

定常長波の摂動解

西村 仁嗣*・磯部 雅彦**・堀川 清司***

1. 緒 論

筆者ら^{1),2)}は有限振幅の保存波に関する一連の研究において、ストークス波およびクノイド波の高次近似解およびそれらの精度について理論的な検討を加えて来た。保存波の摂動解を求めるにあたって、相対水深を1のオーダーとすればストークス波を得るのに対し、アーセル数を1のオーダーとすればクノイド波を得る。これらの解は同一の解の2つの異なる表示であって、前者は深海波から中間波、後者は中間波から浅海波の領域でそれぞれ有効である。

重複波についても全く同様な前提に立って2種の解が得られる。これらのうち相対水深を1のオーダーとする摂動解に関しては Tadjbaksh・Keller³⁾がその系統的な誘導法を示し、第3次近似解を求めている。Goda⁴⁾はさらに第4次近似解を計算し、鉛直壁に作用する波圧を論じた。他方、浅海条件下の定常波に関しては首藤⁵⁾の研究があるが、そこでは第2次近似解の計算に際して、1次項と2次項の干渉項の一部が無視されている。

一般に有限振幅の進行波はアーセル数および相対水深の自乗という2つのパラメータについて2重級数の形に表示される。これを1重級数に還元する際の項の括り方によって種々の摂動解が得られるわけであるが、ストークス波およびクノイド波は両極端であると同時に、同一次数では最も多くの項を内包する高精度の解となっている。全く同じことが重複波についても言えるので、ストークス波性の定常波およびクノイド波性の定常長波を論じることが、有限振幅重複波理論に関して本質的である。

本論文においては浅海条件下における定常波の第2次近似解を厳密に求め、通常のストークス波性重複波⁶⁾との比較においてその理論的な精度を調べる。さらに双方の解に基づく分散関係式、波形ならびに波圧の表示式についても検討を加える。

2. 定常長波の摂動解

(1) 基礎方程式

非粘性かつ非圧縮性の流体を想定し、その非回転定常波動を考える。図-1に示すような座標系についてこの運動の基礎方程式および境界条件を波長 L 、平均水深 D 、周期 τ および線形長波の波速 $\sqrt{gD}$ により無次元化すれば次のようになる。

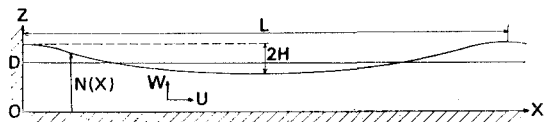


図-1 座 標 系

$$d^2\phi_{xx} + \phi_{zz} = 0 \quad \dots\dots\dots (1)$$

$$\phi_z = 0 \quad (z=0) \quad \dots\dots\dots (2)$$

$$\phi_z/d^2 - \omega\eta_t - \phi_x\eta_x = 0 \quad (z=\eta) \quad \dots\dots\dots (3)$$

$$\omega\phi_t + \eta + (\phi_x^2 + \phi_z^2/d^2)/2 = 0 \quad (z=\eta) \quad \dots\dots\dots (4)$$

$$\phi_x = 0 \quad (x=0) \quad \dots\dots\dots (5)$$

ここに、 $x=X/L$ 、 $z=Z/D$ 、 $\eta=N/D$ 、 $d=D/L$ 、 $t=T/\tau$ 、 $\omega=L/\tau\sqrt{gD}$ 、 $\phi=\Phi/L\sqrt{gD}$ 、 Φ は速度ポテンシャルで、 $U=\Phi_x$ 、 $W=\Phi_z$ 、 N は底面から測った水位、 T は時刻、 g は重力加速度であり、添字は偏微分を表わす。式(1)は連続の式、式(2)は底面における運動学的条件、式(3)および(4)はそれぞれ水面における運動学的条件および力学的条件、また式(5)は鉛直壁における運動学的条件である。

これにより無次元水位 η は無次元空間座標 x および無次元時間座標 t について周期1の周期関数となる。上述の基礎方程式系において、保存波との唯一の相異は直立壁面における境界条件が追加された点にある。このため、波長と周期の関係は一義的に定まるので、ここでは ϕ および η のみならず ω もまた従属変数となる。

