

波と流れが共存する場における流体力について (2)

堀川 清司*・北 沢 修**・中井 雅彦***・水 口 優*

1. はじめに

前報 (1976) において、進行波中を一定速度で曳航される円柱に働く流体力を測定することにより以下のことを明らかにした。(1) 進行波による波力算定のための半理論式である Morison 式において、波と流れの水粒子速度のベクトル和を用いることにより十分な精度で流体力を見積ることができる。(2) その際、抗力係数は、波の流れの強さの比を表わすパラメータにより流れのみによる抗力係数と波のみによる抗力係数の中間の値をとる。(3) 質量力係数は、波のみによるものとほぼ同じ値をとってよい。また、実験の範囲 ($H/L < 0.04$) では、波の理論として微小振幅波理論を用いて十分であった。

本報では、まず波と流れが共存する場の特性を理論的に検討し、ついで、環流装置つきの造波水路を用いて、波数・波高および水粒子速度について実験的に調べ、理論との比較検討を行う。最後に、片持ばり式の円柱波力計を用いて流体力を測定し、前報における流体力の算定方法の妥当性について検証する。

2. 波と流れが共存する場の理論的な考察

流れの中の進行波の性質については、多くの研究がなされている [Unna (1942), Longuet-Higgins (1960, 1961), Hunt (1955), 浜田・加藤 (1961, 1963), 浜田 (1971), Benjamin (1962), 佐藤 (1975)]。

ここでは、波と流れの共存する場を、鉛直方向にある分布をもった流れ $U(z)$ の中に、摂動としての保存波が存在するものとして扱う。

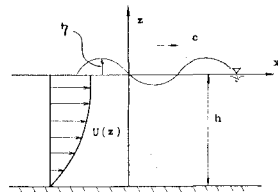


図-1 模式図

2次元非粘性とし、波の位相速度 c で動く座標系から見て定常化された現象は次の方程式系で記述される。座標系は、図-1 のようにとる。

運動方程式および境界

条件は次のように書ける。

$$\phi_z \phi_{zx} - \phi_x \phi_{xz} = -\frac{1}{\rho} p_x \dots\dots\dots (1)$$

$$-\phi_z \phi_{xx} + \phi_x \phi_{xz} = -g - \frac{1}{\rho} p_z \dots\dots\dots (2)$$

$$\phi = \text{const.} \quad (z = \eta) \dots\dots\dots (3)$$

$$\frac{Dp}{Dt} = 0 \quad (z = \eta) \dots\dots\dots (4)$$

$$\phi_x = 0 \quad (z = -h) \dots\dots\dots (5)$$

ここで、 ϕ は、連続の条件より導入される流れ関数で $u = -\phi_z, \quad w = \phi_x$

と定義される。記号の意味は次のとおりである。すなわち、 ρ : 流体の密度、 p : 圧力、 g : 重力の加速度、 u, w : 流速の x, z 成分。

(1)~(5) 式を、 ϕ のみを未知数とするように変形すると

$$\phi_x (\Delta \phi)_x - \phi_x (\Delta \phi)_z = 0 \dots\dots\dots (6)$$

$$\phi = \text{const.} \quad (z = \eta) \dots\dots\dots (7)$$

$$-\phi_x \phi_z (\phi_{zz} - \phi_{xx}) + \phi_{xz} (\phi_z^2 - \phi_x^2) - g \phi_x = 0 \quad (z = \eta) \dots\dots\dots (8)$$

$$\phi_x = 0 \quad (z = -h) \dots\dots\dots (9)$$

となる。ここで (6) 式は渦度 $\omega (= \Delta \phi, \Delta = \partial^2/\partial x^2 + \partial^2/\partial z^2)$ の保存方程式を定常化したものになっている。

次に (6)~(9) 式の基本方程式系に、次のような摂動を導入する。

$$\left. \begin{aligned} \phi &= \phi_0 + \alpha \phi_1 + \alpha^2 \phi_2 + \dots \\ \eta &= \alpha \eta_1 + \alpha^2 \eta_2 + \dots \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (10)$$

