

潮流解析における重み付き残差法の適用について (第2報)

榎木 亨*・中辻 啓二**・和手 信泰***

1. ま え が き

沿岸環境変化の予測に数値シミュレーションが用いられて久しいが、海岸工学の見地からすれば、埋立造成等による地形形状の変化にともなう流動がどのように変化するか、あるいはその流動変化が排出汚染物の初期分散過程にいかなる影響を与えるかという極めて局所的な流況変化の予測が重要となる例が多い。このような複雑な境界形状での流動を数値モデルで再現する方法として、著者らは第23回海岸工学講演会¹⁾で重み付き残差法を用いた有限要素法の導入を計り、その適用の可能性ならびに手法の特性の基礎的な考察を行なった。また、近年同様な目的で潮流解析への適用が数多く試みられている²⁾。

しかしながら、それらを概観してみると差分近似法に対する優位性を強調するあまり計算技法の開発・演算時間等の比較に論議が集中して、有限要素法本来の特徴を生かした流動解析への適用例は少ないようである。そもそも有限要素法と差分近似法とはその基本原理は異なるが離散化手法の一形態であり、シミュレートする対象あるいは目的に応じて両者の利点をうまく生かした有機的結合が望ましい。たとえば、防波堤近傍の局所的な流動を含めた非定常な解析を海域全体を対象に行なおうとしても、計算機容量・時間の制約でそれは不可能である。そこで最初の段階では複雑な地形形状は単純化するか、あるいは省略化して差分近似法により大局的、且つ非定常な流動を把らえ、次の段階においてはその結果を用いて非定常性を損なわない範囲で境界条件を設定し、複雑な境界を鋭敏に反映させるために有限要素法で解析するという zooming 解析を用いるのが適切であろう。有限要素法は本来境界値問題に対する解法であり、上記の理由からも強いて非定常流の解析に適用する必要はないと考えられる。

本報告は、複雑な地形形状を有した流動を水理現象に即して再現できる点に有限要素法の意義を見出し、曲辺要素の導入を試みた。そして、数値解析例として離岸防波堤廻りの流動を解析し有限要素法の適用性を検討し

た。

2. 基礎方程式と重み付き残差法による定式化

有限振幅長波の基礎方程式および境界条件は前報と同じく水深方向に積分した運動方程式、連続方程式を用いる。ただし、連続方程式は定式化後の行列表示において非零要素が対称に近くなるように、また桁落ちを防ぐために運動方程式の Euler の演算子を用いて、次のように変形してある。

$$\frac{\partial U_i}{\partial t} + \tilde{U}_j \frac{\partial U_i}{\partial x_j} = g \frac{\partial \zeta}{\partial x_i} + \frac{\tau_{bt}}{\rho} + \nu^* \Delta U_i \quad \cdots \cdots (1)$$

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} + \tilde{U}_j \frac{\partial \zeta}{\partial x_j} = -(h + \zeta) \frac{\partial U_j}{\partial x_j} \quad \cdots \cdots (2)$$

ここに、 U_i ；流速 U の x_i 方向成分、 ζ ；水位、 h ；水深、 t ；時間、 g ；重力加速度、 ρ ；流体の密度、 τ_{bt} ；海底摩擦力 $=\rho r^2 |\tilde{U}| U_i$ 、 ν^* ；水平渦粘性係数を表わす。上式中添字記号 $\sim$ は前時間ステップの既知物理量を示し、時間的に緩慢な潮流現象を対象とするため非線型項を線型化してある。

基礎方程式を有限要素で空間的に離散化するために、重み付き残差法の一つである Galerkin 法を適用する。Galerkin 法は未知物理量を要素内で内挿する形状関数と重み関数とを同一関数に選ぶ手法であり、3. で詳述する8節点アイソパラメトリックの形状関数を重み関数として基礎方程式 (1)、(2) に掛け合わせ対象領域 E で積分することにより、次の行列方程式系を得る。

$$\sum_j C_{ij} \phi_j + \sum_j A_{ij} \phi_j + b_i = 0, \quad i, j = 1, 2, \dots, m \quad \cdots \cdots (3)$$

