

エ ッ チ 波 の 応 用

浜 田 徳 —*

1. トラップされた波の考えを実用上の問題に拡張してゆくため、単調な傾斜海岸の上のエッチ波を地形の変化した場合に応用する。単調に沖方に向い無限の深さまで傾斜した一様な海岸のエッチ波の解は文献 1) に求められており、その固有値は

$$\sigma^2 = gk \sin(2n+1)\theta, \quad n=0, 1, 2, \dots \dots (1)$$

である。波の振幅は沖方に向い減少し、 n は波形が静水面を切る数である。

その長波近似の解としてはたとえば文献 2) から

$$\sigma^2 = gk(2n+1) \tan \theta, \quad n=0, 1, 2, \dots \dots (2)$$

式 (1), (2) による運動の性質を検討すると、実用上は $n=0$ で $\theta \leq 10^\circ$, $n=2$ で $\theta \leq 5^\circ$ では式 (2) による長波近似を用いてよい。

この研究では $n=0$ の基本周波数の場合を考察する。

式 (2) は

$$\sigma^2 = gk\theta \dots \dots \dots (3)$$

となり、地形の変化に応じた式 (3) の変化、それにともなう波形の変化を求める。著者が文献 3), 4) で示したこの種のトラップされた波のエネルギーと質量輸送の問題はとりあげず、また非粘性として取扱ってゆく。

長波近似式はたとえば文献 2) から

$$(xF_x)_x + \left(\frac{\sigma^2}{g\theta} - k^2 x \right) F = 0 \dots \dots \dots (4)$$

ただし x 軸は水深 0 の点を $x=0$ として、沖方に向い静水面に沿ってとられ、 k は波数、 F は波の表面振幅である。

式 (4) の解法にはこれを変形して超幾何関数を用いる方法 (文献 5) 等) があるが、この研究では直接解を用いる。

式 (4) の 2 つの解を F_1, F_2 とすれば、 $x=0$ で収束する解 F_1 は

$$\begin{aligned} F_1 = a_0 & \left\{ 1 - K^2 x + \frac{1}{4} (K^4 + k^2) x^2 - \frac{1}{36} (K^6 \right. \\ & + 5k^2 K^2) x^3 + \frac{1}{576} (K^8 + 14K^4 k^2 + 9k^4) x^4 \\ & - \frac{1}{14400} (K^{10} + 30K^6 k^2 + 89K^2 k^4) x^5 \\ & \left. + \frac{1}{518400} (K^{12} + 55K^8 k^2 + 439K^4 k^4 \right. \\ & + 225k^6) x^6 - \frac{1}{25401600} (K^{14} + 91K^{10} k^2 \\ & + 1519K^6 k^4 + 3429K^2 k^6) x^7 \\ & + \frac{1}{1625702400} (K^{16} + 140K^{12} k^2 \\ & + 4214K^8 k^4 + 24940K^4 k^6 \\ & \left. + 11025k^8) x^8 - \dots \right\} \dots \dots \dots (5) \end{aligned}$$

$$\text{ただし, } K^2 = \frac{\sigma^2}{g\theta} = \alpha^2 k \dots \dots \dots (6)$$

式 (5), (6) で $K^2 = \frac{\sigma^2}{g\theta} = k + \Delta$ とし、 Δ は $\Delta^2 \rightarrow 0$ の微小量とすれば

$$\begin{aligned} F_1 = a_0 e^{-kx} - a_0 \Delta x & \left(1 - \frac{kx}{2} + \frac{1}{4.5} k^2 x^2 \right. \\ & - \frac{1}{18} k^3 x^3 + \frac{1}{78.26} k^4 x^4 - \frac{1}{469.56} k^5 x^5 \\ & \left. + \frac{1}{3006.81} k^6 x^6 - \frac{1}{24054.5} k^7 x^7 + \dots \right) \\ & \dots \dots \dots (7) \end{aligned}$$

となり、 $\Delta \neq 0$ であるかぎり、上式の右辺第 2 項は $x \rightarrow +\infty$ で発散する。このように F_1 は式 (2) が満足されるときだけ $x \rightarrow +\infty$ で収束して