ここで、 ϕ_{0z} は、与えられた流速分布を表わすものと考え

$$\phi_{0z} = -U(z) + c \dots\dots\dots (11)$$

とおく。ただし、 c は、現象を定常化するための定数項である。本論文では、波力算定への応用ということと、高次近似解の不確定さとは複雑さを考えあわせて、第一近似解のみを扱う。(10) 式を、(6)~(9) 式に代入すると、 $\langle \alpha \rangle$ のオーダーの関係式は次のようになる。

$$\left. \begin{aligned} \phi_{0z} \Delta \phi_{1x} - \phi_{1x} \Delta \phi_{0z} &= 0 \\ \phi_1 + \eta_1 \phi_{0z} &= \text{const.} \quad (z = 0) \\ \phi_{1xz} \phi_{0z}^2 - \phi_{1x} \phi_{0z} \phi_{0zz} - g \phi_{1x} &= 0 \quad (z = 0) \\ \phi_{1x} &= 0 \quad (z = -h) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (12)$$

* 正 会 員 東京大学 工学部土木工学科
** 正 会 員 新日本製鉄 KK
*** 学生会員 東京大学大学院 工学系研究科

なお、北沢(1977)によれば、2次解の寄与は、波と流れが逆向きで、平均水面での流速の絶対値の勾配が正の時に、最も大きくなり得る。第一次近似解 ϕ_1 は、(12)式に(11)式を考慮し、保存波の波形を、波数 k 、振幅 a_1 を用いて

$$\eta_1 = a_1 e^{ikx} \dots\dots\dots (13)$$

とおくと、次式によって求まる。

$$\phi_1 = \varphi_1(z) e^{ikx} + f_1(z) \dots\dots\dots (14)$$

$$\varphi_{1zz} - (k^2 + f_0(z))\varphi_1 = 0 \dots\dots\dots (15)$$

ただし、 $a_1 = -\varphi_1/\phi_{0z}|_{z=0}$ 、 $f_0(z) = \Delta\phi_{0z}/\phi_{0z}$ である。(12)式中の境界条件を考慮して、(15)式に Laplace 変換を施すと、 φ_1 は、

$$\varphi_1(z) = A_1 \sinh k(z+h) + \int_{-h}^z \frac{f_0(t) \sinh k(z-t)}{k} \varphi_1(t) dt \dots\dots\dots (16)$$

という第2種の Volterra 型の積分方程式の解となる。その解は、次のようになる。

$$\begin{aligned} \varphi_1(z) &= A_1 \Phi_{1s}(z) \\ &= A_1 \left\{ \sinh k(z+h) \right. \\ &\quad \left. + \sum_{n=1}^{\infty} \int_{-h}^z K S_n(z, t) \sinh k(t+h) dt \right\} \dots\dots\dots (17) \end{aligned}$$

ここで、

$$\begin{aligned} K S_n(z, t) &= \int_t^z K S(z, r) K S_{n-1}(r, t) dr \\ K S_1(z, t) &= K S(z, t) = \frac{f_0(t) \sinh k(z-t)}{k} \end{aligned}$$

定数 A_1 は、実測波高 $H (=2a_1)$ より次式で与えられる。

$$A_1 = \frac{a_1(c-U(0))}{\Phi_{1s}(0)} \dots\dots\dots (18)$$

最後に、(12)式中で残った第3式は、流れ $U(z)$ が存在する場合の分散関係式を与える。

$$\left(\frac{H'}{H}\right)^2 = \frac{\frac{1}{2} \left(1 + \frac{2kh}{\sinh 2kh}\right) c}{U(0) + \frac{1}{g} \left\{ (\Phi_{1s}^2(0) - \Phi_{1c}^2(0)) \int_{-h}^0 U dz + 2c' \int_{-h}^0 \Phi_{1c} dz + \frac{2}{k'} \int_{-h}^0 \Phi_{1s} \Phi_{1c} U dz \right\}} \dots\dots\dots (23)$$

