

プレテンションアンカーされたブイの波と直交する運動についての理論解析

荻原 国 宏*

はじめに

プレテンションアンカーされたブイとか、柱状構造物で、重心の位置が比較的高い位置にあるような場合には、波の進行方向と直交する運動が発生してくる¹⁾。

これは、一つの解釈の方法として直交方向の振動系と波の共振現象とする事も考えられるが、前者の場合には特に、振動系に方向性がないために、共振の場合には波の進行方向の運動がより卓越しやすいはずである。このことを考えると、単に共振現象として解釈するだけでは、具合が悪いことがわかる。そこでこの現象を2自由度の振動現象として、一つの解析モデルを作り、マシュー (Mathieu) 型の不安定現象として扱ってみた^{1)~3)}。

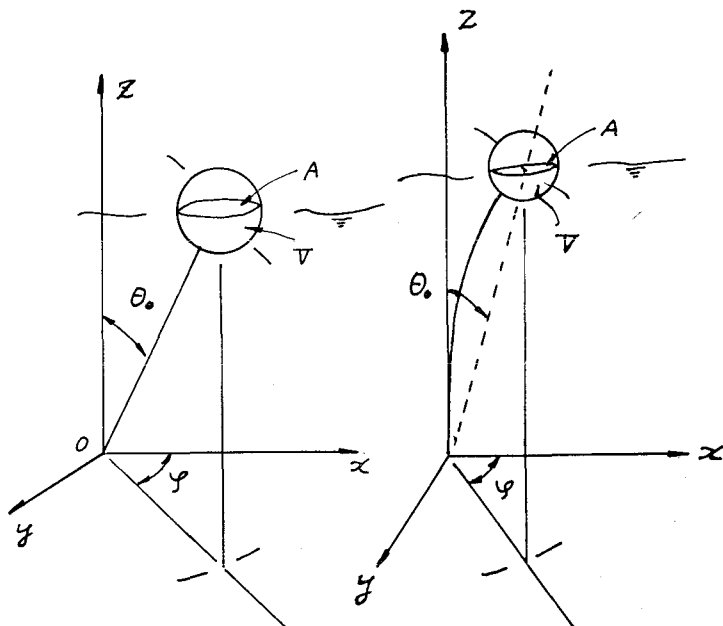
実験との関連性については、まだ着手していないが、この理論解析をもとに検討したいと考えている。したがって本論文は、この現象の理論解析のみを扱うことにした。

1. 浮体の運動方程式

浮体がプレテンションアンカーされている場合について考えることにする。したがって運動中にロープにたるみは生じないことを条件に解析することにする。また円柱構造物のように、そのたわみ剛性に方向性をもたない場合には、ここでの扱いを若干変更するだけで適用可能である。

さて、浮体の重心の運動中における位置を $(x_0, 0, z_0)$ とする。 x 軸の方向が波の進行方向である。

$$\left. \begin{aligned} x_0 &= l \sin \theta_0 \\ y_0 &= 0 \\ z_0 &= l \cos \theta_0 = h \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (1)$$



図—1

次に物体の、この平均位置からのずれを (x, y, z) で示し、これらの量は角変位 (θ, φ) によって生ずるとすれば、 l は不変であるので、

$$\left. \begin{aligned} x &= l \sin (\theta_0 + \theta) \cdot \cos \varphi - x_0 \\ y &= l \sin (\theta_0 + \theta) \sin \varphi - y_0 \\ z &= l \cos (\theta_0 + \theta) - z_0 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (2)$$

となる。 θ はロープと z 軸のなす角度であり、常に波の進行方向に向いているとは限らない。 φ は浮体を $x \sim y$ 面に射影した点の x 軸となす角度であり、通常の球座標の扱いである。

このとき θ, φ 方向の自由振動の方程式を作ると (3) 式となる。

$$\left. \begin{aligned} ml^2 \ddot{\theta} + R\dot{\theta} + k_\theta \theta &= 0 \\ m(l \sin \theta_0)^2 \ddot{\varphi} + R\dot{\varphi} + k_\varphi \varphi &= 0 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (3)$$

m の中には浮体の質量の他に、水中での運動のための付加質量を加える必要がある。 φ 方向の運動についても復元力 (バネ) を入れてあるが、一般には非常に小さい

と考えられる。

θ 方向の運動のバネ定数は、主として浮力の増減によるものである。次のごとくなる。

$$k \cdot \theta = w A z \cdot l \sin(\theta_0 + \theta) \\ = w A l^2 [\cos(\theta_0 + \theta) - \cos \theta_0] \sin(\theta_0 + \theta) \cdots (4)$$

