

三次元表層水平噴流に関する研究

岩崎 敏夫*・田中 博通**

1. まえがき

エネルギー問題がクローズアップされるに伴い火力・原子力発電所からの温排水の拡散機構の解明が急務となってきた。密度差のない三次元水中噴流については、非圧縮性流体に関して Tollmien が研究して以来、しばしば研究されている。しかし、表層放流のような水平噴流については、林¹⁾・玉井²⁾・Engelund³⁾などの研究があるが研究例は意外と少ない。そこで密度差のある場合との比較に進む予備的研究として、今回は表層水平噴流の性質を全体的にとらえるために次のような理論的・実験的研究を行なった。実際の理論の適用にあたっては取扱いに困難な面もあり、ここでは異なった立場より解析を進めることとした。すなわち、半値幅の拡がりを実験より求め、その諸値を用いて軸上流速の減少割合、噴流軸に直角方向の流速分布、連行係数、渦動粘性係数、流量増加割合、エネルギー減少割合をすべて形成領域及び確立領域について求める理論を誘導し実験と比較してよい結果を得た。この誘導では y, z 方向の流速分布の相似形は仮定されていない。

2. 実験装置および実験方法

実験は、図-1 に示すように 4.7 m×5.0 m×0.5 m の実験水槽と 1.0 m×5.0 m×0.5 m の貯水槽及び 0.8 m×1.0 m×0.8 m の高水槽から構成された平面水槽を用いて行なった。放出口は 5.0 cm×5.0 cm の正方形である。流速測定は超小型プロベラ流速計を用いた。今回は、初期平均流速が 20 cm/sec (Case-1) と 30 cm/sec (Case-2) の2ケースについて行なった。放出口からの流れが管流になっているため、最大流速 (u_{max}) は x 軸上流速となった。

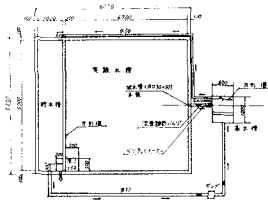
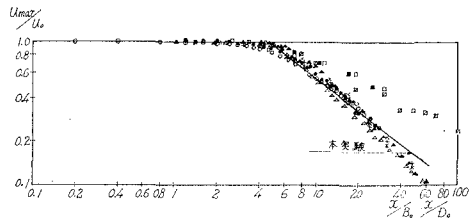


図-1 実験水槽 (平面図)

3. 実験結果

図-2 は u/u_{max} と x/B_0 との関係である。 $u_{max}/u_0 \leq 0.8$ において両ケースともほぼ一致するのでそのデータを用いて減少割合を求めると次式のようになる。



実験者	本実験	ML (Morton, Yeh, et al.)	RA (Rouse, et al.)	Hunter (Hunter & House)	W. Douglas (Douglas)
記号	○	□	△	×	▲
u_{max}	17.48	29.01	12.20	30.50	48.80
B_0	5.0	5.0	0.635	0.635	0.157
u_0	5.0	5.0	0.635	0.635	0.157
Re	3.76×10^3	1.45×10^3	7.75×10^3	1.94×10^3	7.76×10^3

図-2 u_{max}/u_0 と x/B_0 との関係と既往の研究との比較

$$u_{max}/u_0 = 3.26(x/B_0)^{-0.760} \dots\dots\dots (3.1)$$

軸上流速は $x^{-0.760}$ で減速し、表層水平噴流の場合、二次元、三次元水中噴流の中間的な値となった。また、Engelund³⁾による三次元表層温噴流の実験結果である $x^{-0.778}$ と同じような値となる。式 (3.1) より形成領域の長さを求めると $x/B_0 = 4.73$ となり、既往の研究と一致する。

図-3 は、半値幅と x/B_0 との関係である。形成領域ではほぼ一定であるが、確立領域においては拡がり急になり、多少 b_y の方が b_z よりも拡がる傾向がある。