ここに、 $\Phi = (U, V, \zeta)^T$ 、 $\dot{\Phi} = (\partial U / \partial t, \partial V / \partial t, \partial \zeta / \partial t)^T$ 、

$$C_{ij} = \begin{bmatrix} C & 0 & 0 \\ 0 & C & 0 \\ 0 & 0 & C \end{bmatrix}, \quad A_{ij} = \begin{bmatrix} a_1 & 0 & a_4 \\ 0 & a_1 & a_5 \\ a_3 & a_6 & a_0 \end{bmatrix},$$

$$b_i = (b_1, b_2, b_3)^T.$$

式 (3) の係数行列は、一般曲線座標系 ($\xi-\eta$) における形状関数 $S_j(\xi, \eta)$ および直交座標系 ($x-y$) からの座標変換に導入した行列 J (ヤコビアン) を用いて積分形で表現される。

上記定式化の過程において部分積分ならびに Gauss の発散定理を導入して面積分を線積分に変換することにより、Neumann 的表現で与えられる自然境界条件を容易

* 正会員 工博 大阪大学教授 工学部土木工学科

** 正会員 工修 大阪大学講師 工学部土木工学科

*** 正会員 工修 日本情報サービス(株) 科学計算部

に配慮できることは周知のとおりである。

また、式 (3) の常微分方程式を時間的に離散化するために種々の工夫がなされており³⁾、著者らも前報で Leap-Frog-Galerkin 法の適用の可能性を示唆しその特性を検討した。本報では1で示したように、有限要素法は差分近似法では表現できない局所的な流動、あるいは瀬戸内海規模での大規模循環の再現に適用するのが有効であると考えるので、非定常項の離散化に関しては詳しく論究せず前報で用いた Crank—Nicolson 法による implicit な時間差分を適用することにする。

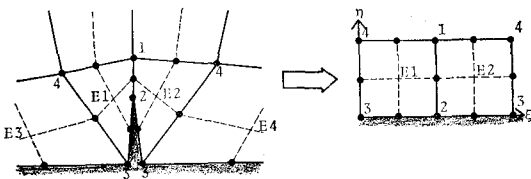
3. 曲辺要素の導入

(1) 曲辺要素について

Galerkin 法の適用にあたって最も困難なことは、格子網の形状と各要素に内挿関数として適用される形状関数 $G_\alpha(x, y)$ の選定にある。不手際な要素網で対象領域を近似すると、いたずらに節点方程式の元数を増大させることになり、且つ係数行列の性質が悪くなりかねない。たとえば、一般に有限要素法で用いられる三角形要素で屈曲した海岸線を近似するには要素を十分に小さくしなければならぬし、また大きな要素との接続においては細長い異形の要素や極端に大きさの異なる要素を同時に解かなければならぬ。この問題点を解消するには辺の曲がった曲辺要素を用いるのが適切であろう。この曲辺要素は任意形状の境界とのなじみがよいばかりでなく、数少ない要素と節点で複雑な流動を精度高く計算できる利点をもつ。

(2) アイソパラメトリック変換

辺の中間にも節点をもつ8節点四角形要素の一例を示したのが図—1であり、同図のように二次の精度で境界を平滑に表現でき得る。また、有限要素内の任意点にお



図—1 アイソパラメトリック変換

ける未知物理量 U_i , ζ は各節点の物理量 $U_{i\alpha}$, ζ_α を用いて次のように内挿補間される。

$$\left. \begin{aligned} U_i(x, y) &= \sum_{\alpha=1}^8 G_\alpha(x, y) U_{i\alpha} \\ \zeta(x, y) &= \sum_{\alpha=1}^8 G_\alpha(x, y) \zeta_\alpha \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (4)$$

ここに、

$$\left\{ \begin{aligned} G_\alpha(x, y) &= G_\alpha(x(\xi, \eta), y(\xi, \eta)) = S_\alpha(\xi, \eta) \\ x(\xi, \eta) &= \sum_{\alpha=1}^8 S_\alpha(\xi, \eta) x_\alpha, \quad y(\xi, \eta) = \sum_{\alpha=1}^8 S_\alpha(\xi, \eta) y_\alpha \end{aligned} \right.$$

このように、座標の内挿補間関数 $S_\alpha(\xi, \eta)$ と物理量の内挿補間関数 $G_\alpha(x, y)$ を同一関数に選んだとき、その要素はアイソパラメトリック要素と呼ばれる。