(2) 解の級数表示と各次の方程式

まず ϕ を

$$\phi = \sum_{m=0}^{\infty} \phi_m z^m \quad \dots\dots\dots (6)$$

のように z の冪級数に展開し、式(1)および(2)に代入すれば、 ϕ は $f(x,t)$ を未知関数として

* 正会員 工博 東京大学助教授 工学部土木工学科

** 正会員 工修 東京大学助手 工学部土木工学科

*** 正会員 工博 東京大学教授 工学部土木工学科

$$\phi = \sum_{m=0}^{\infty} (-d^2)^m \frac{z^{2m}}{(2m)!} \frac{\partial^{2m} f}{\partial x^{2m}} \dots\dots\dots (7)$$

なる形に書けることがわかる。したがって、2つの未知関数 $f(x, t)$, $\eta(x, t)$ および未知量 ω を条件式 (3), (4) および (5) を満たすように定めることが我々の命題となる。

いま、前例に従って半波高を H で表示する。ここではクノイド波性の定常波を扱うのでアーセル数 HL^2/D^3 は1のオーダーであることを前提とする。すなわち、相対水深 $d=D/L$ の自乗は相対波高 H/D と同一のオーダーである。ここでは摂動のパラメータ ε をこのオーダーにとり、 $\varepsilon = \delta d^2$ と書く。ただし、 δ は1のオーダーの任意の量であり、後に ε が第1次近似解の相対波高となるように決定される。

$$f(x, t) = f_0(x, t) + \varepsilon f_1(x, t) + \varepsilon^2 f_2(x, t) + \dots\dots\dots (8)$$

$$\zeta(x, t) = \eta_0(x, t) + \varepsilon \eta_1(x, t) + \varepsilon^2 \eta_2(x, t) + \dots\dots\dots (9)$$

$$\omega = \omega_0 + \varepsilon \omega_1 + \varepsilon^2 \omega_2 + \dots\dots\dots (10)$$

ここで $-$ により一周期にわたる時間的平均値を示すことにすると、 $\bar{N} = D$ であるから、 $\bar{\eta} = \bar{N}/D = 1$ であり、したがって

$$\bar{\eta}_0 = 1, \quad \bar{\eta}_i = 0 \quad (i=1, 2, \dots) \dots\dots (11), (12)$$

である。また、 f_i ($i=0, 1, 2, \dots$) においては定数項は意味を持たない。さらに、 $\varepsilon \rightarrow 0$ のときに静水状態が解となることから

$$\eta_0 = 1, \quad f_0 = \text{const.} \times t \dots\dots\dots (13), (14)$$

であることがわかる。

式 (7)~(10) の展開を式 (3) に代入し、 ε の各次の係数を0とおけば、

$$\varepsilon^1: -f_{1xx} - \omega_0 \eta_{1t} = 0 \dots\dots\dots (15)$$

$$\varepsilon^2: -f_{2xx} - \eta_1 f_{1xx} + f_{1xxx}/6\delta - \omega_0 \eta_{2t} - \omega_1 \eta_{1t} - \eta_{1x} f_{1x} = 0 \dots\dots\dots (16)$$

$$\varepsilon^3: -f_{3xx} - \eta_1 f_{2xx} - \eta_2 f_{1xx} + f_{2xxx}/6\delta + \eta_1 f_{1xxx}/2\delta - f_{1xxxx}/120\delta^2 - \omega_0 \eta_{3t} - \omega_1 \eta_{2t} - \omega_2 \eta_{1t} - \eta_{1x} f_{2x} + \eta_{1x} f_{1xx}/2\delta - \eta_{2x} f_{1x} = 0 \dots\dots\dots (17)$$

全く同様に式 (4) より

$$\varepsilon^0: 1 + \omega_0 f_{0t} = 0 \dots\dots\dots (18)$$

$$\varepsilon^1: \eta_1 + \omega_0 f_{1t} + \omega_1 f_{0t} = 0 \dots\dots\dots (19)$$

$$\varepsilon^2: \eta_2 + \omega_0 f_{2t} - \omega_0 f_{1xt}/2\delta + \omega_1 f_{1t} + \omega_2 f_{0t} + f_{2t}^2/2 \dots\dots\dots (20)$$

$$\varepsilon^3: \eta_3 + \omega_0 f_{3t} - \omega_0 (f_{2xt} + 2\eta_1 f_{1xt})/2\delta + \omega_0 f_{1xxx}/24\delta^2 + \omega_1 f_{2t} - \omega_1 f_{1xt}/2\delta + \omega_2 f_{1t} + \omega_3 f_{0t} + f_{1x}(f_{2x} - f_{1xx}/2\delta) + f_{1xx}^2/2\delta = 0 \dots\dots\dots (21)$$

