

“区界積分法”による塩水くさびの一般解法 (1)

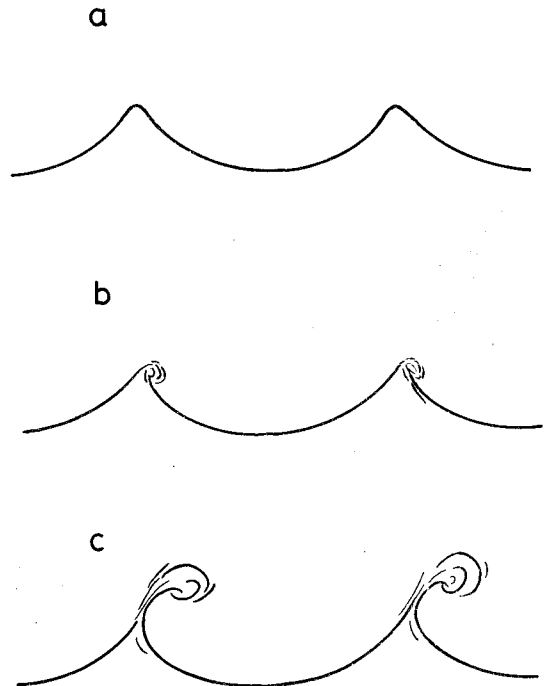
日 野 幹 雄*・灘 岡 和 夫**

1. はじめに

二層流の計算では、界面抵抗を如何に評価するかということが一つの重要な要素となっている。例えば、塩水くさびの形状や侵入長が抵抗係数のとり方によって、計算上かなり変化することはよく知られている。界面抵抗には、層流状態での純粋な摩擦抵抗、界面波による造波抵抗、Reynolds 応力、界面での混合による抵抗などが考えられるが、従来の界面抵抗の理論は、この中の最初の二つ要素のみを考慮して行なわれている。しかし、以下に述べるようなメカニズムを考えることにより、塩水くさびにおいても下層流体の上層への混入 (entrainment) が生じると考えられる。すなわち、まず境界面に発生した内部波が発達して非線形領域に入るとその形状はちょうど Stokes 波が鍋底尖峰となること、孤立波が平均水面から上昇側にしかできないことに対応して図1-1-a のように上下非対称性を有するようになり、次に、この状態がさらに発達すれば内部波は碎波し、図1-1-b のようにその crest 部分で砕けるようになる。流れの乱れ強度は、塩水くさびでは一般に下層より上層の方が大きいと考えられるから、crest 部分で砕けた流体塊は、図1-1-c のように上層の流れの中に拡散していくことが可能になり、その結果、下層から上層への entrainment が生じると考えられるのである。

上述したように、従来の塩水くさびの理論では、主として界面摩擦のみを考慮しており、entrainment 効果をも取り入れているものとしては、例えば、須賀²⁾の理論などに見られるだけである。これとは対照的に、fjord 型の二層流計算では主として entrainment 効果のみを界面抵抗として考慮している。したがって、この両者は、界面抵抗の取り扱いにおける単純化として二つの極に位置していると見ることが出来るが、界面抵抗の評価に際しては、両者の関係を明らかにすることを通じて、これらを同時に考慮したさらに一般的な取り扱いを行なうことが望まれる。

そこで、本論文では、塩水くさびの計算を一般化し、あわせて乱流構造と密度流形態の分類との関係を明らかに



図—1

にし、流速分布、密度分布形も従来のように関数形を固定せず、未知量として取扱い、方程式の解として決定するという目的から、基礎方程式の“区界積分法”による一次元化解法を提定し、その一般論を述べた。

また、ここでは、実際の塩水くさびの front 部分が、遡上時と退行時とで異なった挙動を示すというような非定常性を考慮に入れるため、基礎方程式の中の時間依存項をそのまま残して解析している。

2. 基本式系の導出

解析の基礎となるのは、質量、密度、運動量の局所的バランスを記述する方程式系であるが、いま二次元の場合について記せば、以下ようになる。

$$\text{div} \mathbf{U} = 0 \dots\dots\dots (1)$$

$$\frac{D\rho}{Dt} = 0 \dots\dots\dots (2)$$

* 正会員 工博 東京工業大学教授 工学部土木工学科

** 学生会員 東京工業大学大学院

$$\rho \frac{DU}{Dt} = -\text{grad } p + \rho g + \mu \Delta U \quad \dots\dots\dots (3)$$