節点座標には任意の物理量の値を与えることができるが、節点を結ぶ曲線の曲がり方が極端な場合には要素間の物理量の連続性が満たされなくなり解が発散する可能性がある。他方、流動解析においては要素間の連続性、換言すれば微係数の連続性を負荷する条件は何ら存在しないため、二次・三次要素といった高精度の近似を行なった場合に逆に水面勾配が辺上で不連続となり解に不要な振動を引き起こすことになる。それゆえ、実際問題への適用にあたっては現象の十分な物理的理解にたつて水理現象に見合った要素の大きさを選定する必要がある。

(3) 数値積分

式 (3) の行列要素の数値積分は曲辺に沿って直接に行なうことは不可能であり、次式に示すように一般座標系 (ξ, η) の正方形領域に写像して行なわれる。

$$\begin{aligned} & \iint_E G_f(x, y) \cdot R_k(x, y, t) dx dy \\ &= \iint_{E'} S_f(\xi, \eta) \cdot R_k'(\xi, \eta, t) \cdot |J| d\xi d\eta \quad \dots\dots (5) \end{aligned}$$

同式中 J はヤコビアンであり式 (6) で表現される。また、空間微分も J を用いて式 (7) のように表わされる。

$$J = \frac{\partial(x, y)}{\partial(\xi, \eta)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial x}{\partial \eta} \\ \frac{\partial y}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \eta} \end{vmatrix} \quad \dots\dots\dots (6)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} &= J^{-1} \left(\frac{\partial y}{\partial \eta} \frac{\partial}{\partial \xi} - \frac{\partial y}{\partial \xi} \frac{\partial}{\partial \eta} \right), \\ \frac{\partial}{\partial y} &= J^{-1} \left(\frac{\partial x}{\partial \xi} \frac{\partial}{\partial \eta} - \frac{\partial x}{\partial \eta} \frac{\partial}{\partial \xi} \right) \quad \dots\dots\dots (7) \end{aligned}$$

数値積分は Gauss の積分公式を用いた。その方法は積分区間内の積分点の関数値を計算し、これに重みを掛けたものの和として積分値を近似するものである。したがって、積分点の数が多い程補間関数の次数が高くなり積分公式は高次の関数まで近似することになるので、積分精度は要素内補間の形状関数との関連で重要となる。今回の流動解析では三点補間で十分な積分値を得ており、高々二次の計算であればその精度は変わることはないようである。

(4) ウェーブ・フロント法による行列演算

式 (3) の係数行列は非対称であり、また非零要素成分が散在している。曲辺要素においては節点間の連成が大きく通常のバンド解法ではどのように番号付けをしてもバンド幅が大きくなるので計算機容量や演算時間にかなり影響を与える。そこで、今回の計算では Gauss の消去法に基づいたウェーブフロント法を用いた。この手法は消去計算の際に非零要素が発生する場所だけを主記憶装置に確保し必要な項のみを計算する方法で、演算時間

も短かく非常に優れた方法であるがプログラム作製が困難であることが難点である。

(5) 曲辺要素の適用例

平行流 ($Re=150$) 中に突出部を設置した場合の流動解析に曲辺要素を適用した例を図-2に示す。壁面においては直交する流量フラックスは零であるという自然境界条件を線積分の形で導入してある。同図は離散時間ステップを6回繰り返した計算結果であり、定常状態に達していないために十分な渦の発達は観察されないが、図中黒印●で示す極めて数少ない節点数で流況特性を再現できることがわかり曲辺要素のもつ特徴を理解できる。

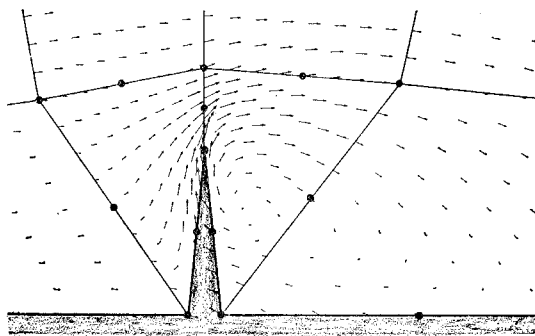


図-2 適用例 ($Re=150$ の場合)

4. 数値解析例

以上の手法を用いて H 港区において 150 m の離岸防波堤を設置した場合の潮流変化を定常繰り返し計算で求めた。H 港区は西防波堤西北部に 1.5 m~7.0 m の浅瀬がある以外はほぼ 10 m 前後の水深であり、防波堤沖合 200 m 近くに 10 m の等水深線が東西方向に延びている。また、付近の潮流は卓越した半日周潮の東西流が観測され、潮流変化への影響範囲の推算は東西流最強時で十分である。