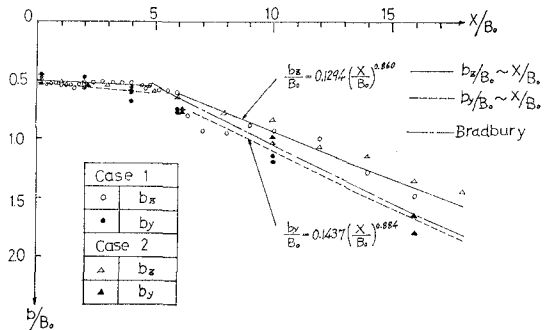


図-3 半値幅の拡がり

* 正会員 工博 東北大学教授 工学部土木工学科
** 学生会員 工修 東北大学大学院 工学研究科

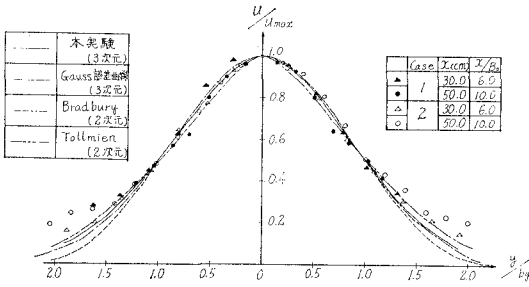


図-4 平均流速分布 ($x-y$ 面, 確立領域)

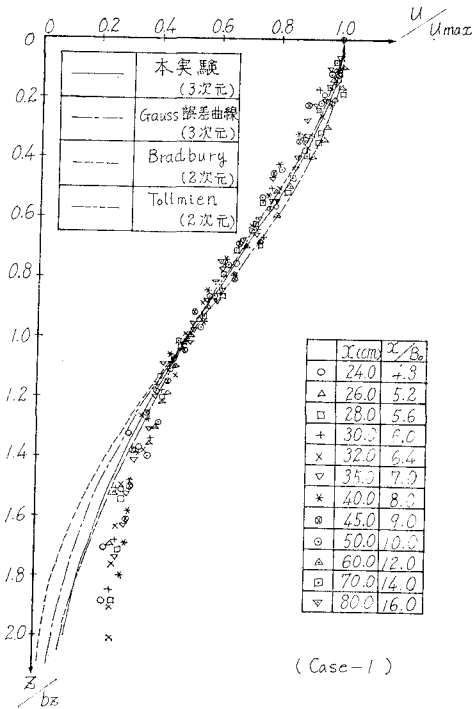


図-5 平均流速分布 ($x-z$ 面, 確立領域)

同時に Bradbury⁵⁾ が求めた値を示したが比較的一致する。

図-4, 図-5 は確立領域における $x-y$ 面, $x-z$ 面流速分布について, u/u_{max} を y/b_y (z/b_z) で表わしたものである。これより噴流の主要な領域において既往の研究と一致し, Gauss 分布で十分に近似できる。これから, 表層水平噴流の x 方向流速分布は半値幅でよくとまり自己保存的であるといえる。よって, x 方向流速分布の相似性の仮定が妥当であるといえる。

4. 三次元表層水平噴流理論解析

(1) 基礎方程式および解析に際しての仮定

$z=0$ で $\partial u/\partial x=0$ となることが確認できたので, $z=$

0 で剪断力が働かず運動量の交換がないものとし, $z \geq 0$ の部分について解析した。解析に際しての仮定は次のようなものである。

① 噴流拡散領域内外で圧力は一定であり, x 方向に $\partial p/\partial x$ が一定である。

② 拡散過程は運動学的に相似である。

以上の仮定より連続の式, 運動方程式は次式となる。

$$\partial u/\partial x + \partial v/\partial y + \partial w/\partial z = 0 \quad (4.1)$$

$$\frac{\partial u^2}{\partial x} + \frac{\partial uv}{\partial y} + \frac{\partial uw}{\partial z} = \varepsilon_y \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \varepsilon_z \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \quad (4.2)$$

$\varepsilon_y, \varepsilon_z: y, z$ 方向の渦動粘性係数で x の関数, 式 (4.2) を $y(-\infty \leq y \leq \infty), z(0 \leq z \leq \infty)$ で積分すると,