ここに、 $\mathbf{U}=(u, w)$: 速度ベクトル、 $\mathbf{g}=(0, -g)$: 重力ベクトル。

次に乱流場を取り扱うために、速度 $\mathbf{U}$ と密度 ρ とを平均成分と変動成分に分離して

$$\mathbf{U} = \bar{\mathbf{U}} + \mathbf{U}' \quad \dots\dots\dots (4)$$

$$\rho = \bar{\rho} + \rho' \quad \dots\dots\dots (5)$$

として式 (1)~(3) 代入し、その ensemble average をとる。さらに、それに対して乱流境界層的なオーダー比較を行なうことによって微小項を省略すれば、以下の式を得る。

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + \frac{\partial \bar{w}}{\partial z} = 0 \quad \dots\dots\dots (6)$$

$$\frac{D\bar{\rho}}{Dt} + \frac{\partial}{\partial z}(\bar{\rho}'w') = 0 \quad \dots\dots\dots (7)$$

$$\bar{\rho} \frac{D\bar{\rho}}{Dt} = -\frac{\partial \bar{\rho}}{\partial x} - \bar{\rho} \frac{\partial}{\partial z}(\bar{u}'w') + \nu \bar{\rho} \frac{\partial^2 \bar{w}}{\partial z^2} \quad \dots\dots\dots (8)$$

$$\frac{\partial \bar{\rho}}{\partial z} = -\bar{\rho}g - \bar{\rho} \frac{\partial}{\partial z}(\bar{w}'^2) \quad \dots\dots\dots (9)$$

式 (6)~(9) は、 $\bar{u}$, $\bar{w}$, $\bar{\rho}$, $\bar{p}$ 等々の局所的変量を未知変数とする非線形連立微分方程式であるが、この解を得ることは困難をきわめる。一方、二層流として取り扱う通常の塩水くさびの計算方法は、断面平均流速、あるいは上・下層水深といったより global な変量を未知変数とするものであって、その点、それらは、式 (6)~(9) の解法として最も単純化されたものであると見ることが出来る。したがって現象解明の見通しの良さ（単純な解法ほど一般によい）と解の正確さの二つの要素の関連から見て、その最適解法は、これらの両極限の中間に存在すると考えられる（図-2 参照）。

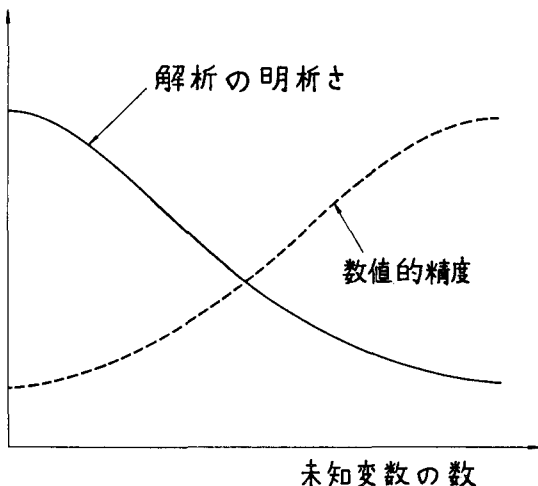


図-2

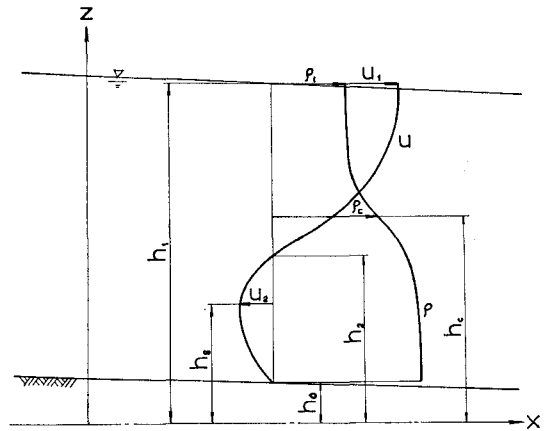


図-3

そこで、ここでは、図-3 に示される変数、 $u_1, u_2, \rho_1, \rho_2, h_1, h_2, h_c$ 等々を計算上の未知変数にとることにする。（ただし、 h_c は密度分布曲線の変曲点までの基準線からの高さ。）そのためには、式 (6)~(9) を鉛直方向に積分することが必要になる。いま、独立な積分区間として、 $[h_0, h_2]$, $[h_2, h_1]$, $[h_0, h_c]$ をとれば、基本式として以下のものが得られる。