ここでは、摩擦によるエネルギー減衰や radiation stress の効果を無視している。

3. 波と流れが共存する場の実験的考察

実験に用いた水路の概要を図-2に示す。水路幅は、20 cm、測定部の水深 h は、全実験ケースを通して 18 cm である。測定には、計測技研製の容量式波高計と日

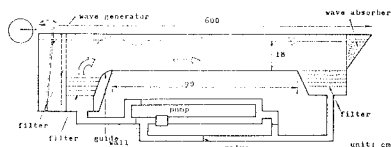


図-2 環流装置つき造波水路概略図

$$\begin{aligned} c &= U(0) - \frac{U_z(0)}{2k} \frac{\Phi_{1s}(0)}{\Phi_{1c}(0)} \\ &\quad + \left\{ \left(\frac{U_z(0) \Phi_{1s}(0)}{2k \Phi_{1c}(0)} \right)^2 + \frac{g}{k} \frac{\Phi_{1s}(0)}{\Phi_{1c}(0)} \right\}^{1/2} \dots\dots\dots (19) \end{aligned}$$

ここで、 $\Phi_{1c}(z) = \{d/dz \cdot (\Phi_{1s}(z))\}/k$ である。

一次のオーダーでの流れの場合が確定するためには、(14)式中の $f_1(z)$ が決まらなければならない。ここでは、波(摂動)が存在しても、 x 方向に一樣な流れは与えられた一般流 $U(z)$ のみであるという仮定を採用し、 $f_1(z) = 0$ とする。

以上をまとめると、水粒子速度場は次式で与えられる。

$$\begin{aligned} u &= U(z) + u' \\ w &= w' \end{aligned} \dots\dots\dots (20)$$

ただし、 $u' = k' A_1 \Phi_{1c}(z) e^{ik'(x-ct)}$ 、 $w' = ik' A_1 \Phi_{1s}(z) e^{ik'(x-ct)}$ である。ここで、流れが存在する場合の波速 c' および波数 k' は、(19)式より求まる。すなわち、(19)式は、 $c' = \sigma/k'$ 、 $\sigma = 2\pi/T$ (T は波の周期で不変)を用いて、 h 、 T 、 $U(z)$ より、 k' すなわち c' を与える。一方、流れが存在しない場合の分散関係式は、周知のように次式で与えられる。

$$\sigma^2 = gk \tanh kh \dots\dots\dots (21)$$

以下、 σ のついた諸量は、流れがある場合を意味する。

以上の扱いでは、(18)式中の振幅 a_1 として波と流れの共存する場合の実測波高を用いることになる。実際問題としては、波が流れのない場から流れのある場に進入する時の波高の変化は、波力の算定にとって重要である。そこで一次元的なエネルギー保存式

$$\begin{aligned} E_f &= \int_{-h}^0 \bar{p} u dz + \frac{\rho}{2} \int_{-h}^0 (u^2 + w^2) dz + \frac{1}{2} \rho g \eta^2 U(0) \\ &= \text{const.} \dots\dots\dots (22) \end{aligned}$$