$$\int_{-\infty}^{\infty} u^2 dy dz = \text{const.} \quad (4.3)$$

となり, 運動量は一定となる。

(2) 形成領域における解析

図-6 は流況図である。ここに示した記号を用いると混合領域における流速分布は次のようになる。

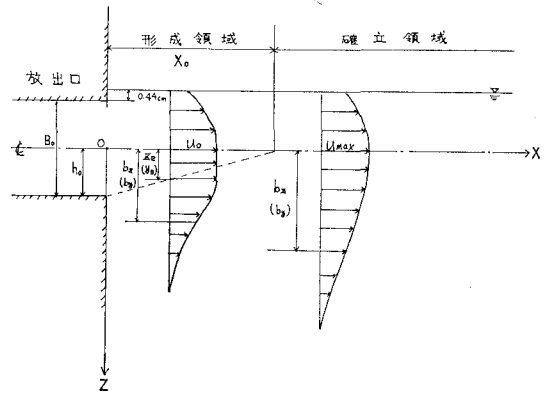


図-6 流況図

$$u = u_0 f_1(\eta_1) f_2(\eta_2), \quad \eta_1 = (y - y_e)/(b_y - y_e), \\ \eta_2 = (z - z_e)/(b_z - z_e) \quad (4.4)$$

形成領域の境界がほぼ直線的に変化するので

$$z_e = h_0 - h_0/x_0 \cdot x, \quad y_e = B_0/2 - B_0/2x_0 \cdot x \quad (4.5)$$

$z=0$ において $w=0$ とし $x-y$ 面での v と $y=0$ において $v=0$ とし $x-z$ 面での w を求める。次のような u を用いる。

$$u = u_0 \quad (0 \leq y \leq y_e), \\ u = u_0 f_1(\eta_1) \quad (y_e \leq y \leq y) \quad (4.6)$$

$$u = u_0 \quad (0 \leq z \leq z_e), \\ u = u_0 f_2(\eta_2) \quad (z_e \leq z \leq z) \quad (4.7)$$

式 (4.1) を $y(0 \leq y \leq y), z(0 \leq z \leq z)$ で積分すると v, w は次のようになる。

$$\begin{cases} v=0 & (y \leq y_e) \\ v = \frac{B_0}{2x_0} u_0 - u_0 \left(\frac{db_y}{dx} + \frac{B_0}{2x_0} \right) F_1(\eta_1) + u_0 \left\{ (\eta_1 - 1) \frac{B_0}{2x_0} + \eta_1 \frac{db_y}{dx} \right\} f_1(\eta_1) & (y \geq y_e) \end{cases} \quad (4.8)$$

$$\begin{cases} w=0 & (z \leq z_e) \\ w = \frac{h_0}{x_0} u_0 - u_0 \left(\frac{db_z}{dx} + \frac{h_0}{x_0} \right) F_1(\eta_2) + u_0 \left\{ (\eta_2 - 1) \frac{h_0}{x_0} + \eta_2 \frac{db_z}{dx} \right\} f_1(\eta_2) & (z \geq z_e) \end{cases} \quad (4.9)$$

$$F_1(\eta_1) = \int_0^{\eta_1} f_1(\eta_1) d\eta_1, \quad F_2(\eta_2) = \int_0^{\eta_2} f_1(\eta_2) d\eta_2$$

連行流速を連行係数を用いて表わすと次式となる。

$$v_\infty = -E_y u_0, \quad w_\infty = -E_z u_0 \quad (4.10)$$

E_y, E_z : y, z 方向の連行係数で x の関数

式 (4.8), 式 (4.9) と式 (4.10) より

$$\begin{cases} E_y = (db_y/dx + B_0/2x_0) I_1 - B_0/2x_0 \\ E_z = (db_z/dx + h_0/x_0) I_2 - h_0/x_0 \end{cases} \quad (4.11)$$

I_1 などの流速分布の積分形は後にまとめて表わした。

$z=0$ の $x-y$ 面と $y=0$ の $x-z$ 面で運動方程式の 1 次モーメントをとり, $0 \sim \infty$ まで y, z で積分すると

$$\begin{aligned} \varepsilon_y &= u_0 \left(\frac{db_y}{dx} + \frac{B_0}{2x_0} \right) (I_3 y_e + I_6 b_y - y_e I_6) \\ &\quad - u_0 I_1 \frac{B_0}{2x_0} (b_y - y_e) \end{aligned} \quad (4.12)$$

$$\begin{aligned} \varepsilon_z &= u_0 \left(\frac{db_z}{dx} + \frac{h_0}{x_0} \right) (I_4 z_e + I_8 b_z - I_8 z_e) \\ &\quad - u_0 \frac{h_0}{x_0} I_2 (b_z - z_e) \end{aligned} \quad (4.13)$$