式 (5) および $\eta(x, t)$ が x, t に関して周期1なる周期関数であることを考慮しつつ、式 (15)~(21) を順次

解けば、 f_i , η_i および ω_i が定まり、最終的に摂動解が得られる。

(3) 第0次および第1次の解

式 (18) より

$$f_0 = -t/\omega_0 \dots\dots\dots (22)$$

次に式 (15) および (19) より η_1 を消去すれば

$$f_{1xx} - \omega_0^2 f_{1t} = 0 \dots\dots\dots (23)$$

これから f_1 は $x-t/\omega_0$ および $x+t/\omega_0$ の任意関数の和として表わされることがわかる。さらに式 (19) に戻って η_1 も定まる。 η_1 は周期関数であるから、 $x-t/\omega_0$ および $x+t/\omega_0$ の任意の周期関数の和で表わされ、さらに x および t について同一の周期1を有することから $\omega_0 = 1$ でなければならない。したがって

$$f_1 = f_{-1}(\theta_-) - f_{+1}(\theta_+) \dots\dots\dots (24)$$

$$\eta_1 = \eta_{-1}(\theta_-) + \eta_{+1}(\theta_+) \dots\dots\dots (25)$$

$$\text{ここで } \theta_{\pm} = x \pm t \dots\dots\dots (26)$$

$$f_{\pm 1} = \eta_{\pm 1} - \omega_1/2 \dots\dots\dots (27)$$

上式において添字 $+$ および $-$ はそれぞれ x の負および正の方向に伝播する波の成分を表わし、 $f_{\pm 1}$, $\eta_{\pm 1}$ の関数形および ω_1 は ε の2次のオーダーの議論から決定される。

(4) 第2次の解

第1次近似の場合と同様に、式 (16) および (20) から η_2 を消去すれば、 $\omega_0 = 1$ なる前項の結果を用いて

$$f_{2xx} - f_{2t} + \eta_1 f_{1xx} - f_{1xxx}/6\delta + f_{1xxt}/2\delta + \omega_1 (\eta_{1t} - f_{1t}) + \eta_{1x} f_{1x} - f_{1x} f_{1xt} = 0 \dots\dots (28)$$

さらに、第1次近似解 (24)~(27) を考慮すれば

$$4f_{2\theta_+ \theta_-} = -A'_{-1} + A'_{+1} + \eta'_{-1} \eta_{+1} - \eta_{-1} \eta'_{+1} \dots (29)$$

$$A'_{\pm 1}(\theta_{\pm}) = \eta'_{\pm 1}/3\delta + 3\eta_{\pm 1} \eta'_{\pm 1} - 2\omega_1 \eta'_{\pm 1} \dots\dots\dots (30)$$

を得る。上式を積分して

$$f_2 = f_{-2}(\theta_-) - f_{+2}(\theta_+) - A_{-1}\theta_+/4 + A_{+1}\theta_-/4 + \eta_{-1}\zeta_{+1}/4 - \zeta_{-1}\eta_{+1}/4 \dots\dots\dots (31)$$

ここに $f_{\pm 2}$ および f_{-2} はいずれも任意関数であり、 $\zeta_{\pm 1}$ は $\eta_{\pm 1}$ の原始関数である。 $\eta_{\pm 1}$ が得られた場合、これらを積分することによって $\zeta_{\pm 1}$ が求められるが、式 (31) は $f_{\pm 2}$ なる任意関数を含んでいるので、積分定数は任意にとることができる。そこで、次のように決めてもさしつかえない。

$$\zeta_{\pm 1} = \int_0^{\theta_{\pm}} \eta_{\pm 1} d\theta_{\pm}$$

いま、 η_2 として周期関数を想定しているのので、式 (20) により、 f_{2t} もまた周期関数でなければならない。

$$\begin{aligned} f_{2t} &= -f_{2\theta_-} + f_{2\theta_+} \\ &= -f'_{-2} + A'_{-1}\theta_+/4 - A_{+1}/4 - \eta'_{-1}\zeta_{+1}/4 \\ &\quad + \eta_{-1}\eta'_{+1}/4 - f'_{+2} + A'_{+1}\theta_-/4 - A_{-1}/4 \\ &\quad + \eta_{+1}\eta'_{-1}/4 - \zeta_{-1}\eta'_{+1}/4 \end{aligned}$$