a) 質量保存式

$$\frac{\partial}{\partial x} \int_{h_0}^{h_2} \bar{u} dz + \frac{\partial h_2}{\partial t} + V_2 = 0 \quad \dots\dots\dots (10)$$

$$\frac{\partial}{\partial x} \int_{h_2}^{h_1} \bar{u} dz + \frac{\partial}{\partial t} (h_1 - h_2) - V_2 = 0 \quad \dots\dots\dots (11)$$

$$\frac{\partial}{\partial x} \int_{h_0}^{h_c} \bar{u} dz + \frac{\partial}{\partial t} h_c + V_c = 0 \quad \dots\dots\dots (12)$$

b) 密度保存式

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{h_0}^{h_2} \bar{\rho} dz + \frac{\partial}{\partial x} \int_{h_0}^{h_2} (\bar{\rho} \bar{u}) dz + \bar{\rho}_2 V_2 + \bar{\rho}'_2 \bar{w}'_2 = 0 \quad \dots\dots\dots (13)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{h_2}^{h_1} \bar{\rho} dz + \frac{\partial}{\partial x} \int_{h_2}^{h_1} (\bar{\rho} \bar{u}) dz - \bar{\rho}_2 V_2 - \bar{\rho}'_2 \bar{w}'_2 + \bar{\rho}'_1 \bar{w}'_1 = 0 \quad \dots\dots\dots (14)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{h_0}^{h_c} \bar{\rho} dz + \frac{\partial}{\partial x} \int_{h_0}^{h_c} \bar{\rho} \bar{u} dz + \bar{\rho}_c V_c + \bar{\rho}'_c \bar{w}'_c = 0 \quad \dots\dots\dots (15)$$

