) を意味し、 k_0 、 k は入射および通過位置での波数 ($k_0=2\pi/L$; L は入射波の波長) を意味する。また、 l_{x_0} および l_{x_t} は各位置での x 軸の外向き方向余弦である。 A_r は反射波を表わす定数、 A_t は通過波を表わす定数であって、これを $A_t^* = A_t \cdot e^{-i\int k dx}$ とすると、 A_t と A_t^* は物理的な意味は変化しない。そこで、以後は簡単のため A_t^* の $*$ は除く事にする。

さて、上述の式 (23)、式 (24) および式 (21) を式 (19)、式 (20) に代入すると、未知量 $d\Phi$ 、 $d\eta$ の和に等しい個数だけの連立方程式が得られるが、反射波および通過波に関する未知量 A_r 、 A_t の個数だけの条件式が不足する。そこで、新たに、この境界 S_3 の内部と外部と

の energy flux ($\partial\Phi/\partial t$)・($\partial\Phi/\partial n$) の連続を考えることにする。ここで、mass flux $\rho \cdot \partial\Phi/\partial n$ は、すでに汎関数中に導入され連続を考慮しているので、結局このことは、近似的に次式で表現される。

$$\int_{S_3} \frac{\partial \Phi}{\partial t} dS_3 = \int_{S_3} \frac{\partial \bar{\Phi}}{\partial t} dS_3 \dots\dots\dots (25)$$

この積分を水底から自由表面 η_0 まで行くと、入射および通過の位置でそれぞれ次式を得る。

$$\sum_{S_3-\text{inp}} \bar{S} \left\{ \frac{\partial \Phi}{\partial t} \right\} = -ga (e^{-ik_0 x_0} + A_r e^{ik_0 x_0}) \\ \times \frac{\sinh k_0 (h_0 + \eta_0)}{k_0 \cosh k_0 h_0} e^{i\sigma t} \dots (26)$$

$$\sum_{S_3-\text{out}} \bar{S} \left\{ \frac{\partial \Phi}{\partial t} \right\} = -g \cdot a \cdot A_t \frac{\sinh k (h_t + \eta_0)}{k \cosh k h_t} e^{i\sigma t} \\ \dots\dots\dots (27)$$

ここで、 $\bar{S}$ は、図-3 に示す境界上での積分項であり、次式で表わされる。

$$\bar{S} = \int_e [N_i, N_j] dS \dots\dots\dots (28)$$

以上から、時刻 $t=0$ での初期値を与えて、式 (19)、式 (20) および式 (26)、式 (27) を連立させて解く事により全未知量が同時に決定され、計算を進めていくことができる。

3. 微小振幅定常波動解析

微小振幅波の場合には、自由表面の条件式 (2) の非線形項が無視され、表面は静水面と考えるから、解析領域 V は固定される。そこで、次のような汎関数 χ を考える。

$$\chi = \frac{1}{2} \iint_V \left\{ \left(\frac{\partial \Phi}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \Phi}{\partial y} \right)^2 \right\} dx dy \\ + \frac{1}{g} \int_{S_1} \left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} \right) \Phi dS_1 - \int_{S_3} \left(\frac{\partial \bar{\Phi}}{\partial n} \right) \Phi dS_3 \dots (29)$$

変分を受ける独立量は Φ のみであって、 $(\partial^2 \Phi / \partial t^2)$ 、 $(\partial \bar{\Phi} / \partial n)$ は変分をとるに際しては定数であると見做される。この第1変分 $\delta\chi$ は次式のようなである。

$$\delta\chi = - \iint_V \left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} \right) \delta\Phi dx dy \\ + \int_{S_1} \left\{ \frac{\partial \Phi}{\partial n} + \frac{1}{g} \left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} \right) \right\} \delta\Phi dS_1 \\ + \int_{S_2} \frac{\partial \Phi}{\partial n} \delta\Phi dS_2 + \int_{S_3} \left\{ \frac{\partial \Phi}{\partial n} - \left(\frac{\partial \bar{\Phi}}{\partial n} \right) \right\} \delta\Phi dS_3 \\ \dots\dots\dots (30)$$