$$F_1 = a_0 e^{-kx} L_n(2kx) \dots \dots \dots (8)$$

ただし L_n は Laguerre の多項式である。

$x=0$ で発散する解 F_2 は

$$\begin{aligned} F_2 = F_1 & \cdot \left(\frac{b_0}{a_0} + \log kx \right) + a_0 \left\{ 2K^2 x \right. \\ & - \frac{1}{4} (k^2 + 3K^4) x^2 + \frac{1}{108} (11K^6 + 37K^2 k^2) x^3 \\ & - \frac{1}{3456} (25K^8 + 278K^4 k^2 + 81k^4) x^4 \\ & + \frac{1}{432000} (137K^{10} + 3510K^6 k^2 \\ & + 7393K^2 k^4) x^5 - \frac{1}{15552000} (147K^{12} \\ & + 7185K^8 k^2 + 46533K^4 k^4 + 12375k^6) x^6 \\ & \left. + \frac{1}{5334336000} (1089K^{14} + 90279K^{10} k^2 \right. \\ & \left. + 5334336000 \right) \dots \dots \dots \end{aligned}$$

$$+1\,301\,391K^6k^4+2\,155\,401K^2k^6)x^7-\dots\} \quad \dots\dots\dots(9)$$

F_2 は $x \rightarrow +0$ で発散し, $\frac{b_0}{a_0}$ は境界条件により決定せられる.

つぎに水深 h の水平な底面上の解は, $x \rightarrow +\infty$ で消失する解をとれば, 2 次元の長波近似式から振幅で

$$De^{-\gamma x}, \quad \gamma^2 = k^2 - \frac{\sigma^2}{gh} \quad \dots\dots\dots(10)$$

$x = x_M$ で左右対称となるなめらかな解をとれば, 同様に

$$D'\{e^{-\gamma x} + e^{\gamma(x-2\gamma x_M)}\} \quad \dots\dots\dots(11)$$

2. 海岸から一様な傾斜で深くなり, $x = x_0$ で水平な底に接続する場合

この場合の解としては kx_0 が十分大きい時の近似解が文献 6) 式 (11) に示されており, また類似した水底形状の場合の性質が文献 7) Fig. 2 に示されているが, 両者とも数学的な操作に主眼がおかれ, 応用に便利になっていない.

ここでは kx_0 が $+0$ から十分大きい値にいたる全領域の性質を調べる.

式 (5), (10) についての波の性質を用い, $x = x_0$ で x 方向の水位, 流量の接続条件を用いて, 特性式は

$$\frac{\partial F_1}{\partial x} + \gamma F_1 = 0, \quad kx = kx_0 \quad \text{にて}, \quad \dots\dots(12)$$

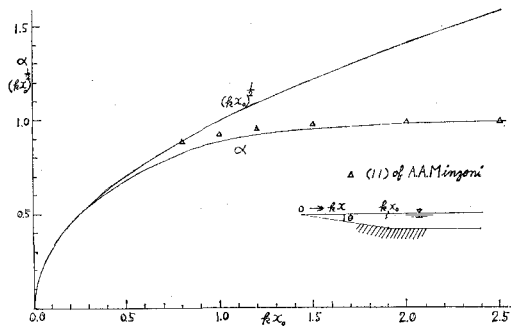
γ は式 (10) より

$$\gamma = k\sqrt{1 - \frac{\sigma^2}{g\theta k^2 x_0}} \quad \dots\dots\dots(13)$$

これに式 (6) を用いて, $\alpha = \frac{\sigma}{(g\theta k)^{1/2}}$ を決定する. kx_0 が十分大きい領域の近似には式 (7) を用い, kx_0 が十分小さい領域の近似には式 (5), (12) より

$$\sigma = (kx_0)^{1/2} \left(1 - \frac{5}{32} k^2 x_0^2\right) (g\theta k)^{1/2} \quad \dots\dots\dots(14)$$

を用いる. その中間領域では特性値を内挿するように逐次近似の数値計算を行った (α はなめらかに変化している).



図—1 エッジ波の固有値

図—1 が計算結果を示している. 同図にはまた一様水深 h の領域の長波についての特性値

$$\sigma = (kx_0)^{1/2} (g\theta k)^{1/2} \quad \dots\dots\dots(15)$$

による $(kx_0)^{1/2}$ と文献 6) 式 (11) による kx_0 が大きい時の α の近似値とが記入せられている.

これにより (i) kx_0 が $0.0 \sim 0.3$ では一様水深部の長波の波速と, エッジ波の波速とは非粘性の状態と一致する. (ii) $kx_0 \geq 2.5$ では $\alpha \rightarrow 1$ となり, 一様勾配海岸と一致すると考えてよい. また文献 7) Fig. 2 と対応させれば, $0 \leq x \leq x_0$ で水底が直線勾配からゆるい凹型となっている場合の固有値 α は $0 \sim x_0$ 間の平均的な θ を用いれば図—1 の α と $(kx_0)^{1/2}$ の両曲線の間に入るであろう.