計算対象範囲は東西・南北方向にそれぞれ 2.2 km, 1.1 km を選び、東流最強時の境界条件として東西境界において $\zeta_E=0.5833$ m, $U_E=0.5$ m/sec および $\zeta_W=0.6877$ m, $U_W=0.6$ m/sec をそれぞれ与え、流速は岸側から線型分布で与えた。また、沖合・岸側および防波堤における境界条件としては壁面に直交する流量フラックスを零とした。要素網は図-3に示す 246 節点の 64 要素からなる曲辺要素で構成され、未知量は節点の自由度が 3 であることから 738 元連立一次方程式を解くことになる。要素間隔は縮流部で 25 m, 沖合部で 300 m の範囲にあり、曲辺要素を用いることにより縮流部および浅瀬領域を滑らかに近似表現している。

数値計算は離散化時間間隔 Δt , 摩擦係数 C_h , および水平渦粘性係数 ν^* を種々変えて行なった。計算は Δt

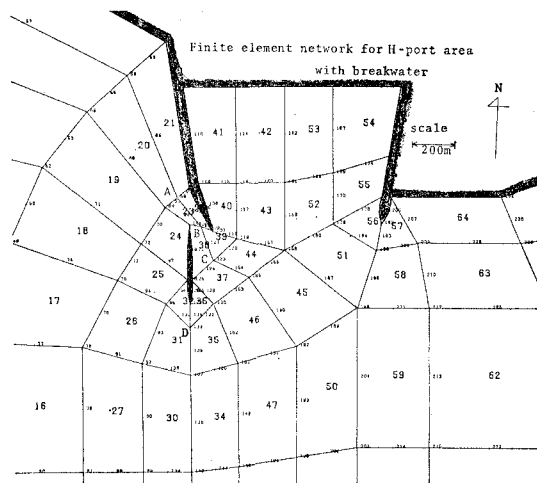


図-3 有限要素分割

を 1.5 秒に選んだときのみ安定であり、3.0 秒に選んだときには摩擦係数 C_h を 10, 100 に変えたにもかかわらず縮流部では水位・流速が増大・発散する傾向を示した。いま、正確度の目安として explicit な差分法に用いられる Courant-Friedrichs-Lewy の収束条件, $F=(\sqrt{gh}+U) \times \Delta t / \Delta x \leq 1.0$, の F 値を求めると, Δt が 1.5 秒のときには F 値が約 1.27 となり数値解は収束するのに対し, $\Delta t=3.0$ 秒では F 値は 3.81 となり収束するための必要十分条件を満たさなくなる。このことに原因する近似誤差が計算過程において累積して数値解を発散させるものと考えられる。

そこで、図-3 の A, B, C, D 地点での流速の絶対値 $|U|$ と水位 ζ の時間変化を比較検討した。この結果を図-4に示す。縦軸には計算条件が $\Delta t=1.5$ 秒, $C_h=10$ の場合の 1 ステップ計算後の $|U|$, ζ の値で無次元化した値を示した。1 ステップ後の計算値は Δt , C_h の値にかかわらず差異はないが, Δt を 3.0 秒に選んだときには計算の進行とともに、非線型項が卓越すると予想される縮流部 A, B 地点で流速・水位ともに一様に増大する結果を得た。従来、implicit 法は流速・水位を計算全領域で連成して解くために Δt の大きさに関係せず無条件に安定な解法であるといわれているが、その反面、数値的減衰効果が内包されていないため、B 点のような離散化誤差が発生し易い縮流部においては不必要な雑音成分を増大させることとなり解は即座に発散するのであろう。また、この原因の 1 つは定式化の段階で要素間における水面勾配の連続性を負荷していないことも挙げられる。

図-5に $\Delta t=1.5$ 秒, $C_h=10$ および水平渦粘性係数 ν^* を要素の規模 L_E に合わせて要素毎に 20~700 の値で与えた場合の 12 ステップ後の流況図を示す。図-4