上式において $A_{\pm 1}$ の $\theta_{\pm}$ に関する周期性をも考慮すれば、これらはたかだか定数であり、0とおくことがで

きる。

$$A_{\pm 1} = \eta_{\pm 1}''/3\delta + 3\eta_{\pm 1}^2/2 - 2\omega_1\eta_{\pm 1} + \text{const.} = 0 \dots (32)$$

上式の解はヤコビの楕円関数 cn によって表示される。条件式 (5) を満たすためには η_{+1} および η_{-1} の母数, 振幅ともに等しくなければならない。母数を κ と書き, 第 1 次近似解における相対波高が ε となるように振幅を 1 とする。さらに $\bar{\eta}_1 = 0$ なる条件より, 結局

$$\eta_{\pm 1} = cn^2(2K\theta_{\pm}, \kappa) - d_1 \dots (33)$$

$$d_1 = \bar{cn}^2 = E/\kappa^2 K - \lambda$$

$$\delta = 16\kappa^2 K^2/3 \dots (34)$$

$$\omega_1 = \lambda'/2 - 3d_1/2 \dots (35)$$

また, 式 (27) より

$$f_{\pm 1} = \zeta_{\pm 1} - \omega_1 \theta_{\pm}/2 \dots (36)$$

を得る。ここに $\lambda = (1 - \kappa^2)/\kappa^2$, $\lambda' = 1 - \lambda$, K および E はそれぞれ第一種および第二種の完全楕円積分, $\zeta_{\pm 1} = zn(2K\theta_{\pm}, \kappa)/2\kappa^2 K$, zn はヤコビのツェータ関数である。

式 (20), (24), (25) および (31) を用いて以上の結果をまとめると次のようになる。

$$f_1 = C_{-1} - C_{+1} + (\lambda'/2 - 3d_1/2)t \dots (37)$$

$$\eta_1 = c_{-1} + c_{+1} \dots (38)$$

$$f_2 = f_{-2} - f_{+2} + (c_{-1}C_{+1} - C_{-1}c_{+1})/4 \dots (39)$$

$$\eta_2 = \eta_{-2} + \eta_{+2} + (c_{-1}'C_{+1} + 2c_{-1}c_{+1} + C_{-1}c_{+1}')/4 \dots (40)$$

$$f_{\pm 2}' = \eta_{\pm 2} + (\lambda' + d_1/2)c_{\pm 1} - (7/4)c_{\pm 2} + (\lambda/6 + \lambda'^2/8 - 5\lambda'd_1/12 + 5d_1^2/8 - \omega_2/2) \dots (41)$$

ここに, $c_{\pm 1} = cn^2(2K\theta_{\pm}, \kappa) - d_1$, $C_{\pm 1} = zn(2K\theta_{\pm}, \kappa)/2\kappa^2 K$ である。 $f_{\pm 2}$ は未知関数のまま残されており, これらは第 3 次の議論を通じて決定される。

(5) 第 3 次近似の計算

式 (17) および (21) より η_3 を消去すると,

$$f_{3\theta-\theta+} = \sum_j B_{-2j}(\theta-)B_{+2j}(\theta+) \dots (42)$$

なる形の方程式を得る。ここに $B_{\pm 2j}$ はすべて $\theta_{\pm}$ の周期関数であり, その一周りにわたる平均値を $\overline{B_{\pm 2j}}$ と書けば,

$$f_{3\theta-\theta+} = -A_{-2}'(\theta-) + A_{+2}'(\theta+) + \sum_j (B_{-2j} - \overline{B_{-2j}})(B_{+2j} - \overline{B_{+2j}}) \dots (43)$$

$$A_{\pm 2}' = \pm \sum_j \left(\overline{B_{\mp 2j}}B_{\pm 2j} - \frac{1}{2}\overline{B_{\mp 2j}B_{\pm 2j}} \right) \dots (44)$$