c) 運動方程式

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \int_{h_0}^{h_2} (\bar{\rho} \bar{u}) dz + \frac{\partial}{\partial x} \int_{h_0}^{h_2} (\bar{\rho} \bar{u}^2) dz = & -\frac{\partial}{\partial x} \int_{h_0}^{h_2} \int_z^{h_2} (\bar{\rho} g \\ & - \bar{w}'^2 \frac{\partial \bar{\rho}}{\partial \eta}) d\eta - \bar{\rho} \bar{w}'^2 dz + \frac{\partial h_2}{\partial x} \int_{h_2}^{h_1} (\bar{\rho} g - \bar{w}'^2 \frac{\partial \bar{\rho}}{\partial z}) dz \\ & - \frac{\partial h_0}{\partial x} \int_{h_0}^{h_1} (\bar{\rho} g - \bar{w}'^2 \frac{\partial \bar{\rho}}{\partial z}) dz - \bar{\rho}_2 \bar{w}'^2 \frac{\partial h_2}{\partial x} \\ & + \nu \left(\bar{\rho} \frac{\partial \bar{u}}{\partial z} \right)_{z=h_2} - \nu \left(\bar{\rho} \frac{\partial \bar{u}}{\partial z} \right)_{z=h_0} - \nu \int_{h_0}^{h_2} \bar{\rho} \frac{\partial \bar{\rho}}{\partial z} \frac{\partial \bar{u}}{\partial z} dz \\ & - \bar{\rho}_2 \bar{u}'_2 \bar{w}'_2 + \int_{h_0}^{h_2} \bar{u}' \bar{w}' \frac{\partial \bar{\rho}}{\partial z} dz \quad \dots\dots\dots (16) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \int_{h_2}^{h_1} (\rho \bar{u}) dz + \frac{\partial}{\partial x} \int_{h_2}^{h_1} (\rho \bar{u}^2) dz = & - \frac{\partial}{\partial x} \int_{h_2}^{h_1} \left[\int_z^{h_1} (\rho g \right. \\ & \left. - \bar{w}^2 \frac{\partial \rho}{\partial \eta}) d\eta - \bar{\rho} \bar{w}^2 \right] dz - \frac{\partial h_2}{\partial x} \int_{h_2}^{h_1} \left(\rho g - \bar{w}^2 \frac{\partial \rho}{\partial z} \right) dz \\ & - \bar{\rho}_1 \bar{w}_1^2 \frac{\partial h_1}{\partial x} + \bar{\rho}_2 \bar{w}_2^2 \frac{\partial h_2}{\partial x} - \nu \left(\bar{\rho} \frac{\partial \bar{u}}{\partial z} \right)_{z=h_2} \\ & - \nu \int_{h_2}^{h_1} \frac{\partial \bar{\rho}}{\partial z} \frac{\partial \bar{u}}{\partial z} dz - \bar{\rho}_1 \bar{u}_1' \bar{w}_1' \\ & + \bar{\rho}_2 \bar{u}_2' \bar{w}_2' + \int_{h_2}^{h_1} \bar{u}' \bar{w}' \frac{\partial \bar{\rho}}{\partial z} dz \dots\dots\dots (17) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \int_{h_0}^{h_c} (\rho \bar{u}) dz + \frac{\partial}{\partial x} \int_{h_0}^{h_c} (\rho \bar{u}^2) dz = & - \frac{\partial}{\partial x} \int_{h_0}^{h_c} \left[\int_z^{h_1} (\rho g \right. \\ & \left. - \bar{w}^2 \frac{\partial \rho}{\partial \eta}) d\eta - \bar{\rho} \bar{w}^2 \right] dz + \frac{\partial h_c}{\partial x} \int_{h_c}^{h_1} \left(\rho g \right. \\ & \left. - \bar{w}^2 \frac{\partial \rho}{\partial z} \right) dz - \frac{\partial h_0}{\partial x} \int_{h_0}^{h_1} \left(\rho g - \bar{w}^2 \frac{\partial \rho}{\partial z} \right) dz \\ & - \bar{\rho}_c \bar{w}_c^2 \frac{\partial h_c}{\partial x} + \nu \left(\bar{\rho} \frac{\partial \bar{u}}{\partial z} \right)_{z=h_c} - \nu \left(\bar{\rho} \frac{\partial \bar{u}}{\partial z} \right)_{z=h_0} \\ & - \nu \int_{h_0}^{h_c} \frac{\partial \bar{\rho}}{\partial z} \frac{\partial \bar{u}}{\partial z} dz - \bar{\rho}_c \bar{u}_c' \bar{w}_c' \\ & + \int_{h_0}^{h_c} \bar{u}' \bar{w}' \frac{\partial \bar{\rho}}{\partial z} dz - \bar{\rho}_c \bar{u}_c V_c \dots\dots\dots (18) \end{aligned}$$

ここに、 $u_a = u|_{z=h_2}$ であり、その他の添字 1, 2, c はそれぞれ $z=h_1$, $z=h_2$, $z=h_c$ での値であることを意味する。

また、式中の V_2 , V_c は、

$$V_2 = w_2 - \frac{\partial h_2}{\partial t} \dots\dots\dots (19)$$

$$V_c = w_c - \frac{\partial h_c}{\partial t} - u_c \frac{\partial h_c}{\partial x} \dots\dots\dots (20)$$

であり、それぞれ、 $z=h_2(x, t)$, $z=h_c(x, t)$ の曲線に対して、下層から上層に向う右向を正とする。その法線方向への相対的な平均流速を表わしている。すなわち、これらはいわゆる entrainment に他ならない。

式 (16)~(18) を見ると、界面抵抗としては、粘性摩擦: $\nu \bar{\rho} \frac{\partial \bar{u}}{\partial z}$, Reynolds stress: $\bar{\rho} \bar{u}' \bar{w}'$, entrainment による付加応力: $\bar{\rho} \bar{u} V$ が現われることが分かる。この中で、特に Reynolds stress と entrainment による付加応力が同時に現われることに注目せねばならない。この点は一般の Plume の解析方法と異なるところである。すなわち Plume の解析では、基本式系として質量・密度・運動量・エネルギーのうち、どの組み合わせを用いるかによって PB モデル・MTT モデル等に分かれ、それぞれ Reynolds 応力、或いは entrainment の仮定を必要とするが、本論文の方法によれば、これらは、別々のものとして同時に現われているのである。この両者の関係は、流れの乱流構造を介して結びつけられており、Fox³⁾ などにより主張された両者の関係は、その特別な場合であると考えられる。

