

逓減せつ動法による擬 Stokes 波理論

土 屋 義 人*・安 田 孝 志**

1. 緒 言

本研究では、逓減せつ動法の若干の一般化を試みることににより、波の分散性が非線形性に対して微小パラメタ ε のオーダーだけ卓越した場合を取扱って、新しい一つの有限振幅波理論を第4次近似解まで展開する。

2. 波動方程式

波動方程式は、一様流を伴う擬 Stokes 波¹⁾に対するものと同じであり、次式で表わされる。

$$\begin{aligned} -c^*\eta_\sigma + \eta_{\sigma\sigma\sigma}/6 = & -\varepsilon\{3\eta_\sigma/2 + \eta_{\sigma\sigma\sigma\sigma}/15 - c^*\eta_{\sigma\sigma\sigma}/6 \\ & + c^{*2}\eta_\sigma/2\} - \varepsilon^2\{17\eta_\sigma v_{II}/630 - c^*\eta_{\sigma\sigma\sigma\sigma}/15 \\ & + 3\eta_\sigma\eta_{\sigma\sigma}/2 + 2\eta_{\sigma\sigma\sigma}/3 + c^{*2}\eta_{\sigma\sigma\sigma}/6 - 5c^*\eta_\sigma/2 \\ & - c^{*3}\eta_\sigma/2\} - \varepsilon^3\{31\eta_\sigma v_{III}/2835 + 2\eta_{\sigma\sigma}\eta_{\sigma\sigma\sigma} \\ & + 4\eta_\sigma\eta_{\sigma\sigma\sigma}/3 + 2\eta_{\sigma\sigma\sigma\sigma}/5 - 17c^*\eta_\sigma v_{III}/630 \\ & + c^{*2}\eta_\sigma v/15 - 7c^*\eta_\sigma\eta_{\sigma\sigma}/2 - c^*\eta_{\sigma\sigma\sigma} - c^{*3}\eta_{\sigma\sigma}/6 \\ & + 3\eta_\sigma^2/2 + 4c^*\eta_\sigma + c^{*4}\eta_\sigma/2\} \dots\dots\dots(1) \end{aligned}$$

ここに、 η : 水面変動、 $\sigma = \xi - c^*\tau$ 、 $\xi = \varepsilon^{1/2}(x/h - t\sqrt{g/h})$ 、 $\tau = \varepsilon^{3/2}t\sqrt{g/h}$ 、 $\varepsilon = (h/L)^2$ であり、また L : 波長、 h : 平均水深、および c^* は波速に対応する固有値である。上式は、 η に関する常微分方程式であるが、固有値 c^* を含むため、これを解くためには、 η および c^* に対して、せつ動解

$$\left. \begin{aligned} \eta &= \eta_1 + \varepsilon\eta_2 + \varepsilon^2\eta_3 + \dots \\ c^* &= c_0 + \varepsilon c_1 + \varepsilon^2 c_2 + \dots \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(2)$$

を仮定して、逐次求めていく必要がある。したがって、この理論では、特性曲線の表示を用いて固有値、すなわち波速の決定がなされるべきであるが、実際の計算ではせつ動解の誘導の過程において η と同時に c^* も決定されることになる。

3. 擬 Stokes 波の第4次近似解

まず、第1次近似解に対しては、式(1)から次式が導かれる。

$$-c_0\eta_{1\sigma} + \eta_{1\sigma\sigma\sigma}/6 = 0 \dots\dots\dots(3)$$

上式の解は、次式で表わされる。

$$\eta_1 = A_{10} + A_{11} \cos \vartheta + B_{11} \sin \vartheta \dots\dots\dots(4)$$