微小振幅の運動を考えることにし、 $\theta \ll \theta_0$ とし線形化すれば、

$$k \theta = w A l^2 \sin^2 \theta_0 \cdot \theta \cdots (5)$$

となる。ここに A は浮体のきつ水面の断面積である。また、ロープのバネ定数を考えなければいけない場合には、それをも加えた形で

$$k = w A l^2 \sin^2 \theta_0 + k_0 \cdots (6)$$

とする。ここに k_0 はロープの伸びによるバネ定数である。

2. 浮体に作用する波力

波力の表示はモリソンの式を使うことにし、波の式も浮体の運動方程式を線形化したので、微小振幅の浅水面波の式を使うことにする。

波の式は

$$\left. \begin{aligned} \eta &= \frac{H}{2} \sin \sigma t \\ u &= \frac{\pi H}{T} \frac{\cosh k(h+z)}{\sinh kh} \sin \sigma t \\ v &= \frac{\pi H}{T} \frac{\sinh k(h+z)}{\sinh kh} \cos \sigma t, \quad \sigma = \frac{2\pi}{T} \end{aligned} \right\} \cdots (7)$$

モリソンの波力の式は

$$\left. \begin{aligned} F_x &= C_M \cdot \rho V \frac{\partial}{\partial t} (u - \dot{x}) + C_D \rho A \frac{(u - \dot{x})}{2} |u - \dot{x}| \\ F_z &= C_M \cdot \rho V \frac{\partial}{\partial t} (v - \dot{z}) + C_D \rho A \frac{(v - \dot{z})}{2} |v - \dot{z}| \end{aligned} \right\} \cdots (8)$$

である。 u, v に比して $(\dot{x}, \dot{z})$ は通常は小さいと考えられるので省略することにし、各式の第2項の u, v の2乗の項はフーリエ展開式を使うと⁵⁾

$$\begin{aligned} \sin \sigma t \cdot |\sin \sigma t| \\ = \frac{8}{\pi} \left[\frac{1}{3} \sin \sigma t - \frac{1}{15} \sin 3\sigma t + \frac{1}{105} \sin 5\sigma t - \cdots \right. \\ \left. - \frac{1}{(4m^2-1)(2m+3)} \sin(2m+1)\sigma t + \cdots \right] \end{aligned} \cdots (9)$$

と書け、 $\cos \sigma t |\cos \sigma t|$ の項は $\sigma t + \pi/2$ とすることにより

$$\begin{aligned} \cos \sigma t \cdot |\cos \sigma t| \\ = \frac{8}{\pi} \left[\frac{1}{3} \cos \sigma t + \frac{1}{15} \cos 3\sigma t - \frac{1}{105} \cos 5\sigma t + \cdots \right. \\ \left. + \frac{(-1)^m}{(4m^2-1)(2m+3)} \cos(2m+1)\sigma t + \cdots \right] \end{aligned} \cdots (10)$$

と書くことができる。

したがって、(7)~(10) の関係式を使うことによって波力を求める式が求まる。この F_x, F_z より振動方程式(3)の外力項を求める必要がある。これは図-2の関係より

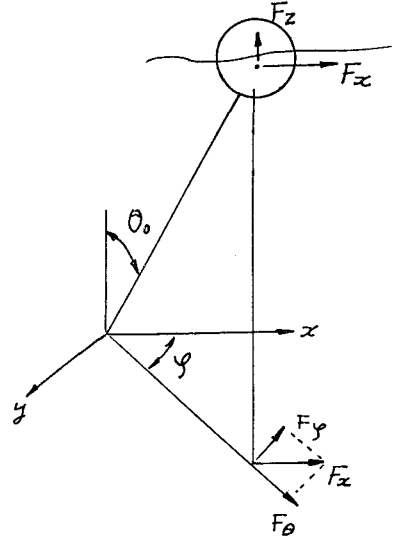


図-2

$$\left. \begin{aligned} M_\theta &= F_x \cos \varphi \cdot l \cos(\theta_0 + \theta) - F_z \cdot l \sin(\theta_0 + \theta) \\ M_\varphi &= -F_x \sin \varphi \cdot l \sin(\theta_0 + \theta) \end{aligned} \right\} \cdots (11)$$

が得られ、 φ, θ が微小として線形化すれば、

$$\left. \begin{aligned} \cos \varphi &\doteq 1.0, \quad \sin \varphi = \varphi, \\ \cos(\theta_0 + \theta) &\doteq \cos \theta_0, \quad \sin(\theta_0 + \theta) \doteq \sin \theta_0 \end{aligned} \right\} \cdots (12)$$