式 (4.12), 式 (4.13) が渦動粘性係数と半値幅との関係式である。

次に流量増加割合 Q/Q_0 とエネルギー減少割合 E/E_0 を求める。初期流量は $Q_0 = u_0 B_0 h_0$ であるから

$$\begin{aligned} \frac{Q}{Q_0} &= \frac{2}{h_0 B_0} \left\{ y_e z_e + (b_y - y_e)(b_z - z_e) I_1 I_2 \right. \\ &\quad + (b_y - y_e)(b_z - z_e) I_2 \int_{-y_e/(b_y - y_e)}^0 f_1(\eta_1) d\eta_1 \\ &\quad \left. + (b_y - y_e)(b_z - z_e) I_1 \int_{-z_e/(b_z - z_e)}^0 f_1(\eta_2) d\eta_2 \right\} \end{aligned} \quad (4.14)$$

$1/2 m V^2$ の V の y, z 方向の寄与は小さいとして $V = u$ とし, 初期エネルギーは $1/2 \rho u_0^3 h_0 B_0$ であるから

$$\begin{aligned} \frac{E}{E_0} &= \frac{2}{h_0 B_0} \left\{ y_e z_e + (b_y - y_e)(b_z - z_e) I_9 I_{10} \right. \\ &\quad + (b_y - y_e)(b_z - z_e) I_{10} \int_{-y_e/(b_y - y_e)}^0 f_1^3(\eta_1) d\eta_1 \\ &\quad \left. + (b_y - y_e)(b_z - z_e) I_9 \int_{-z_e/(b_z - z_e)}^0 f_1^3(\eta_2) d\eta_2 \right\} \end{aligned} \quad (4.15)$$

(3) 確立領域における解析

図—6 より確立領域における流速分布は次式となる。

$$u = u_{\max} f_2(\eta_3) f_2(\eta_4), \quad \eta_3 = y/b_y, \quad \eta_4 = z/b_z \quad (4.16)$$

形成領域と同様にして, 式 (4.16) を式 (4.1) へ代入し

$y(0 \leq y \leq y), z(0 \leq z \leq z)$ で積分すると v, w は次式となる。

$$v = -F_2(\eta_3) d(u_{\max} b_y)/dx + u_{\max} \eta_3 f_2(\eta_3) db_y/dx \quad (4.17)$$

$$w = -F_2(\eta_4) d(u_{\max} b_z)/dx + u_{\max} \eta_4 f_2(\eta_4) db_z/dx \quad (4.18)$$

$$F_2(\eta_3) = \int_0^{\eta_3} f_2(\eta_3) d\eta_3, \quad F_2(\eta_4) = \int_0^{\eta_4} f_2(\eta_4) d\eta_4$$

連行流速を連行係数を用いて表わすと次式のようになる

$$v_\infty = -E_y' u_{\max}, \quad w_\infty = -E_z' u_{\max} \quad (4.19)$$

E_y', E_z' : y, z 方向の連行係数で x の関数

式 (4.17), 式 (4.18) と式 (4.19) より

$$d(u_{\max} b_y)/dx = E_y' u_{\max} / I_{11} \quad (4.20)$$

$$d(u_{\max} b_z)/dx = E_z' u_{\max} / I_{12} \quad (4.21)$$

式 (4.20) より式 (4.17), 式 (4.18) は次のようになる

$$v = -E_y' F_2(\eta_3) u_{\max} / I_{11} + u_{\max} \eta_3 f_2(\eta_3) db_y/dx \quad (4.22)$$

$$w = -E_z' F_2(\eta_4) u_{\max} / I_{12} + u_{\max} \eta_4 f_2(\eta_4) db_z/dx \quad (4.23)$$