ここに、

$$\vartheta = (-6c_0)^{1/2}(x/L - ct/L) = (-6c_0)^{1/2}\sigma \dots\dots(5)$$

であり、式(4)は容易に次式に書き換えられる。

$$\eta_1 = A_{10} + A \cos(\vartheta + \delta) \dots\dots\dots(6)$$

なお、 $\vartheta=0$ のとき $\eta_1 = A_{10} + A$ とすれば、 $\delta=0$ とできる。未知定数 A_{10} および A は、波形に関する連続条件

$$\int_0^{2\pi} \eta d\vartheta = 0 \dots\dots\dots(7)$$

および波高 H に関する条件

$$H/h = \varepsilon^2(\eta_{\max} - \eta_{\min}) \dots\dots\dots(8)$$

によって、それぞれ次式のように決定される。

$$A_{10}=0, \quad A=\lambda_0/2\varepsilon^2, \quad \lambda_0=H/h \dots\dots(9)$$

また、波速を表わす未知定数 c_0 は、周期性の条件を式(5)に適用して、次式のように定められる。

$$c_0 = -2\pi^2/3 \dots\dots\dots(10)$$

ついで、第2次近似解に対しては、式(1)から次式が導かれる。

$$\begin{aligned} -c_0\eta_{2\sigma} + \eta_{2\sigma\sigma\sigma}/6 = & c_1\eta_{1\sigma} - 3\eta_1\eta_{1\sigma}/2 - \eta_{1\sigma\sigma\sigma\sigma}/15 \\ & + c_0\eta_{1\sigma\sigma\sigma}/6 - c_0^2\eta_{1\sigma}/2 \dots\dots\dots(11) \end{aligned}$$

この方程式の解として式(6)に示した第1次近似解に対応する特解のみを考えることにすれば、それは次式で示されるように永年項を含んだ形で一般的に表わされる。

$$\begin{aligned} \eta_2 = & \sigma A_{21} \cos \vartheta + \sigma B_{21} \sin \vartheta + A_{22} \cos 2\vartheta \\ & + B_{22} \sin 2\vartheta \dots\dots\dots(12) \end{aligned}$$

そこで、永年項が消えるように、上式を式(11)に代入し、係数を決定すれば、その結果は次式ようになる。

$$\begin{aligned} A_{21} = B_{21} = B_{22} = 0, \quad c_1 = 38\pi^4/45, \\ A_{22} = 3A^2/16\pi^2 \dots\dots\dots(13) \end{aligned}$$

これより、第2次近似解は、次式で表わされる。

$$\eta_2 = (3A^2/16\pi^2) \cos 2\vartheta \dots\dots\dots(14)$$

さらに、第3次および第4次近似解についても同様な計算をすれば、結局、第4次近似解はつぎのように表わされる。

まず、波形は次式で表わされる。

$$\begin{aligned} z'/h = & (\lambda_0/2) \cos \vartheta + (\lambda_0^3/16)\{3(2\pi h/L)^{-2} + 2 \\ & + (613/2160)(2\pi h/L)^2 \end{aligned}$$

* 正会員 工博 京都大学教授 防災研究所

** 正会員 工修 岐阜大学講師 工学部土木工学科

$$\begin{aligned} & -(27\lambda_0^3/128)(2\pi h/L)^{-6} \cos 2\theta \\ & +(\lambda_0^3/512)\{27(2\pi h/L)^{-4} \\ & +45(2\pi h/L)^{-2}\} \cos 3\theta \\ & +(27\lambda_0^3/2048)(2\pi h/L)^{-6} \cos 4\theta \quad \dots\dots(15) \end{aligned}$$

ここに、

$$\begin{aligned} \lambda_0 = & \sqrt[3]{\frac{128(2\pi h/L)^4}{9\{3+5(2\pi h/L)^2\}} \left(\frac{H}{h}\right)} \\ & \times \left[\sqrt[3]{1 + \frac{16384\pi^4}{243\{3+5(2\pi h/L)^2\}} \left(\frac{L^2 H}{h^3}\right)^{-2}} \right]^{1/2} + 1 \\ & - \sqrt[3]{1 + \frac{16384\pi^4}{243\{3+5(2\pi h/L)^2\}} \left(\frac{L^2 H}{h^3}\right)^{-2}} \right]^{1/2} - 1 \\ & \dots\dots\dots(16) \end{aligned}$$