となり、結局

$$\left. \begin{aligned} M_\theta &= F_x l \cos \theta_0 - F_z l \sin \theta_0 \\ M_\varphi &= -F_x \cdot \varphi \cdot l \sin \theta_0 \end{aligned} \right\} \cdots (13)$$

の2式となる。これらと振動方程式を組合せて、解の有無および安定性について検討すればよい。

3. 運動方程式

現象を簡素化して解析モデルを作成するために、各所で線形化して来ているので、今回のモデルは、この主旨にしたがって2次以上の微小項はすべて省略することにした。

波力の式は結局(7)~(13)までの式を組合わせれば求まるが、ここで一応その形を整理しておこう。

水粒子速度は水面の所の値で代表させることにし、

F_x, F_z を級数展開で表わすことにすると、

$$\left. \begin{aligned} F_x &= \sum A_x(n) \cos n\sigma t + B_x(n) \sin n\sigma t \\ F_z &= \sum A_z(n) \cos n\sigma t + B_z(n) \sin n\sigma t \end{aligned} \right\} \cdots (14)$$

$$\left. \begin{aligned} A_x(1) &= \frac{H}{2} \sigma^2 \coth kh \cdot C_M \cdot \rho V, \\ A_x(n) &= 0, \quad n=2, 3, \dots \\ B_x(2m+1) &= \left(\frac{\pi H}{T} \right)^2 (\coth kh)^2 \cdot C_D \\ &\quad \cdot \rho A \cdot \frac{4}{\pi} \frac{1}{(1-4m^2)(2m+3)} \\ B_x(1) &= -\frac{H}{2} \sigma^2 \cdot C_M \rho V + w A \cdot \frac{H}{2}, \\ B_x(n) &= 0, \quad n=2, 3, \dots \\ A_z(2m+1) &= \left(\frac{\pi H}{T} \right)^2 C_D \rho A \\ &\quad \cdot \frac{4}{\pi} \frac{(-1)^m}{(1-4m^2)(2m+3)} \end{aligned} \right\} \dots\dots (15)$$

となる。したがって M_θ, M_φ も級数展開で表示すること
にすれば次のごとくなる。

$$\left. \begin{aligned} M_\theta &= [\sum A_\theta(n) \cos n\sigma t + B_\theta(n) \sin n\sigma t] \cdot l \\ M_\varphi &= [\sum A_\varphi(n) \cos n\sigma t + B_\varphi(n) \sin n\sigma t] \cdot (-l \cdot \varphi) \end{aligned} \right\} \dots\dots (16)$$

$$\left. \begin{aligned} A_\theta(n) &= A_x(n) \cdot \cos \theta_0 - A_z(n) \sin \theta_0 \\ B_\theta(n) &= B_x(n) \cdot \cos \theta_0 - B_z(n) \sin \theta_0 \\ A_\varphi(n) &= A_x(n) \sin \theta_0 \\ B_\varphi(n) &= B_x(n) \sin \theta_0 \end{aligned} \right\} \dots\dots (17)$$

したがってブイの運動方程式の基本形は (3) 式と (16)
式より

$$\left. \begin{aligned} ml^2 \ddot{\theta} + R\dot{\theta} + k_\theta \theta &= l \cdot \sum [A_\theta(n) \cos n\sigma t \\ &\quad + B_\theta(n) \sin n\sigma t] \\ m(l \sin \theta_0)^2 \ddot{\varphi} + R\dot{\varphi} + k_\varphi \varphi &= (-l\varphi) \sum [A_\varphi(n) \cos n\sigma t \\ &\quad + B_\varphi(n) \sin n\sigma t] \end{aligned} \right\} \dots\dots (18)$$

を得る。

4. 運動方程式の解

(18) 式の θ 方向の運動方程式は、一般的な強制振動
の方程式であり、解は

$$\left. \begin{aligned} R/ml^2 &= 2\gamma, \quad k_\theta/ml^2 = \omega_0^2, \\ h &= \gamma/\omega_0, \quad u = n\sigma/\omega_0 \\ F(n) &= u^2/\sqrt{(u^2-1)^2 + 4h^2u^2} \\ \tan^{-1}(n\sigma\tau) &= 2\gamma \cdot (n\sigma)/[\omega_0^2 - (n\sigma)^2] \end{aligned} \right\} \dots\dots (19)$$

とおけば

$$\begin{aligned} \theta &= \frac{1}{ml} \sum [A_\theta(n) \cos n\sigma(t-\tau) \\ &\quad + B_\theta(n) \sin n\sigma(t-\tau)] F(n) \end{aligned} \dots\dots (20)$$