式 (4.3) へ式 (4.16) を代入すると運動量は次式となる

$$d(2u_{\max}^2 b_y b_z I_{13} I_{14})/dx = 0 \quad (4.24)$$

運動量は保存されているから, $2u_{\max}^2 b_y b_z I_{13} I_{14} = u_0^2 B_0 h_0$ となり, よって

$$u_{\max} / u_0 = \sqrt{B_0 h_0 / (2 I_{13} I_{14} b_y b_z)} \quad (4.25)$$

軸上流速は, $(b_y b_z)^{-1/2}$ で減少することがわかる。

$z=0$ の $x-y$ 面と $y=0$ の $x-z$ 面で運動方程式の 1 次モーメントをとり, $0 \sim \infty$ まで y, z で積分し, 式 (4.20) 式 (4.21) を用いて整理すると次式となる。

$$\varepsilon_y = \frac{u_{\max} b_y}{I_{11}} (2I_{17} + I_{18}) E_y' - u_{\max} b_y I_{17} \frac{db_y}{dx} \quad (4.26)$$

$$\varepsilon_z = \frac{u_{\max} b_z}{I_{12}} (2I_{15} + I_{16}) E_z' - u_{\max} b_z I_{15} \frac{db_z}{dx} \quad (4.27)$$

上式が渦動粘性係数と連行係数, 半値幅との関係式である。 v_∞, w_∞ の流速分布は次のように定義できる。

$$v_\infty = -E_y' u_{\max} f_2(\eta_4), \quad w_\infty = -E_z' u_{\max} f_2(\eta_3) \quad (4.28)$$

式 (4.28) を式 (4.1) へ代入して, 0 から ∞ まで y, z で積分すると次式を得る。

$$d(u_{\max} b_y b_z)/dx = E_y' u_{\max} b_z / I_{11} + E_z' u_{\max} b_y / I_{12} \quad (4.29)$$

式 (4.29) と式 (4.24) より

$$b_y b_z du_{\max}/dx = -E_y' u_{\max} b_z / I_{11} - E_z' u_{\max} b_y / I_{12} \quad (4.30)$$

式 (4.30) と式 (4.21) より

$$b_y db_z/dx = E_y' b_z / I_{11} + 2E_z' b_y / I_{12} \quad (4.31)$$

式 (4.30) と式 (4.20) より

$$b_z db_y/dx = 2E_y' b_z / I_{11} + E_z' b_y / I_{12} \quad (4.32)$$

式 (4.31) と式 (4.32) より

$$E_y' = I_{11}/3 \cdot (2db_y/dx - b_y/b_z \cdot db_z/dx) \quad (4.33)$$

$$E_z' = I_{12}/3 \cdot (2db_y/dx - b_z/b_y \cdot db_y/dx) \quad (4.34)$$

これが連行係数と半値幅との関係式である。

式 (4.33) を式 (4.26), 式 (4.34) を式 (4.27) へ代入すると

$$\varepsilon_y = \frac{u_{\max} b_y}{3} \left\{ (I_{17} + 2I_{18}) \frac{db_y}{dx} - (2I_{17} + I_{18}) \frac{b_y}{b_z} \frac{db_z}{dx} \right\} \quad (4.35)$$

$$\varepsilon_z = \frac{u_{\max} b_z}{3} \left\{ (I_{15} + 2I_{16}) \frac{db_z}{dx} - (2I_{15} + I_{16}) \frac{b_z}{b_y} \frac{db_y}{dx} \right\} \quad (4.36)$$