ついで、波速は次式で表わされる。

$$\begin{aligned} c/\sqrt{gh} = & 1 - (2\pi h/L)^2/6 + (19/360)(2\pi h/L)^4 \\ & - (55/3024)(2\pi h/L)^6 \\ & + (2941/604800)(2\pi h/L)^8 \\ & + (9\lambda_0^3/64)\{(2\pi h/L)^{-2} + 1/2\} \quad \dots\dots(17) \end{aligned}$$

また、水平水粒子速度は、次式のようになる。

$$\begin{aligned} u/\sqrt{gh} = & (\lambda_0^3/16)\{1 - (2\pi h/L)^2/2\} \\ & + (\lambda_0/2)\{1 + (1/6)(2\pi h/L)^2\{3(z/h)^2 - 2\} \\ & + (1/120)(2\pi h/L)^4\{5(z/h)^4 - 20(z/h)^2 \\ & + 12\} + (1/15120)(2\pi h/L)^6\{21(z/h)^6 \\ & - 420(z/h)^4 + 756(z/h)^2 - 278\} \\ & - (3\lambda_0^3/64)(2\pi h/L)^{-2} \cos \theta \\ & + (\lambda_0^3/16)\{3(2\pi h/L)^{-2} + (1/2)\{12(z/h)^2 - 5\} \\ & + (1/2520)(2\pi h/L)^2\{5040(z/h)^4 \\ & - 12600(z/h)^2 + 3137\} \\ & - (27\lambda_0^3/128)(2\pi h/L)^{-6} \cos 2\theta \\ & + (\lambda_0^3/1024)\{54(2\pi h/L)^{-4} \\ & - 3(2\pi h/L)^{-2}\{81(z/h)^2 - 35\}\} \cos 3\theta \\ & + (27\lambda_0^3/2048)(2\pi h/L)^{-6} \cos 4\theta \quad \dots(18) \end{aligned}$$

なお、鉛直水粒子速度および圧力の表示については、前出の論文¹⁾を参照されたい。

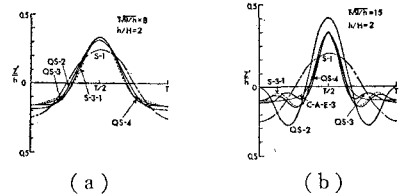
以上、通減せつ動法による Stokes 波流の波の第 4 次近似解を求めた。この理論では、すでに著者らが試みたクノイド波理論と同様に、線形長波を基準としたせつ動解であるが、得られた解の形はむしろ Stokes 波理論に類似している。事実、式 (17) で表わされる波速は、 $(2\pi h/L)$ を展開パラメータとして Stokes 波の波速の表示式を級数展開したものによく類似している。しかしながら、Stokes 波理論では水深を無限大に近づけて深水波の表示を得ることができるが、前述した理由からこの理論では水深が増すに従って、近似解の収束性が悪くなってくる。一方、 h/L をゼロに近づけた場合にも近似解の収束性が悪くなり、クノイド波理論に見られるような孤立波への収束は、この理論では見られない。このように、ここに示した理論は、Stokes 波理論とクノイド波理論の中間的特性を持つと推測されるが、解の形はむしろ

Stokes 波理論に類似していることから、この波を著者らは擬 Stokes 波と呼び、その理論を擬 Stokes 波理論と呼ぶことにする。

4. 擬 Stokes 波の特性

(1) 波 形

図—1 は、Stokes 波およびクノイド波理論による波形と比較したもので、図中 QS-1, QS-2, QS-3 および QS-4 はそれぞれ擬 Stokes 波理論の第 1 次, 第 2 次, 第 3 次および第 4 次近似解, また C-A-E-3 および S-3-1 はそれぞれクノイド波理論²⁾の第 3 次近似解および波速の第 1 定義を用いた Stokes 波理論の第 3 次近似解を示す。