を得る。

次に φ 方向の運動であるが、(18) 式を整理すると

$$\begin{aligned} m(l \sin \theta_0)^2 \ddot{\varphi} + R\dot{\varphi} + [k_\varphi + l \sum [A_\varphi(n) \cos n\sigma t \\ + B_\varphi(n) \sin n\sigma t]] \cdot \varphi = 0 \end{aligned} \dots\dots (21)$$

となり、いわゆるバネ定数の強さが周期的に変動する
Hill (ヒル) の方程式に相当している。

さて、この方程式をそのまま検討してもよいわけであ
るが、運動方程式を導くのに、2 次以上の微小項は落と
して来ていることを考えると、波の主要成分は (20)、
(21) 式の中の $n=1$ の項について、とりあえず検討す
れば、第一次の近次解としては十分であると考えられる。

したがって

$$\begin{aligned} m(l \sin \theta_0)^2 \ddot{\varphi} + R\dot{\varphi} + [k_\varphi + l(A_\varphi(1) \cos \sigma t \\ + B_\varphi(1) \sin \sigma t)] \varphi = 0 \end{aligned} \dots\dots (22)$$

となり $\sqrt{A_\varphi(1)^2 + B_\varphi(1)^2} = C_\varphi(1)$ とし、時間の初期点を
ずらすことにより、次のような減衰項のある Mathieu
(マシュエー) の振動方程式となる。さらに

$$\left. \begin{aligned} 2\beta &= R/m(l \sin \theta_0)^2, \quad k_\varphi/m(l \sin \theta_0)^2 = \delta \\ C_\varphi(1)l/m(l \sin \theta_0)^2 &= \varepsilon \end{aligned} \right\} \dots\dots (23)$$

とすると

$$\ddot{\varphi} + 2\beta\dot{\varphi} + (\delta + \varepsilon \cos \sigma t)\varphi = 0 \dots\dots (24)$$

の型の方程式となる。

ここで

$$\varphi = e^{-\beta/\sigma t} \cdot \psi(\bar{t}), \quad \sigma t = \bar{t} \dots\dots (25)$$

とおき (24) を書きなおすと

$$\left. \begin{aligned} \ddot{\psi} + (\delta + \varepsilon \cos \bar{t})\psi &= 0 \\ \delta &= (\delta - \beta^2)/\sigma^2, \quad \varepsilon = \varepsilon/\sigma^2 \end{aligned} \right\} \dots\dots (26)$$

のような、標準形の
マシュエーの振動方
程式となる。

この解につい
ては、すでに多くの文
献に示されているの
で、それらより一般
的な安定、不安定な
領域を引用して示す
と 図-3 のごとな
る。また $\varepsilon \neq 0$ 付近
の傾向は 図-4 の
ごとく判つて
いる。

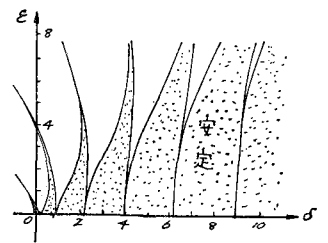


図-3

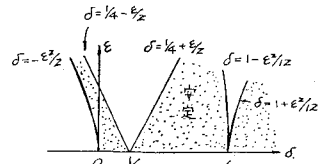


図-4

次に (26) 式の解
を次のような級数解を仮定するとき、それぞれの係数を
求める方程式が (28) 式のごとく求めることができる。

$$\varphi = A_0 + \sum_1 A_j \cos j\bar{t} + \sum_1 B_j \sin j\bar{t} \dots\dots (27)$$

$$\left\{ \begin{array}{c} \delta \quad \frac{\varepsilon}{2} \\ \varepsilon \quad \delta-1 \quad \frac{\varepsilon}{2} \\ \quad \frac{\varepsilon}{2} \quad \delta-2^2 \quad \frac{\varepsilon}{2} \\ \quad \quad \frac{\varepsilon}{2} \quad \delta-3^2 \quad \frac{\varepsilon}{2} \\ \quad \quad \quad \ddots \quad \ddots \\ \quad \quad \quad \frac{\varepsilon}{2} \quad \delta-n^2 \quad \frac{\varepsilon}{2} \\ \quad \quad \quad \quad \ddots \quad \ddots \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{c} A_0 \\ A_1 \\ A_2 \\ A_3 \\ \vdots \\ A_n \\ \vdots \end{array} \right\} = 0 \quad \dots(28)$$

$$\left\{ \begin{array}{c} \delta-1 \quad \frac{\varepsilon}{2} \\ \frac{\varepsilon}{2} \quad \delta-2^2 \quad \frac{\varepsilon}{2} \\ \quad \frac{\varepsilon}{2} \quad \delta-3^2 \quad \frac{\varepsilon}{2} \\ \quad \quad \ddots \quad \ddots \\ \quad \quad \frac{\varepsilon}{2} \quad \delta-n^2 \quad \frac{\varepsilon}{2} \\ \quad \quad \quad \ddots \quad \ddots \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{c} B_1 \\ B_2 \\ B_3 \\ \vdots \\ B_n \\ \vdots \end{array} \right\} = 0$$