上式より、渦動粘性係数は半値幅に関係していることがわかる。以上より両領域とも v, w , 連行係数, 渦動粘性係数は半値幅で表現できることがわかる。

次に流量増加割合とエネルギー減少割合を求めると式 (4.25) より

$$Q/Q_0 = (u_0 I_{11} I_{12}) / (u_{\max} I_{13} I_{14}) \quad (4.37)$$

これより、流量増加割合は軸上流速の減少割合に反比例することがわかる。

$1/2mV^2$ の V の y, z 方向の寄与は小さいとして、 $V=u$ とし式 (4.25) を用いると

$$E/E_0 = (u_{\max} I_{19} I_{20}) / (u_0 I_{13} I_{14}) \quad (4.38)$$

これより、エネルギー減少割合は軸上流速減少割合に比例することがわかる。

解析に際して用いた流速分布の積分形を以下にまとめて表わし、Gauss 分布で十分に近似できることからその値も併記する。

$$\begin{aligned} I_1 &= \int_0^\infty f_1(\eta_1) d\eta_1 & I_2 &= \int_0^\infty f_1(\eta_2) d\eta_2 \\ I_3 &= \int_0^\infty f_1^2(\eta_1) d\eta_1 & I_4 &= \int_0^\infty f_1^2(\eta_2) d\eta_2 \\ I_5 &= \int_0^\infty \eta_1 f_1^2(\eta_1) d\eta_1 & I_6 &= \int_0^\infty f_1(\eta_1) F_1(\eta_1) d\eta_1 \\ I_7 &= \int_0^\infty \eta_2 f_1^2(\eta_2) d\eta_2 & I_8 &= \int_0^\infty f_1(\eta_2) F_1(\eta_2) d\eta_2 \\ I_9 &= \int_0^\infty f_1^3(\eta_1) d\eta_1 & I_{10} &= \int_0^\infty f_1^3(\eta_2) d\eta_2 \\ I_{11} &= \int_0^\infty f_2(\eta_3) d\eta_3 & I_{12} &= \int_0^\infty f_2(\eta_4) d\eta_4 \\ I_{13} &= \int_0^\infty f_2^2(\eta_3) d\eta_3 & I_{14} &= \int_0^\infty f_2^2(\eta_4) d\eta_4 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} I_{15} &= \int_0^\infty \eta_4 f_2^2(\eta_4) d\eta_4 & I_{16} &= \int_0^\infty f_2(\eta_4) F_2(\eta_4) d\eta_4 \\ I_{17} &= \int_0^\infty \eta_3 f_2^2(\eta_3) d\eta_3 & I_{18} &= \int_0^\infty f_2(\eta_3) F_2(\eta_3) d\eta_3 \\ I_{19} &= \int_0^\infty f_2^3(\eta_3) d\eta_3 & I_{20} &= \int_0^\infty f_2^3(\eta_4) d\eta_4 \\ I_1 &= I_2 = I_{11} = I_{12} = 1.0645 & I_3 &= I_4 = I_{13} = I_{14} = 0.7527 \\ I_5 &= I_7 = I_{15} = I_{17} = 0.3607 & I_6 &= I_8 = I_{16} = I_{18} = 0.5666 \\ I_9 &= I_{10} = I_{19} = I_{20} = 0.6146 \end{aligned}$$

5. 解析結果の考察

図-7 は実験より求めた等流速線図と仮定した流速分布を表わしたものであり、仮定の妥当性がわかる。

図-3 の b_y, b_z を式 (4.25) に代入し $u_{\max}/u_0$ を求めたものが図-8 の破線であり、実測値とよく一致することがわかる。これより運動量保存の仮定が正しいといえる。

図-9 は形成領域の混合領域における v, w を式 (4.8) 式 (4.9) を用いて計算したものである。これより最大値は w の方が大きいが連行流速は v の方が大きいことがわかる。この結果は既往の研究とよく一致する。

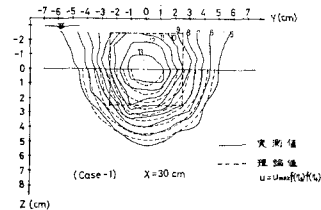


図-7 等流速線図と理論による流速分布との比較

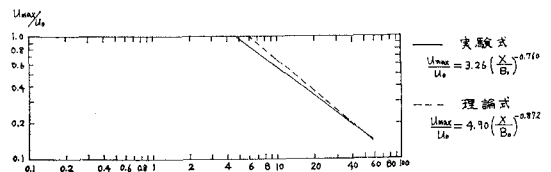


図-8 軸上流速分布

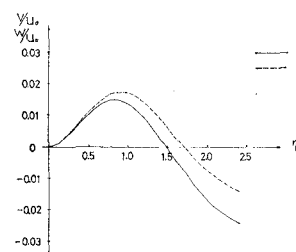


図-9 x, z 方向流速分布 (形成領域)

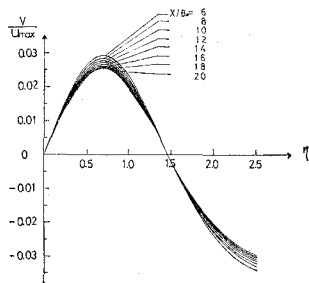


図-10 y 方向流速分布 (確立領域)

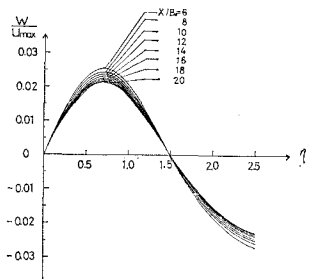


図-11 z 方向流速分布 (確立領域)