また、式 (16), (17) の中に、entrainment による付加応力が現われてないことにも注意を要する。このことは、境界面において entrainment が存在したとしても、その場所で流速 $\bar{u}$ がゼロのときには付加応力としては現われてこないということの意味している。したがって、例えば Keulegan⁴⁾ のように entrainment による付加応力 τ_e を断面平均流速 U を用いて $\tau_e = \rho V U$ というように表わすことには問題があると思われる。すなわち、上記のことは τ_e を境界面での局所の変量を用いて表現すべきことを示唆している。

ここで、本論文における解析法“区界積分法”を plume におけるこれまでの一般的解析法との関連で位置づけてみると下表のようになる。

一次元化法	entrainment 法	区界積分法
	shear stress 法	
	moment 法	

上記中 entrainment 法とは entrainment の仮定を導入する MTT (Morton, Turner & Taylor) モデル等を、shear stress 法とは Reynolds 応力の仮定を導入する PB (Priestly and Ball) モデル等を意味し、また、moment 法は、林⁵⁾ によって最近提案された解析法である。

3. 基本式系の解法に関する一般論

前節で導出した基本式系 (10)~(18) を、従来行なわれてきたような単純な一次元的解法によってではなく、速度、あるいは、密度、Reynolds stress 等に相似性を有する適当な分布形を仮定して解くことを考える。

速度、密度については、次の形を仮定する。

a) 速度

$$[h_2, h_1] \text{ 区間 } \bar{u} = w_1(x, t) f_1(\alpha z - \alpha h_2) \dots (21)$$

$$[h_0, h_2] \text{ 区間 } \bar{u} = w_2(x, t) f_2(\beta z - \beta h_0) \dots (22)$$

b) 密度

$$[h_0, h_1] \text{ 区間 } \bar{\rho} = w_3(x, t) f_3(\gamma z - \gamma h_c) + c(x, t) \dots\dots\dots (23)$$

ここに、 α, β, γ は scale factor であり、それ自体が x, t を独立変数とする未知量である。また、 w_i は重み関数、 f_i は相似分布関数である。

式 (21)~(23) は、 $z=h_0$, $z=h_s$, $z=h_2$, $z=h_c$, $z=h_1$ での境界条件、

$$\left. \begin{aligned} z=h_0; & \quad \bar{u}=0 \\ z=h_s; & \quad \bar{u}=u_2, \quad \frac{\partial \bar{u}}{\partial z}=0 \\ z=h_2; & \quad \bar{u}=0 \\ z=h_c; & \quad \bar{\rho}=\bar{\rho}_c, \quad \frac{\partial^2 \bar{\rho}}{\partial z^2}=0 \\ z=h_1; & \quad \bar{u}=\bar{u}_1, \quad \bar{\rho}=\bar{\rho}_1 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (24)$$

を用いて以下の様に表わすことができる。

a) 速度

$$[h_2, h_1] \text{ 区間}$$

$$\bar{u} = \frac{\bar{u}_1}{f_1(\alpha h_1 - \alpha h_2)} \cdot f_1(\alpha z - \alpha h_2) \dots (25)$$

ここで,

$$f_1(0) = 0 \dots (26)$$

$[h_0, h_2]$ 区間

$$\bar{u} = \frac{\bar{u}_2}{f_2(\beta h_s - \beta h_0)} \cdot f_2(\beta z - \beta h_0) \dots (27)$$

ここで

$$f_2(\beta h_2 - \beta h_0) = 0 \dots (28)$$

$$f_2'(\beta h_s - \beta h_0) = 0 \dots (29)$$

$$f_2(0) = 0 \dots (30)$$

b) 密度

$$\bar{\rho} = \frac{\bar{\rho}_1 - \bar{\rho}_0}{f_3(\gamma h_1 - \gamma h_0)} \cdot f_3(\gamma z - \gamma h_0) + \bar{\rho}_0 \dots (31)$$