これを停留にする条件として、微小振幅波の基礎式がすべて得られる。そこで、2. の場合と同様に有限要素法を適用して、三角形要素による定式化を行うこと、

$$\chi = \frac{1}{2} \sum_{\mathcal{F}} \{\Phi\}^T (\mathbf{B}\mathbf{B}^T + \mathbf{C}\mathbf{C}^T) \{\Phi\} \cdot \mathbf{A} \\ + \frac{1}{g} \sum_{S_1} \{\Phi\}^T \mathbf{S} \left\{ \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} \right\} - \sum_{S_3} \{\Phi\}^T \mathbf{S} \left\{ \frac{\partial \bar{\Phi}}{\partial n} \right\} \\ \dots\dots\dots (31)$$

である。これを Φ に関して変分をとると、停留条件として結局次式を得る。

$$\sum_V (BB^T + CC^T) \{\phi\} \cdot \Delta + \frac{1}{g} \sum_{S_1} S \left\{ \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} \right\} - \sum_{S_3} S \left\{ \frac{\partial \Phi}{\partial n} \right\} = 0 \quad (32)$$

ここで、速度ポテンシャル $\Phi = ga/\sigma \cdot \phi(x, y) e^{i\sigma t}$ としてポテンシャル関数 $\phi(x, y)$ を導入すると上式は書き改められて、次式を得る。

$$\sum_V (BB^T + CC^T) \{\phi\} \cdot \Delta - \frac{\sigma^2}{g} \sum_{S_1} S \{\phi\} - \sum_{S_3} S \left\{ \frac{\partial \phi}{\partial n} \right\} = 0 \quad (33)$$

ϕ は境界 S_3 外部でのポテンシャル関数を意味する。一方、開境界処理も 2. の場合と同様に考えることができ、 $\partial \phi / \partial n$ は式 (23)、式 (24) から、また新たな条件式は、式 (25) より積分範囲を水底から静水面まで考えると次式の様になる。

$$\sum_{S_3-\text{inp}} \bar{S} \{\phi\} = i(e^{-ik_0 x_0} + A_T e^{ik_0 x_0}) \frac{\tanh k_0 h_0}{k_0} \quad (34)$$

$$\sum_{S_3-\text{out}} \bar{S} \{\phi\} = i \cdot A_t \frac{\tanh k h_t}{k} \quad (35)$$

4. 適用計算例

上述した方法の解析精度を検討するために、まず一定水深上に波が完全通過する場合を考え、これに微小振幅定常波の計算を行い、メッシュの分割方法について検討したのが 図-4 および 図-5 である。

図-4 は、入射波を $\sigma^2 h/g = 1.0$ として、水深方向の等分割数 N と、 x 軸方向の節点間隔 $\Delta x/L$ を変化して計算した時の表面波形の最大誤差 $|1 - |\eta'|_{\max}|$ をプロットしたものである。ここに、 $\eta' = \eta/a$ (a は入射波の振幅) である。これによると、 $\Delta x/L$ を小さくするほど、分割数 N を大きくとるほど精度は良くなり、 $\Delta x/L < 1/20$, $N > 8$ するとこの場合の最大誤差は 1% 以下である。また、図中の破線は、各場合の三角形要素の形状 $\Delta x/\Delta y$ を連ねたものであるが、計算の精度に最も影響を及ぼすのは $\Delta x/L$ である。例えば、 $\Delta x/L = 1/15$ とすると、 N を大きくしても最大誤差を 1% 以下にする事は難しいことがわかる。

図-5 は、図-4 の場合の $\Delta x/L$ を $1/40$ として、入射波を $\sigma^2 h/g = 0.1$ から 2.6 と変化させた時の同様の図である。これによると、 $\sigma^2 h/g$ が