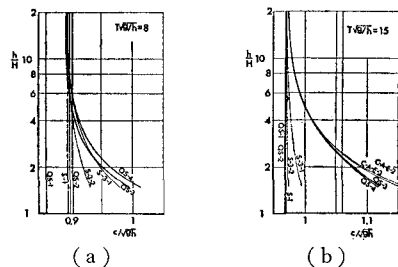


図—1 Stokes 波およびクノイド波の波形との比較

これから、 T を周期として $T\sqrt{g/h}$ が大きくなるに従って、波形に関する近似解の収束性は悪くなり、 $T\sqrt{g/h} \geq 15$ においては高次の周波数成分が卓越し、2 次波の発生が見られるようになる。かような高周波成分波は、近似度を高めるに従って平滑化されることから、 $T\sqrt{g/h} \geq 15$ ではさらに高次近似解が必要になると言えよう。ついで、Stokes 波との比較に関しては、QS-3 が S-3-1 と良く対応しており、いずれも第 3 次近似解であることから、波形に関しては両者の対応が良好であるといえる。さらに、クノイド波との比較では、 $T\sqrt{g/h} = 10$ 付近においてよく対応しているが、 $T\sqrt{g/h}$ が大きくなるに従って両者の相違が顕著になることがわかっている。

(2) 波 速

図—2 は、各理論による波速を比較したものの一例である。図中の記号は、図—1 と同様である。まず、近似解の収束性については、 $T\sqrt{g/h} = 8$ から 30 までの範囲において計算した結果、一様な収束性が認められ、波形の場合と異なって近似解の収束性が良好であることがわか



図—2 Stokes 波およびクノイド波の波速との比較

る。しかしながら、波速に対する非線形効果は第3次近似解以上の高次において現れることから、第4次近似解の結果で十分な精度を期待することは若干無理であろう。つぎに、Stokes 波との比較では、波形の場合と異なり、 $T\sqrt{g/h}=8$ 付近において最も良く対応しており、 $T\sqrt{g/h}=6$ および $T\sqrt{g/h} \geq 15$ では両者の相違が顕著になる。また、クノイド波との比較では、 $T\sqrt{g/h}=10 \sim 15$ において良く対応しているが、 $T\sqrt{g/h} \geq 15$ ではその相違が大きくなることから、擬 Stokes 波はクノイド波に比べて非線形効果の導入が十分でないことがわかる。

(3) 水平水粒子速度

図-3 は、波峰時での水平水粒子速度の鉛直分布を示したものであり、図中の記号は図-1 と同じである。こ

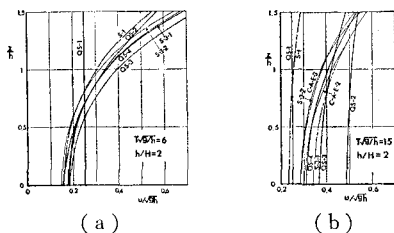


図-3 水平水粒子速度の鉛直分布と Stokes 波およびクノイド波との比較

れより、近似解の収束性は、波形の場合と同様な傾向を示し、 $T\sqrt{g/h}=6$ において最も良好であり、 $T\sqrt{g/h}$ が大きくなるに従って悪くなるが、 $T\sqrt{g/h}=6$ から 30 の範囲ではほぼ一様な収束性を示すことがわかる。また、 $T\sqrt{g/h}$ が大きくなって波の長波性が卓越すると、QS-1 は S-1 とよく対応するようになり、波速の場合と同様、分散性に対する近似は、 $T\sqrt{g/h} \geq 15$ では第1次近似解で十分となることがわかる。つぎに、Stokes 波との比較では、 $T\sqrt{g/h}=6$ から 30 の範囲において QS-4 と S-3-1 および S-3-2 との対応は良好であり、さらにクノイド波との比較では、波形および波速の場合と同様、 $T\sqrt{g/h}=10$ 付近において最も良く対応し、 $T\sqrt{g/h}$ が大きくなるに従ってそれらの相違も大きくなることがわかる。