解の存在のためにはそれぞれの係数項が0となる必要があり、その条件より、図-3、図-4のグラフが求まる。

そこで A_0, B_1 が、微小振幅として求めたとすれば、 A_1, B_2 以後の値は $A_0, B_1, \varepsilon, \delta$ の関係で決めることができる。すなわち

$$\left\{ \begin{array}{l} A_1 = -\delta A_0 / (\varepsilon/2) \\ A_2 = -[\varepsilon A_0 + (\delta-1)A_1] / (\varepsilon/2) \\ A_j = -A_{j-2} - A_{j-1}(\delta-j^2) / (\varepsilon/2), \quad j=3, 4, \dots \\ B_2 = -(\delta-1) / (\varepsilon/2) \cdot B_1 \\ B_j = -B_{j-2} - B_{j-1}(\delta-j^2) / (\varepsilon/2) \end{array} \right\} \quad \dots(29)$$

として与えられる。

5. 2, 3 の検討

- i) 不安定条件についてのパラメーターの整理
(23), (26) 式より

$$\left\{ \begin{array}{l} \delta = \frac{1}{\sigma^2} [\bar{\delta} - \beta^2] \\ = \frac{1}{\sigma^2} \cdot \frac{1}{m(l \sin \theta_0)^2} \left[k_\varphi - \frac{R^2}{4} \frac{1}{m(l \sin \theta_0)^2} \right] \\ \varepsilon = \frac{1}{\sigma^2} \left[\frac{C_\varphi(1)l}{m(l \sin \theta_0)^2} \right] \\ C_\varphi(1) = \sqrt{A_\varphi(1)^2 + B_\varphi(1)^2} \\ = \sin \theta_0 \cdot \sqrt{A_x^2(1) + B_x^2(1)} \\ A_x(1) = \frac{H}{2} \sigma^2 \coth kh \cdot C_D \cdot \rho V \end{array} \right\}$$

$$B_x(1) = \left(\frac{H}{2} \right)^2 \sigma^2 (\coth kh)^2 \cdot C_D \cdot \rho A \cdot \frac{4}{3\pi} \quad \dots(30)$$

となる。

プレテンションアンカーの場合には $k_\varphi \neq 0$ であり、したがって $\delta < 0$ となる。したがって ε のかなりの範囲にわたって不安定になってくることが判る (図-3)。

この種の現象について発表されている文献4)の榎木・中村・三木氏のデータを使わせていただき整理してみることにする。 ε 項については不明なところがあるので、解析が円柱になっていないので計算しにくいので、ここでは δ 項のみについて検討してみる。同氏の文献の図-5 (p. 35) のデータより横振動の発生しているケースについて δ の値を計算すると表-1のごとくなる。

表-1

模 型	f_n (水中)	β (水中)	f_w (波)	(δ)	δ
	$\bar{\delta} = 2\pi f_n$	$\beta = (\delta) \cdot 2\pi / f_n$	$\sigma = 2\pi f_w$		
8	1.075	0.298	0.913 0.94 1.112	0.051	1.28 1.044 1.434
6	1.351	0.228	0.885 0.666 0.436		2.003 2.662 9.33
3	1.914	0.181	0.625 0.620	0.055	9.295 9.446

注) (δ) は対数減衰率 (参考文献中)

これをみると $\delta=1.0, 2.0, 9.0$ の付近で発生していることを示しており、図-3の不安定性との相関が良いことが判る。

おわりに

この解析は、かなり重要と考えられる項を微小項として省略して行なっているため、まだ不十分な所が多い。今後実験と合わせて現象の解明をしたいと考えている。

参 考 文 献

- 坪井忠二: 振動論, 現代工学社。
- 戸田盛和: 振動論, 新物理学シリーズ 3, 培風館。
- 榎木義一: 非線型振動論, 応用物理学講座 8, 共立出版。
- 榎木 亨・中村孝幸・三木季樹: 波動場の円柱後流渦による振動応答の実態とその予測について, 第23回海岸工学講演会論文集, 1976。
- 本間 仁・萩原国宏・江森坦也: 球型浮子をもつ海洋構造物の運動についての研究, 第28回土木学会年次学術講演会講演概要集, 1973。