しかも, 実際には $A_{\pm 2}$ の周期平均は 0 となる。上式を θ_+ および θ_- についてそれぞれ 1 回積分すれば,

$$f_3 = f_{-3}(\theta-) - f_{+3}(\theta+) - A_{-2}\theta_+ + A_{+2}\theta_- + \sum_j \int (B_{-2j} - \overline{B_{-2j}})d\theta_- \cdot \int (B_{+2j} - \overline{B_{+2j}})d\theta_+ \dots (45)$$

ここに, $f_{\pm 3}$ は $\theta_{\pm}$ の任意関数である。

η_3 の周期性から第 2 次近似の計算の場合と全く同様

に $A_{\pm 2}$ はたかだか定数であり, これを 0 とおくことができる。 $A_{\pm 2}$ の内容を具体的に計算すると,

$$A_{\pm 2} = \eta_{\pm 2}''/16\kappa^2 K^2 + (-\lambda' + 3d_1 + 3c_{\pm 1})\eta_{\pm 2} + (-16\lambda/15 + 19\lambda'^2/20 - 11\lambda'd_1/6 - 7d_1^2/4 - 2\omega_2)c_{\pm 1} + (-3\lambda' + 9d_1/2)c_{\pm 2} + (3/2)c_{\pm 3} + \text{const.} = 0 \dots (46)$$

$$c_{\pm i} = cn^{2i}(2K\theta_{\pm}, \kappa) - \overline{cn^{2i}} \quad (i=1, 2, 3)$$

上式を解いて

$$\eta_{\pm 2} = (\lambda'/2 - 3d_1)c_{\pm 1} + (3/4)c_{\pm 2} \dots (47)$$

$$\omega_2 = 13\lambda/60 + 19\lambda'^2/40 - 29\lambda'd_1/12 + 29d_1^2/8 \dots (48)$$

また式 (41) より

$$f_{\pm 2} = (3\lambda'/2 - 5d_1/2)C_{\pm 1} - C_{\pm 2} + (7\lambda/120 - 9\lambda'^2/80 + 19\lambda'd_1/24 - 19d_1^2/16)\theta_{\pm} \dots (49)$$

$$C_{\pm 2} = \int_0^{\theta_{\pm}} c_{\pm 2} d\theta_{\pm}$$

を得る。

以上により, 第 2 次近似解は完全に規定されたことになる。

$$f_2 = (3\lambda'/2 - 5d_1/2)(C_{-1} - C_{+1}) - (C_{-2} - C_{+2}) + (c_{-1}C_{+1} - C_{-1}c_{+1})/4 + (-7\lambda/60 + 9\lambda'^2/40 - 19\lambda'd_1/12 + 19d_1^2/8)t \dots (50)$$

$$\eta_2 = (\lambda'/2 - 3d_1)(c_{-1} + c_{+1}) + (3/4)(c_{-2} + c_{+2}) + (c_{-1}'C_{+1} + 2c_{-1}c_{+1} + C_{-1}c_{+1}')/4 \dots (51)$$

同様の計算を繰り返すことによってさらに高次の近似解を求めることが可能であるが, 実際には解の形を推測することができるので, 未定係数法によって係数のみを定めればよい。なお, 首藤⁶⁾の計算では式 (43) 中の定数でない $B_{\pm 2j}$ の平均値に関係する項が式 (46) で省略されていることになる。

(6) 解の表示

得られた 2 次近似解を次元量で表示すれば次の通りである。

$$N/D = 1 + \varepsilon(c_{-1} + c_{+1}) + \varepsilon^2[(\lambda'/2 - 3d_1) \cdot (c_{-1} + c_{+1}) + (3/4)(c_{-2} + c_{+2}) + (-c_{-1}^*zn_+/\kappa^2 + c_{-1}c_{+1} - zn_-c_{+1}^*/\kappa^2)/2] \dots (52)$$

$$U/\sqrt{gD} = \varepsilon(c_{-1} - c_{+1}) + \varepsilon^2[(3\lambda'/2 - 5d_1/2 - (3\lambda'/2)(Z/D)^2)(c_{-1} - c_{+1}) + \{-1 + (9/4)(Z/D)^2\}(c_{-2} - c_{+2}) + (-c_{-1}^*zn_+ + zn_-c_{+1}^*)/2\kappa^2] \dots (53)$$