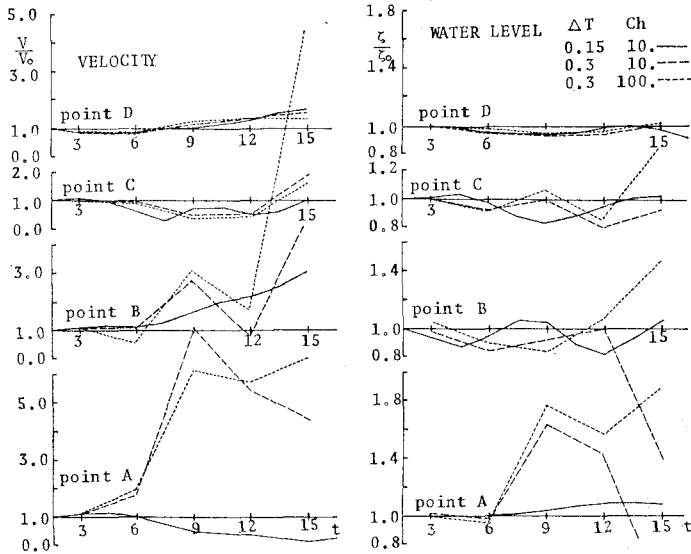


図-4 流速・水位の時間変化

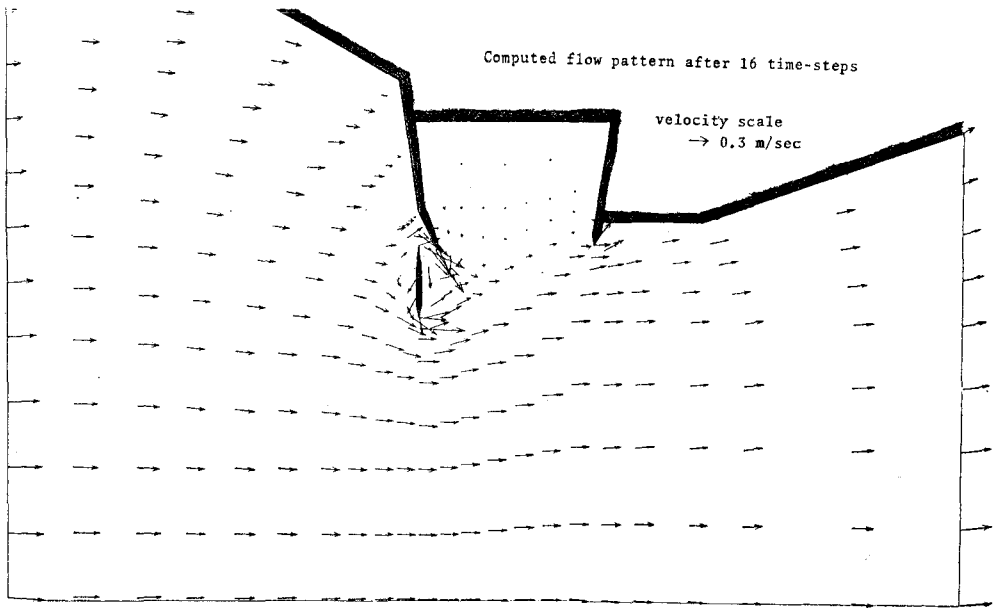
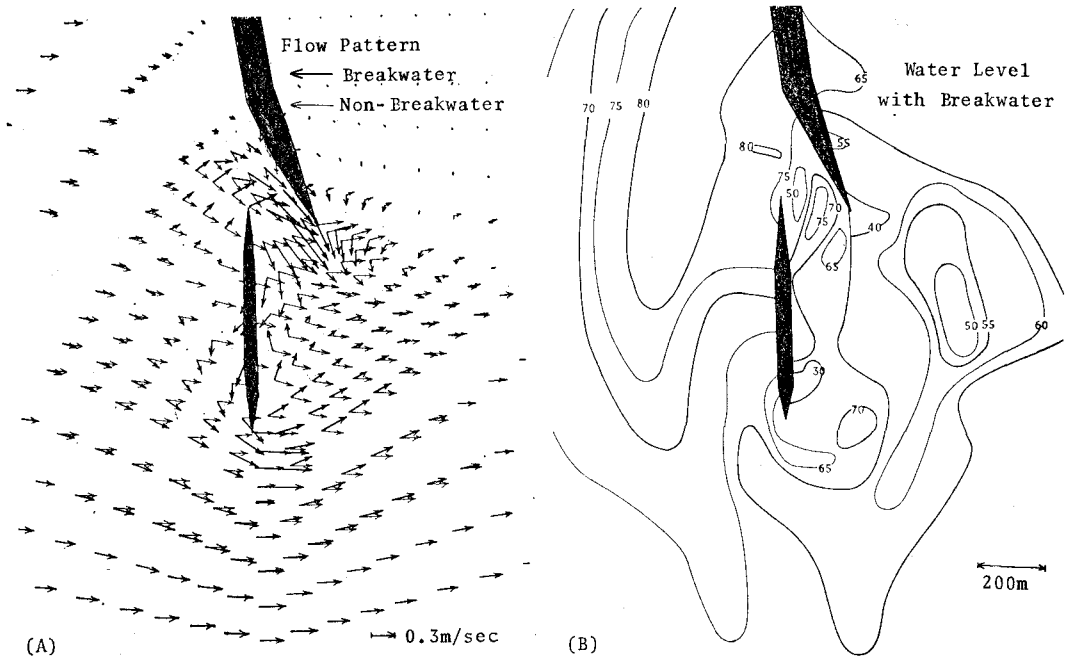