(4) エネルギーおよびエネルギーフラックス

単位面積当りの位置エネルギーは、次式で表わされる。

$$E_p/\rho gh^2 = (1/\rho gh^2 T) \int_0^T \int_h^{h+z'} \rho g z dz \\ = (\lambda_0^2/16)[1 + (3\lambda_0^2/64)\{3(2\pi h/L)^{-4} \\ + 4(2\pi h/L)^{-2}\}] + \dots \dots \dots (19)$$

同様に、運動エネルギーは次式で表わされる。

$$E_k/\rho gh^2 = (1/\rho gh^2 T) \int_0^T \int_0^{h+z'} (\rho/2)(u^2 + w^2) dz dt \\ = (\lambda_0^2/16)[1 + (191/3780)(2\pi h/L)^6 \\ + (3\lambda_0^2/64)\{3(2\pi h/L)^{-4} \\ + 7(2\pi h/L)^{-2}\}] + \dots \dots \dots (20)$$

さらに、エネルギーフラックスは次式のようにになる。

$$W/\rho gh^2 \sqrt{gh} = (1/\rho gh^2 \sqrt{gh} T) \int_0^T \int_0^{h+z'} \\ -\rho \phi_t \phi_x dz dt \\ = (\lambda_0^2/8)[1 - (1/2)(2\pi h/L)^2 \\ + (3/8)(2\pi h/L)^4 - (5/432)(2\pi h/L)^6 \\ + (9\lambda_0^2/64)\{(2\pi h/L)^{-4} \\ + (3/2)(2\pi h/L)^{-2}\}] + \dots \dots (21)$$

以上の諸式を各近似解ごとに数値計算した結果によれば、波のエネルギーの表示での擬 Stokes 波の近似解の収束性は、 $T\sqrt{g/h}$ の増大とともに良好になり、また Stokes 波およびクノイド波との対応については、 $T\sqrt{g/h}=10$ において最も良く、 $T\sqrt{g/h}=10$ からの増大とともに悪くなり、第4次近似解では、分散性および非線形性のいずれに対してもまだ近似がなお充分ではないことがわかった。一方、波のエネルギーフラックスにおいても、近似解の収束性は $T\sqrt{g/h}$ が大きくなるに従って良好となるが、Stokes 波およびクノイド波との対応は逆に $T\sqrt{g/h}$ が大きくなるに従って急速に悪くなり、また $T\sqrt{g/h}=6$ においても Stokes 波との相違は若干大きく、擬 Stokes 波の適用性は $T\sqrt{g/h} < 8$ において悪くなることがわかった。

(5) 質量輸送

この理論では、質量輸送速度が Euler 座標において存在し、次式で与えられる。

$$\bar{u}/\sqrt{gh} = (1/T) \int_0^T u dt = (\lambda_0^2/32)\{2 - (2\pi h/L)^2\} \\ \dots \dots \dots (22)$$

図-4 は、擬 Stokes 波および著者らの提案したクノイド波²⁾の質量輸送速度 $\bar{u}/\sqrt{gh}$ と h/H の関係を $T\sqrt{g/h}$ をパラメータとして示したものである。これから、 $T\sqrt{g/h}$ の増大とともに擬 Stokes 波の近似解の収束性は良くなるが、一方クノイド波との対応については、 $T\sqrt{g/h}=10$ において最も良く、 $T\sqrt{g/h}$ が大きくなるに従って両者の相違も大きくなることがわかる。

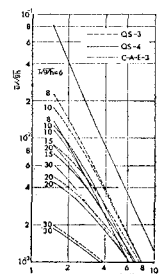


図-4 擬 Stokes 波の質量輸送速度

ついで、質量流束 (mass flux) Q は、式 (23) に示した質量輸送速度に依存する成分および水平水粒子速度と水面変動との相互作用に依存する成分の和として、次式のように表わされる。

$$Q/\rho h \sqrt{gh} = (\lambda_0^2/16)\{3 - (1/6)(2\pi h/L)^2\} \dots \dots (23)$$