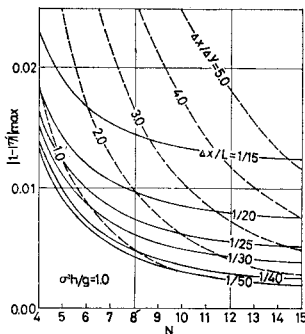


図-4

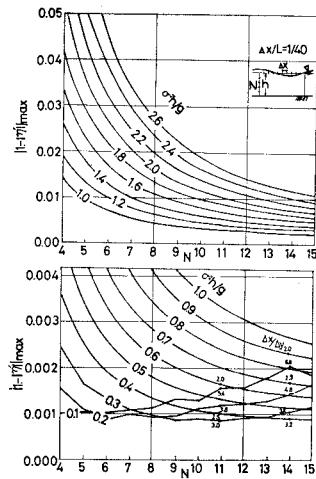


図-5

小さいほど、精度は良くなる。すなわち、入射波の速度ポテンシャルの分布が水深方向に一樣となるに従って、この方向の分割数 N が小さくても高い精度の解を得ることができる。逆に、 $\sigma^2 h/g$ が大の場合には、ある程度以上の精度を得るためには N を大とする必要がある。また、 $\sigma^2 h/g$ が小さい時、例えば $\sigma^2 h/g = 0.1$ の場合、 N を大すると逆に誤差が増加するが、これは図中にも示すように、三角形の形状が極端に偏平となるためであって、形状による誤差は、この程度の order で現われることがわかる。また、この場合の通過率および反射率に関する誤差は最大で 10^{-3} 以下である。なお、計算に際して x 軸方向の節点数は 31 とした。

図-6 は解析方法の検証のために計算した 1 例であって、図中に示す不透透潜堤の反射率を、微小振幅波動解

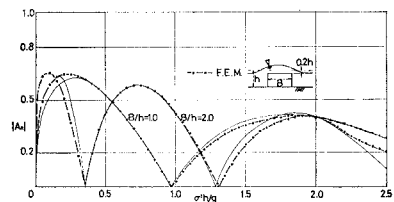


図-6 不透透潜堤の反射率

析によって計算したものである。要素の分割は、潜堤上では水深方向に $N=4$, x 軸方向に 20 分割して、さらに、この両側では、 $N=10$, および x 軸方向に 30 分割とし、総節点数 821 である。図中の実線は、井島⁷⁾によるもので、これと同様、反射率 $|A_r|$ が入射波 ($\sigma^2 h/g$) によって変化する様子が計算できる。

図-7 の (a), (b) 両図は、一樣な水深上に、 $h/L_0 = 0.02$ の波が入射する場合を、本法の有限振幅非定常波動解析によって計算した例であり、 $\Delta t/T$ の検討を行なったものである。要素の分割は、 $N=6$, x 軸方向に 120 分割して、総節点数 847, $\Delta x/L = 1/20$ としている。計算の初期値は微小振幅波の理論解を用い、時刻 $t/T = 3.0$ での表面波形 η/a_0 (a_0 は深海波の振幅 $a_0 = H_0/2$) を示している。(a) 図から、 $(\Delta t/\Delta x) \cdot L/T > 1$ の場合、解は発散しないが、波形が他の場合と著しく変化して得られ、

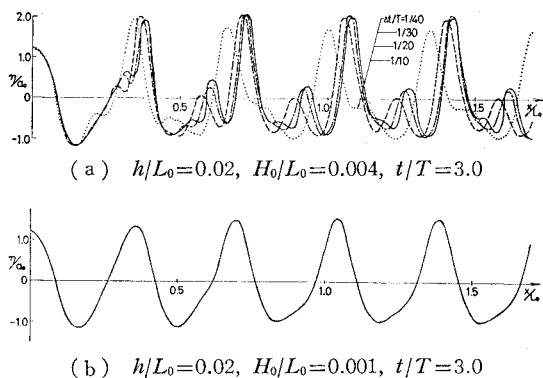


図-7 有限振幅波動

実用上は、少なくとも $(\Delta t/\Delta x) \cdot L/T \leq 1$ の必要があると思われる。(b)図は、入射波の波高 $H_0/L_0=0.001$, $\Delta t/T=1/20$ としたものである。また、この(a),(b)両図から、入射波を正弦波としている影響は、入射波の波長 L の1.5倍程度であり、これ以上ではその影響は現われないようである。

図-9の(a),(b)両図は、複雑な海底形状の変化を簡単のために図-8に示す様な条件で波が溯上する場合を計算した例である。(a)図は、微小振幅波の定常解による結果を時刻 $t/T=10.0$ で図示している。また、ここでは示していないが、この場合の浅水度係数は理論上の微小振幅波のものと良く一致した結果が得られている。