図-5 流況計算結果 (防波堤のある場合)

の点 B における流速の時間変化から推察できるように、12 計算ステップでは未だ定常解には達していないが、潮流観測図と比較して妥当な計算結果が得られたといえる。図には示さないが粘性項を省略した計算において、辺上の節点の流速値は隅節点のそれに比較して一桁小さい値を示す結果を得ており、水平渦粘性係数による平滑化の効果は有限要素法の解に鋭敏な影響を与えるようである。

離岸防波堤近傍の流動を拡大して示したのが図-6(A)

の太い矢印であり、対応する等水位線図を同図 (B) に示す。縮流部の水深は約 3.0 m で離岸防波堤前面より迂回した流塊が最大流速 0.93 m/sec で流れ、また、防波堤沖合側先端 9.6 m 水深地点での流速は約 0.77 m/sec で周囲流速のほぼ 2 倍の値となり、その流向は沖合方向に少し曲げられている。また、離岸堤後背部の流れは離岸堤沿いに流れ中央部で合流することとなり、渦領域の存在はみられない。このことは粘性項の大きさと直接関係しており、今回の計算で離岸堤近傍の要素に与えた $\nu^* =$



図—6 防波堤近傍の流況図 ((A) 流動分布, (B) 等水位線)

20.0は若干大きく、平滑化効果が実際の流動に増して過大に作用しているものと考えられる。 $\nu^* = 0.01 \times (L_E)^{4/3} \approx 1.0$ 程度の値を全領域に滑らかに分布させて用いるのが適当であろう。また、防波堤先端部で等水位線が40 cmに落ち込み流束が集中する個所がみられるが、この地点はH港区内において水深が急に浅くなっている領域であり地形形状の影響を反映しているものと考えられる。

次に、同一条件で計算した離岸防波堤の無い場合の流速分布を 図—6 (A) の細い矢印で示す。上述の流況と比較するならば、離岸防波堤の設置による潮流流動の影響範囲は防波堤前後面約100 mおよび沖合方向約70 mの極く近傍であることがわかる。また、防波堤沖合では沿岸に沿って流れ、その平均流速は約0.30 m/secである。

5. 結 論

以上、潮流のzooming解析を前提に、局所的な流動を複雑な地形形状を考慮して再現できる点に着目して重み付き残差法の適用の可能性を検討した。解析例としてH港区内に離岸防波堤を設置した場合の流動変化を計算した結果、曲辺要素の適用により極めて数少ない要素・節点

数で流況特性を再現できることがわかった。

しかしながら、二次の精度の曲辺要素を用いたとき、一次微係数が要素間で不連続となる可能性があること、また水平渦粘性係数が流速場に微妙に影響を与えること等、未だ未解決な問題点を残している。これら为了避免するためには、現象に見合った離散化間隔を選ぶ必要があり、加えて要素分割は流動の特性を考慮して行なわねばならない。このように現象に対する物理的な認識が解析精度に直接的な影響を与える点が有限要素法の特徴であるといえる。

参 考 文 献

- 1) 榎木 亨・中辻啓二・和手信泰: 潮流解析における重み付き残差法の適用について, 第23回海講論文集, pp. 488~492, 1976.
- 2) Gallagher, G. H., J. T. Oden, C. Taylor and O. C. Zienkiewicz: Finite Elements in Fluids, John Wiley & Sons, Vol. 1, pp. 279~Vol. 2, pp. 287, London, 1975.
- 3) 川原陸人・竹内則雄・首藤伸夫: 2段階ラックス・ウェンドロフ有限要素法による潮流流解析, 第23回海講論文集, pp. 498~501, 1976.