$$W/\sqrt{gD} = (\varepsilon\sqrt{3\varepsilon}/2\kappa)[(Z/D)(2c_{-1}^* - 2c_{+1}^*)] + (\varepsilon^2\sqrt{3\varepsilon}/2\kappa)[\{(-3\lambda'/2 + 5d_1/2)(Z/D) + (\lambda'/2)(Z/D)^3\}(-2c_{-1}^* + 2c_{+1}^*) + \{(Z/D) - (3/4)(Z/D)^3\} \cdot (-4c_{-2}^* + 4c_{+2}^*) + (1/2)(Z/D) \cdot \{zn_-(2\lambda'c_{+1} - 3c_{+2})/\kappa^2 - c_{-1}c_{+1}^* + c_{-1}^*c_{+1} - (2\lambda'c_{-1} - 3c_{-2})zn_+/\kappa^2\}] \dots (54)$$

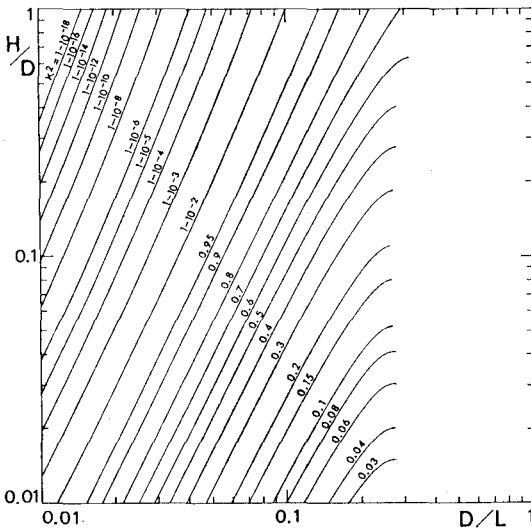
$$\begin{aligned}
 P/\rho g D &= (N-Z)/D + \varepsilon^2 [(Z/D)^2 - 1] \\
 &\quad \cdot [(-3\lambda'/2)(c_{-1} + c_{+1}) + (9/4) \\
 &\quad \cdot (c_{-2} + c_{+2})] \dots\dots\dots (55) \\
 L/\tau\sqrt{gD} &= 1 + \varepsilon(\lambda'/2 - 3d_1/2) + \varepsilon^2(13\lambda/60 \\
 &\quad + 19\lambda'^2/40 - 29\lambda'd_1/12 + 29d_1^2/8) \\
 &\quad \dots\dots\dots (56)
 \end{aligned}$$

ここに $c_{\pm i} = cn^{2i}\{2K(X/L \pm T/\tau), \kappa\} - d_i$, $c_{\pm i}^* = cn^{2i-1}\{2K(X/L \pm T/\tau), \kappa\} \times sn\{2K(X/L \pm T/\tau), \kappa\} \times dn\{2K(X/L \pm T/\tau), \kappa\}$, $zn_{\pm} = zn\{2K(X/L \pm T/\tau), \kappa\}$, $d_1 = E/\kappa^2 K - \lambda$, $d_2 = 2\lambda'd_1/3 + \lambda/3$, $\lambda = (1 - \kappa^2)/\kappa^2$, $\lambda' = 1 - \lambda$ である。

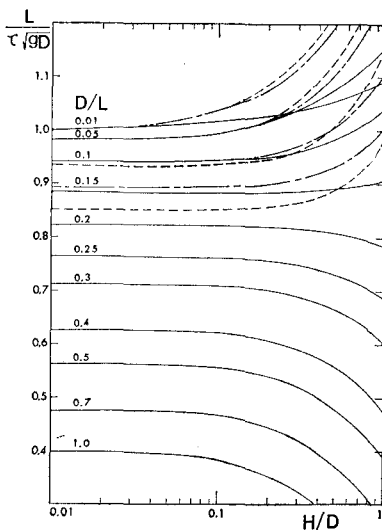
また κ および ε は次の各式より決定される。

$$(D/L)^2 = 3\varepsilon/16\kappa^2 K^2 \dots\dots\dots (57)$$

$$(H/D) = \varepsilon + \varepsilon^2(1 + \lambda'/2 - 7d_1/2) \dots\dots\dots (58)$$