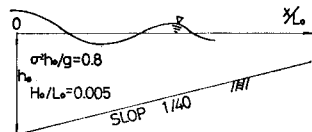
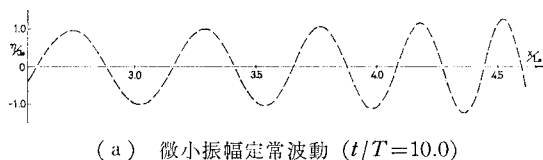
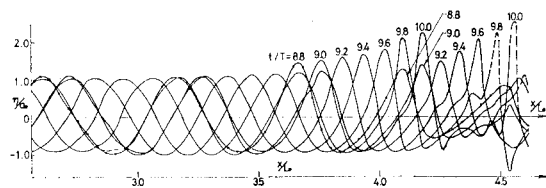


図-8

(a) 微小振幅定常波動 ($t/T=10.0$)

(b) 有限振幅非定常波動

図-9 溯上

(b)図は、この場合の有限振幅非定常解析の計算結果である。時刻 $t=0$ では、表面は静水面にあるとして初期値はすべての点で0を与えている。これに、図-8に示す入射波を与えた時の破波と思われる時刻付近での波形を示したものである。図中、 $t/T=8.8$ の波形上に示

す・印が表面の計算点である。これらの波形には、浅水変形と有限振幅性が表われ、碎波の様子が表現できていると思われる。また、図中、 $x/L_0=3.7$ 付近の $t/T=8.8$ および $t/T=9.0$ の波高は1周期後の波高 ($t/T=9.8, 10.0$) よりも高くなっている。これは、実験でも観察されるように、静水中に波を侵入させると、定常的な波形となる前に、それより高い波高となる現象を表わしているものと思われる。

5. あとがき

ここでは、微小振幅定常波および有限振幅非定常波の両者の場合について、簡単のために2次元問題として解析を行なっているが、同様に、3次元問題への定式化を行なうこともできる。また、本解析方法は、複雑な境界形状の場合だけでなく、浮体の運動等を含む広範な波動問題に適用できて、ことに非定常問題としての取り扱い是不規則な入射波の場合に対しても適用可能である。有限振幅波動の解析に際しては、表面節点のみならず、逐次、内部節点の移動も行なっているため、大きな波形勾配の波に対しても計算を進める事ができる。また、ここでは、時間差分を式(12)、式(21)のNewton-Raphson 法的手法を用いているが、これに関して、さらに高精度の解が得られる様、検討を進めている。

なお、実際の計算に当たって、計算機の容量や経費節約の面から、元数の多い連立方程式を解く事は難しいが、今回の計算の場合、この連立方程式の係数マトリックスのバンド幅 M についての直接解法を用いる事によって、 N 元の連立方程式を通常の約 M/N 倍の容量 (例えば、図-9の非定常計算の場合では $N=962$, $M=20$ としている。) で計算できるプログラムを作製しこれを用いた。

参考文献

- 1) 坂井藤一・月岡康一: 波動解析への有限要素法の適用 (第3報), 第22回海岸工学学会講演会論文集, 1975.
- 2) 松田健志・岩崎敏夫: 有限要素法による長波の変形の解析, 第22回海岸工学学会講演会論文集, 1975.
- 3) Luke, J. C.: A variational principle for a fluid with a free surface, J. Fluid Mech., Vol. 27, Part 2, pp. 395-397, 1967.
- 4) 井島武士: 最近の波浪理論における境界値問題とその応用, “1971年度水工学に関する夏期研修会講義集”, 土木学会.
- 5) 滝川 清・田渕幹修: 有限要素法による浅海域での波動解析について, 熊本大学工学部研究報告, 第27巻, 2号, 1978.
- 6) Ikegawa, M. and K. Washizu: Finite element method applied to analysis of flow over a spillway crest, Dep. Aeronautics, Univ. of Tokyo
- 7) 井島武士・佐々木富雄: 潜堤の効果に関する理論的研究, 第18回海岸工学講演会論文集, 1971.