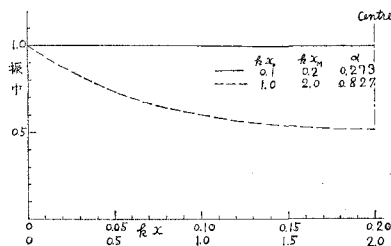
3. 水路の中心に対称な梯形水路の場合

この場合の特性式は式 (6), (11) から

$$\frac{\partial F_1}{\partial x} + \gamma \frac{1 - e^{-2\gamma(x_M - x_0)}}{1 + e^{-2\gamma(x_M - x_0)}} F_1 = 0,$$

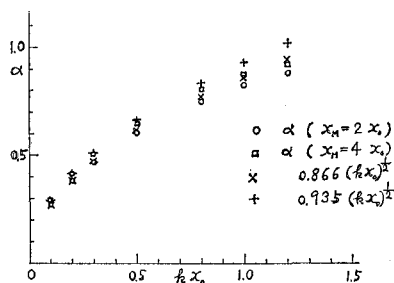
$kx = kx_0$ において $\dots\dots(16)$

$x_M > x_0$ であり, $\frac{1 - e^{-2\gamma(x_M - x_0)}}{1 + e^{-2\gamma(x_M - x_0)}}$ は α を式 (12) よりも小さくする効果を持つ. 式 (12) の場合と同様にして α を求める数値計算を行い, 式 (5), (11) により kx に対する振幅を決定したものが図—2 である.



図—2 梯形断面水路での振幅

これによると $kx_0 = 0.1$, $kx_M = 0.2$ (水路幅/波長 $= 0.06366$) のときは水路の横断方向の振幅の変化はほとんどなく, $kx_0 = 1.0$, $kx_M = 2.0$ (水路幅/波長 $= 0.6366$) のときは水路中央の振幅は水路端の振幅の 50% 程度となり, エッジ波の性質がつよくでている. こうした斜面部分の長い梯形水路の長波では波長が水路幅より 1 桁大きい位数のときは横断方向の振幅の変化は微小であり, 同じ位数のときは相当大きな横断方向の振幅の変化が生



図—3 梯形断面水路での波速

表-1

kx_0	x_0/L	α (式(12))	$\alpha(x_M=2x_0)$	$0.866(kx_0)^{1/2}$	$\alpha(x_M=4x_0)$	$0.935(kx_0)^{1/2}$	$(kx_0)^{1/2}$
0.0	0.0000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
0.1	0.0159	0.315	0.273	0.273	0.295	0.295	0.316
0.2	0.0318	0.444	0.386	0.387	0.417	0.418	0.447
0.3	0.0477	0.542	0.472	0.474	0.510	0.512	0.547
0.5	0.0795	0.680	0.606	0.612	0.653	0.661	0.707
0.8	0.1273	0.825	0.753	0.774	0.806	0.836	0.894
1.0	0.1591	0.885	0.827	0.866	0.876	0.935	1.000
1.2	0.1909	0.925	0.884	0.948	0.922	1.024	1.095
1.5	0.2387	0.958					1.224
2.0	0.3183	0.987					1.414
2.5	0.3978	0.995					1.581

ずると考えてよいであろう。

つぎに $\frac{1}{x_M} \int_0^{x_M} h(x) dx$ により平均水深を求め、これに対応する長波の伝播速度と現在の取扱いによる伝播速度とを比較したものが 図-3 である。 $x_M=2x_0$, $x_M=4x_0$ の 2 つの場合が示されているが、代表的な数値をあげると

kx_0	kx_M	C_h/C	水路幅/波長
0.5	1.0	1.010	0.318
0.5	2.0	1.012	0.636
1.0	2.0	1.047	0.636
1.0	4.0	1.067	1.273

平均水深を用いた伝播速度の方が多少大きく出ているが、波長が長いときは両者はほとんど一致することがわかる。 $kx_0=1.0$, $kx_M=2.0$ の場合、横断方向の振幅の変化は 50% に達しているが、 C_h/C は 1.047 である。

2., 3. において数値計算せられた α およびこれに関連する諸値を集めて表-1 に示す。

4. 水際線の近くに垂直壁がある場合

座標のとり方はこれまでと同じくし、水深 0 の個所を $x=0$ として、 $x>0$ の方向に単調に水深が増加するものとするが、 $x=x_0$ に垂直壁を設け、 $x \equiv x_1(>x_0)$ で水平な底に接続するものとする。このときの固有値の決定のための境界条件は式 (5), (9) の F_1, F_2 を用い

$$\frac{\partial}{\partial x}(F_1+F_2)=0 \quad x=x_0 \text{ にて} \cdots(17)$$

$$\frac{\partial}{\partial x}(F_1+F_2)+\gamma(F_1+F_2)=0 \quad x=x_1 \text{ にて} \cdots(18)$$