図—2 母数 κ の計算図表 (水深・波長・波高が与えられた場合)



図—3 周期の理論値の比較

周期 τ を用いる場合には式 (57) のかわりに次式を用いばよい。

$$\begin{aligned}
 (D/\tau\sqrt{gD})^2 &= (3\varepsilon/16\kappa^2 K^2)[1 + \varepsilon(\lambda' - 3d_1) \\
 &\quad + \varepsilon^2(13\lambda/30 + 6\lambda'^2/5 - 19\lambda'd_1/3 \\
 &\quad + 19d_1^2/2)] \dots\dots\dots (59)
 \end{aligned}$$

D/L および H/D から κ を計算すると図—2 のようになる。図—3 は相対水深 D/L をパラメータとして相対波高 H/D と無次元周波数 $L/\tau\sqrt{gD}$ との関係を示したもので、点線は第1次近似解、一点鎖線は第2次近似解にそれぞれ対応している。同図中の実線は合田によって求められたストークス波性重複波の第4次近似解に対応するものであるが、一部には実線相互の交差が見られ、相対水深が小さく、相対波高の大きい領域はこの解の適用範囲外となっているのがわかる。

3. 解の精度

堀川・西村⁷⁾ は進行波について理論解の精度を表示するために、水面における非線型の運動学的および力学的境界条件の相対残差をそれぞれ、

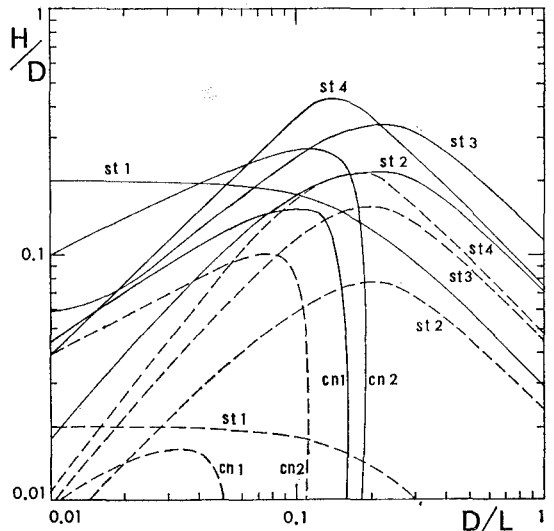
$$E_K = \frac{|(W - N_T - UN_x)/\sqrt{1 + N_x^2}|_{\max}}{C_0 \pi H/L \sqrt{1 + (\pi H/L)^2}} \dots\dots (60)$$

および

$$E_D = \Delta P_0 / \rho g H \dots\dots\dots (61)$$

なる形で計算した。ここに $C_0 = \sqrt{(g/k) \tanh kD}$, $k = 2\pi/L$, また ΔP_0 は水面における圧力の変動量である。

本論文においても同様に E_K および E_D を用いて解の精度を論じることとする。図—4 および図—5 はそれぞれ運動学的および力学的境界条件に対する等残差線を描いたもので、実線は残差 10%、点線は残差 1% に対応している。記号 cn , st はそれぞれクノイド波性およびストークス波性の重複波理論に対応し、その直後の数



図—4 等残差線 (—: $E_K=0.1$, ----: $E_K=0.01$)

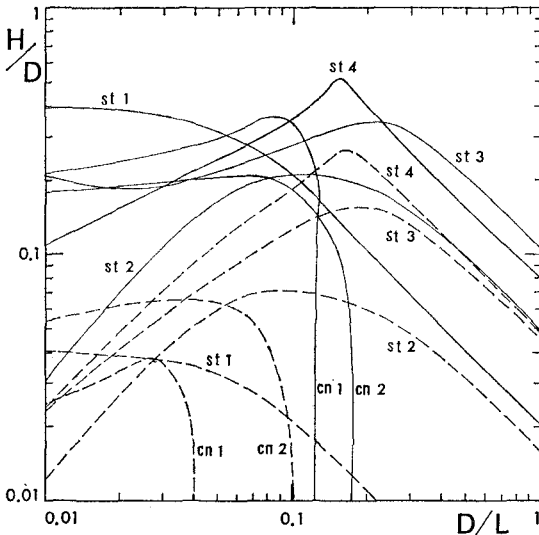


図-5 等残差線 (—: $E_D=0.1$, ----: $E_D=0.01$)