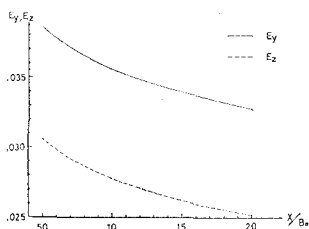


図-12 連行係数 (確立領域)

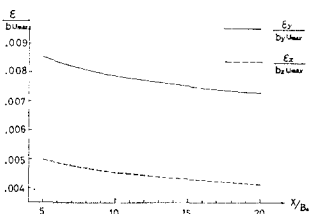


図-13 渦動粘性係数 (確立領域)

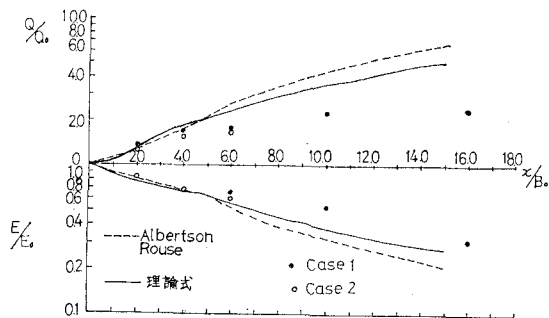


図-14 流量の増加割合と運動エネルギー減少割合

図-10, 図-11 は確立領域における v, w を式 (4.22), 式 (4.33) と式 (4.23), 式 (4.34) を用いて計算したものである。 v, w とも流量が増すにつれ最大値が小さくなり, 連行流速も小さくなるのがわかる。

次に連行係数について述べると形成領域において図-3 より $x=0$ cm において $b_y=b_z=2.5$ cm, $x=20$ cm において $b_y=2.9$ cm, $b_z=2.7$ cm とし b_y, b_z が直線的に変化することから式 (4.11) より $E_y=0.0281$, $E_z=0.0175$ となる。これから水平方向の方が鉛直方向よりも連行量が大きいいといえる。確立領域において, 図-3 の b_y, b_z を式 (4.33), (4.34) へ代入して求めたのが図-12 である。 E_y, E_z とも流量が増すにつれ減少し, 形成領域同様 $E_y > E_z$ となる。

次に渦動粘性係数について述べると図-13 は b_y, b_z の値を用いて式 (4.35), (4.36) を計算して求めたものである。 $\varepsilon_y, \varepsilon_z$ とも流量が増すにつれ減少し, ε_y の方が ε_z よりも大きいことがわかる, ε のオーダーからして, 表層水平噴流は自由噴流境界での ε に近いことがわかる。

流量増加割合とエネルギー減少割合について述べると図-14 の実線は b_y, b_z を用いて式 (4.14), 式 (4.37) と式 (4.15), 式 (4.38) を計算したものである。破線は Albertson⁶⁾ 等の解析結果である。 Froude 数が本研究では $Fr=0.250 \sim 0.414$, Albertson の研究においては $Fr=62.7 \sim 2210$ であり確立領域で異なるのはその影響と考えられる。また, 実験より求めた値は形成領域では一致するが, 確立領域においては理論よりも流量は増加せず, エネルギーは減少しない結果となった。

6. あとがき

本研究において, 表層水平噴流の諸値は半値幅ですべて求め, 実験値とよく一致することがわかった。

終わりに, 本研究に協力された東北大学工学部土木工学科助手松川正彦氏, 文部技官佐藤弘氏, 佐藤栄司氏に深く感謝いたします。

参考文献

- 1) 林 泰造・有田正光: 温度密度流の拡がりに関する予測モデルの研究, 第20回水講演文集, pp. 161~172, 1976.
- 2) Tamai, N.: Unified view of diffusion and dispersion in coastline waters, 学位論文, 1971.
- 3) Englund, F.: Hydraulics of surface buoyant jet, A.S.C.E., Vol. 102, HY 9, pp. 1315~1325, 1976.
- 4) 前出 3)。
- 5) Bradbury, L.J.S.: The structure of a self-preserving turbulent plane jet, Jour. Fluid Mech, Vol. 23, pp. 31~64, 1965.
- 6) Albertson, M.L., Y.B. Dai, R.A. Jensen and H. Rouse: Diffusion of submerged jets, Transaction, A.S.C.E., Vol. 115, pp. 639~697, 1950.