数値計算例として $kx_1=1.5$ の場合をとった。このとき $kx_0=0$ であれば $\alpha=0.958$ が表-1 から得られるから、垂直壁のため $\alpha>0.958$ となることを考慮して、 $\alpha=1$ の近傍の展開をとり

$$K^2 = \frac{\sigma^2}{g\theta} = k + \Delta \cdots \cdots \cdots(19)$$

において、 $\Delta^2 \rightarrow 0$ とする近似計算を行った。計算結果は

kx_0	α	b_0/a_0
0.00	0.921	—
0.02	0.954	59.894
0.05	0.994	24.249
0.10	1.043	12.406
0.15	1.076	8.484
0.20	1.103	6.491

となり、表-1 ($kx_0=0$) で $\alpha=0.958$ であることを考慮すれば、 α が 1 より離れた値は精度が低い。信頼出来ると思われる $kx_0=0.1$, $\alpha=1.043$ の場合をとり、 x 方向の振幅の変化を求めたものが 図-4 である。

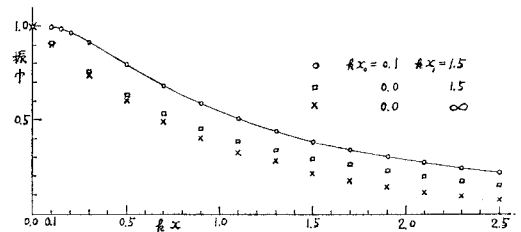


図-4 垂直壁のある場合の振幅

同図には $kx_0=0$, $kx_1=1.5$ の場合、また $x \rightarrow +\infty$ まですべて傾斜の場合の e^{-kx} が記入されているが、振幅の変化の性質は垂直壁の近傍を除けば、 $kx_0=0$, $kx_1=1.5$ の場合と類似している。波速は水深一様部の長波で $\alpha=1.224$ であり、 $\alpha=1.043$ は 0.958 とその中間に位置する。

以上境界条件を変化させてエッジ波の性質を検討したが、この結果は傾斜した海岸ないしは水深の変化する水路中の長波はその正確な表現のためには多少なりともエッジ波としての性質を考慮しなければならないことを示している。なお梯形水路の中の有限振幅の Bore を数値計算したものとしては文献 8) があり、その Fig. 2 に波数の増大とともに水路横断方向の振幅の変化が増大することが示されている。

記 号 表

- x : 水際線を原点とし, 静水面に沿って沖方にとられた水平軸
 θ : 水底の傾斜角 (数式中ではラディアンを用いる.)
 k : 海岸線に沿っての波の波数 ($k=2\pi/L$)
 σ : 同じく周波数 ($\sigma=2\pi/T$)
 F : 水底が傾斜した領域の波の表面振幅
 F_1 : F の成分のうち $x=0$ で収束する解
 F_2 : F の成分のうち $x=0$ で発散する解
 x_0 : 図—1~3 で傾斜底が水平底と接続する x 値
 図—4 では垂直壁の x 値
 x_1 : 図—4 で傾斜底と水平底の接続する x 値
 x_M : 梯形水路中央の x 値
 C_h : 水路の平均水深を用いた長波の波速

参 考 文 献

- 1) Ursell, F.: Edge waves on a sloping beach, Proc. Roy. Soc., A. 214, pp. 79~97, 1952.
- 2) Reid, R. O.: Effect of Coriolis force on edge waves (I). Investigation of the normal modes, J. Marine Res., Vol. 16, No. 2, pp. 109~144, 1958.
- 3) 浜田徳一: 水面波の 2, 3 の性質について, 港湾技術研究所報告, 第10巻, 第2号, pp. 121~144, 1971.
- 4) 浜田徳一: 海岸にトラップされる波の 2, 3 の性質, 第 21 回海岸工学講演会論文集, pp. 73~76, 1974.
- 5) 犬井鉄郎: 特殊函数 pp. 87~89, 1962.
- 6) Minzoni, A. A.: Nonlinear edge waves and shallow-water theory, J. Fluid Mech., Vol. 74, Part 2, pp. 369~374, 1976.
- 7) Grimshaw, R.: Edge waves: a long-wave theory for oceans of finite depth, J. Fluid Mech., Vol. 62, Part 4, pp. 775~791, 1974.
- 8) Preissmann, A. and J. A. Cunge: Low-amplitude undulating hydraulic jump in trapezoidal canals, J. Hydraulic Res., Vol. 5, No. 4, pp. 263~279, 1967.