ここで

$$f_3(0) = 0 \dots (32)$$

$$f_3'(0) = 0 \dots (33)$$

式 (28), (29) を見ると分かるように, β, h_s は h_2 の関数である. したがって, 速度及び密度の分布形は, $f_1(0) = f_2(0) = f_3(0) = f_3'(0) = 0$ を満たす, f_1, f_2, f_3 の適当な分布形を仮定することによって, $\alpha, \gamma, h_1, h_2, h_0, \bar{u}_1, \bar{u}_2, \bar{\rho}_1, \bar{\rho}_0$ の 9 個の変数によって表わせることになる.

次に, 流れの乱流構造についても同様に上記 9 個の変数によって表わされる適当な相似分布関数を仮定して, 式 (25), (27), (31) と共に式 (10)~(18) に代入し, さらに, entrainment 量に関して, 適当な特性式を導入すれば, この 9 個の変数を従属変数とする閉じた形の連立微分方程式を得ることが出来る. いま, それを matrix type で表わせば次のようになる.

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{y} = \mathbf{b} \dots (34)$$

ここに, $\mathbf{A}; h_1, h_2, h_0, \bar{u}_1, \bar{u}_2, \bar{\rho}_1, \bar{\rho}_0, \alpha, \gamma$ の値によって決定される matrix

$$\mathbf{y} = \left\{ \frac{\partial h_1}{\partial x}, \frac{\partial h_2}{\partial x}, \frac{\partial h_0}{\partial x}, \frac{\partial \bar{u}_1}{\partial x}, \frac{\partial \bar{u}_2}{\partial x}, \frac{\partial \bar{\rho}_1}{\partial x} \right\}^T$$

$$\left\{ \frac{\partial \bar{\rho}_0}{\partial x}, \frac{\partial \alpha}{\partial x}, \frac{\partial \gamma}{\partial x}, \frac{\partial h_1}{\partial t}, \frac{\partial h_2}{\partial t}, \frac{\partial h_0}{\partial t}, \frac{\partial \bar{u}_1}{\partial t}, \frac{\partial \bar{u}_2}{\partial t}, \frac{\partial \bar{\rho}_1}{\partial t}, \frac{\partial \bar{\rho}_0}{\partial t}, \frac{\partial \alpha}{\partial t}, \frac{\partial \gamma}{\partial x} \right\}^T$$

$\mathbf{b}; h_1, h_2, h_0, \bar{u}_1, \bar{u}_2, \bar{\rho}_1, \bar{\rho}_0, \alpha, \gamma$ の値によって決定される vector.

特に定常な場合には, 式 (34) は以下のようになる.

$$\frac{d}{dx} \eta(x) = \mathbf{A}^{-1} \cdot \mathbf{b} \dots (35)$$

ここに, $\eta(x) = \{h_1, h_2, h_0, u_1, u_2, \rho_1, \rho_0, \alpha, \gamma\}^T$

4. あとがき

本論文では“区界積分法”による塩水くさびの基礎方程式の一次元化を行なった. その結果, 界面抵抗として界面摩擦と entrainment による付加応力が同時に現われるが, このことは本論文で示した方法が, 従来の塩水くさび型と fjord 型の二つの計算方法の一般化となっていることを示している. また, 本論文の方法による新しい成果は流速分布・密度分布型をも未知量として決定することが可能となることである.

参考文献

- 1) 水理委員会密度流研究小委員会: 成層密度流の界面現象 (1), 土木学会論文集, 242 号, pp. 73~90, 1975.
- 2) 須賀豊三: 混合を考慮した二層一次元不定流についての一考察, 第 31 回年講概要集, pp. 353~354, 1976.
- 3) Morton, B.R.: The Choice of Conservation Equations for Plume Models, Jour. Geophysical Research, No. 30, pp. 7409~7416, 1971.
- 4) Keulegan, G.H.: Interfacial and Mixing in Stratified Flows, Jour. Research of Nat. Bur. Standards, Vol. 6, pp. 487~500, 1949.
- 5) 林 泰造・有田正光: 温度密度流の拡がりに関する予測モデルの研究, 第 20 回水理講演会論文集, pp. 161~172, 1976.