一方、Stokes の波速の第1および第2定義を用いた Stokes 波の質量流束は、周知のようにそれぞれ次式で表される。

$$(Q/\rho h \sqrt{gh})_1 = (1/2)(2\pi a/L)^2 (2\pi h/L)^{-1}$$

$$\times (c/\sqrt{gh})_1 \coth 2\pi h/L \dots\dots (24)$$

$$(Q/\rho h \sqrt{gh})_{II} = 0 \dots\dots (25)$$

すなわち、波速の定義によって質量流束が異なり、また Stokes 波の質量流束は、周知のように、水面変動との相互作用のみによって生じ、波の谷より下では生じない。

図-5 は、擬 Stokes 波、Stokes 波およびクノイド波による質量流束を h/H および $T\sqrt{g/h}$ との関係

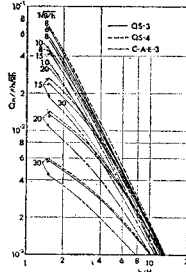


図-5 擬 Stokes 波の質量流束の特性

で示したものである。これから、擬 Stokes 波の質量流束に関する近似解の収束性は、図-4 に示した質量輸送速度 $\bar{u}$ に関する結果と同様な傾向を示し、全般に良好であり、またクノイド波との対応についても、図-4 と同様、 $T\sqrt{g/h}=10$ において最も良好で、 $T\sqrt{g/h}$ が大きくなるに従って両者の相違が大きくなることがわかる。さらに、Stokes 波との対応では、全般に Stokes 波の結果よりも大きくなる傾向を示し、その相違は $T\sqrt{g/h}$ の増大とともに顕著になることがわかる。

従来の有限振幅波理論では、質量輸送速度が Lagrange 座標において定義されていることから、比較のために擬 Stokes 波についても表示すれば、次式で表わされる。

$$U_m/\sqrt{gh} = (\lambda^2/16) \{1 - (1/2)(2\pi h/L)^2\} + (\lambda^2/8)(c/\sqrt{gh})^{-1} [1 + (2/3)(2\pi h/L)^2 \{3(z/h)^2 - 1\}] \dots\dots (26)$$

図-6 は、擬 Stokes の質量輸送速度 $U_m/\sqrt{gh}$ の鉛直分布を波速の第 1 定義を用いた従来の Stokes 波 (S-3-1) およびクノイド波 (C-A-E-3) と比較したものである。これから、 $T\sqrt{g/h}$ が比較的小さい範囲では擬 Stokes 波の質量輸送速度の鉛直分布は、Stokes 波のものと同様

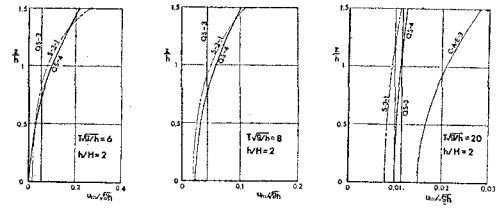


図-6 擬 Stokes 波の Lagrange 座標での質量輸送速度の鉛直分布特性

応しており、近似解の次数の問題はあるが、Lagrange 座標で考える限り、質量輸送現象は擬 Stokes 波および Stokes 波のいずれにおいてもあまり異なっていないことがわかる。しかし、 $T\sqrt{g/h}$ が大きくなると、図中に示したクノイド波理論との相違が著しくなるが、これはすでに述べてきたこの擬 Stokes 波理論の適用限界と対応するはずである。

5. 結 語

以上、逡減せつ動法によって擬 Stokes 波理論を提案し、その第 4 次近似解まで求めて、波の特性を解の収束性との関係で考察した。その結果、近似解の収束性については、 $T\sqrt{g/h}=8$ 付近から 15 の範囲において全般的に良好であることを確認したのち、クノイド波および Stokes 波理論との比較を行い、波形、波速および質量輸送などの特性を明らかにすることができた。

参 考 文 献

- 1) 安田孝志・土屋義人：一様流を伴う擬 Stokes 波理論，第 24 回海岸工学講演会論文集，1977，pp. 15-19.
- 2) Tsuchiya, Y. and T. Yasuda: The third approximation to cnoidal and solitary waves by the reductive perturbation method, (in preparation).