字は近似の次数を示す。

等残差線はクノイド波性の重複波に関してはほぼ一定の相対水深および相対波高に対応する直線を接続したものになっているのに対し、ストークス波性の重複波の場合には一定のアーセル数および波形勾配を示す直線から構成されている。

ただし、後者の第1次近似解は浅海域で広い適用範囲を有することがわかる。ちなみに波頂近傍における鉛直方向の圧力分布 $\partial P / \partial z$ を負とする

条件ではストークス波性重複波の浅海領域における適用範囲を過大に評価する傾向があるので注意を要する。

上記2種の理論解について種々の相対水深および相対波高を与え、水面形状の時間的変化を計算したところ、相対残差が10%程度以下ならばほぼ妥当な結果が得られ、またいずれの解を用いても有意な差異を生じないこ

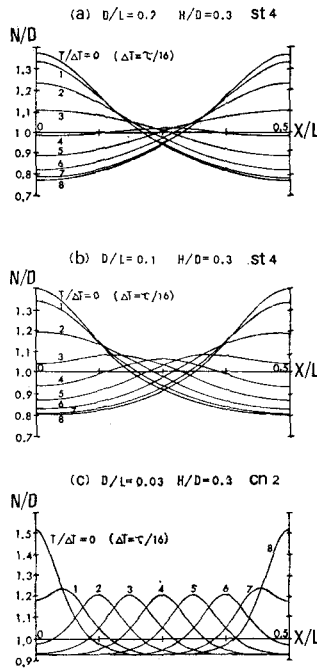


図-6 重複波の波形

とがわかった。相対波高 $H/D=0.3$ 、相対水深 $D/L=0.2, 0.1$, および 0.03 に対応する波形を例示すると図-6 になる。計算には精度から考えて、 $D/L=0.2$ および 0.1 に対してはストークス波性重複波の第4次近似解、 $D/L=0.03$ に対してはクノイド波性重複波の第2次近似解を用いた。相対水深が小さくなると、孤立波が壁面で完全反射する現象に近い状態となるが、これは式(52)において正および負方向に進行する波の干渉項の影響が小さくなるためである。

鉛直壁面に作用する重複波圧に関して、その時間波形が双峯型になることが実験的に知られている。理論的には Goda⁹⁾ がストークス波性の重複波についてこの事実を示している。クノイド波性重複波の第2次近似解について全く同様の検討を試みた結果、この解の適用範囲では双峯型の波圧は生じ得ないことが明らかになった。

4. 結 論

定常長波の第2次近似解を厳密に求め、式(52)~(56)の結果を得た。解の表示に用いたパラメータ κ および ϵ の値は波の諸元から式(57) および (58) あるいは式(58) および (59) を用いることにより算定されるが、実用の便宜のために図-2 を掲げた。

次に、得られた解の適用性をストークス波性の有限振幅重複波との比較において検討した。それぞれの解の適用範囲は要求される相対精度に応じて図-4 および図-5 から推定される。

参 考 文 献

- 1) 堀川清司・西村仁嗣・磯部雅彦: 有限振幅波理論の適用範囲について, 第24回海岸工学講演会論文集, pp. 10~14, 1977.
- 2) Nishimura, H. and M. Isobe: On the validities of finite amplitude wave theories, Proc. Int. Conf. on Water Resources Eng., pp. 363-374, 1978.
- 3) Tadjbaksh, I. and J. B. Keller: Standing surface waves of finite amplitude, Jour. Fluid Mech., Vol. 8, pp. 442-451, 1960.
- 4) Goda, Y.: The fourth order approximation to the pressure of standing waves, Coastal Eng. in Japan, Vol. 10, pp. 1-11, 1967.
- 5) 首藤伸夫: 有限振幅の定常長波, 第15回海岸工学講演会講演集, pp. 212-219, 1968.
- 6) 前出 5)
- 7) 堀川清司・西村仁嗣: ストークス波とクノイド波の比較研究, 第23回海岸工学講演会論文集, pp. 371-375, 1976.
- 8) 前出 4)