に、上記の結果を代入すると次式を得る。

本科学工業製の熱膜流速計を用いた。図-3に、熱膜流速計のキャリブレーションの1例を示す。注意すべきことは、使用したプローブが方向性を持っていることである。

まず、熱膜流速計の使用テストをかねて、波のみによる水粒子速度の測定例を

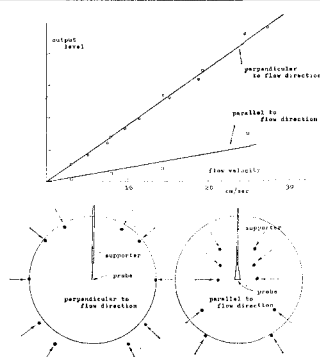
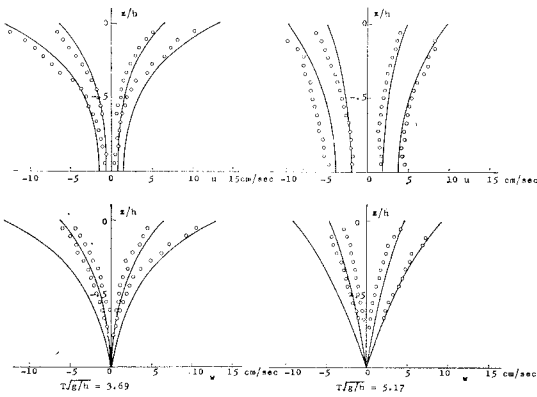


図-3 熱膜流速計のキャリブレーションおよびプローブの方向性



図—4 波の水粒子速度の最大値

図—4 に示す。ただし、熱膜流速計が一方方向型のため、水平および鉛直水粒子速度の最大値の鉛直分布のみを測定した。図中の計算値は微小振幅波理論によるものである。実測値と計算値とは、かなり良く一致しているが、次のような差異も認められる。(1) 表面近くでは、波の谷での水平流速が、計算値および波の峰での値よりも大きい。(2) 鉛直速度が負の場合に、正の時よりも小さい。前者は、水路全体に生じる循環がその一因であり、後者は、図—3 に示した熱膜プローブの方向性によるものと考えられる。

ついで、流れがある場を進行する波の特性の測定結果を示す。流れとしては、ほぼ一様な分布と台形分布（底と表面の流速の比 $\gamma=0.25$ ）の2種類について、実験を行った。この場合の流れの場は、簡単に次式で表わせる。

$$\left. \begin{aligned} u &= \frac{H'}{2} k'(c' - U(0)) \frac{\cosh k'(z+h)}{\sinh k'h} \cos k'(x - c't) \\ &+ U(0) \left\{ (1-\gamma) \frac{z}{h} + 1 \right\} \\ w &= \frac{H'}{2} k'(c' - U(0)) \frac{\sinh k'(z+h)}{\sinh k'h} \sin k'(x - c't) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (24)$$

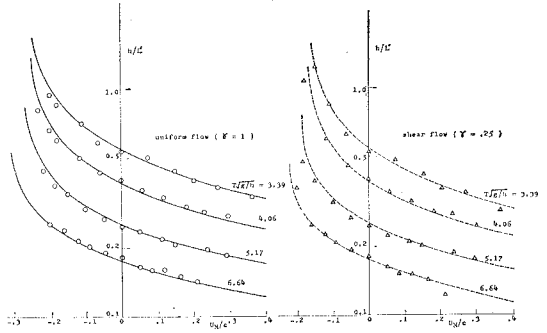
c' , k' は、簡単化された次の分散関係式より求まる。

$$\left. \begin{aligned} c' &= U(0) - \frac{1-\gamma}{2} U(0) \frac{\tanh k'h}{k'h} \\ &+ \sqrt{\left\{ \frac{1-\gamma}{2} U(0) \frac{\tanh k'h}{k'h} \right\}^2 + \frac{g}{k'}} \tanh k'h \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (25)$$

波高変化の式 (23) も同様に簡単となるが、実際の計算は一般的な流速分布に対するプログラムを用いて行ったので略する。なお $\gamma=1$ が一様な流れの場合に対応している。

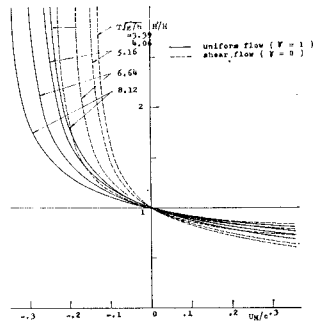
図—5 が、2種類の分布形に対する波長 $L' (=2\pi/k')$ の変化の実測例であるが、計算値と非常によく一致している。図中の U_M は平均流速で、次のように表わせる。

$$U_M = U(0) \frac{1+\gamma}{2} \dots\dots\dots (26)$$



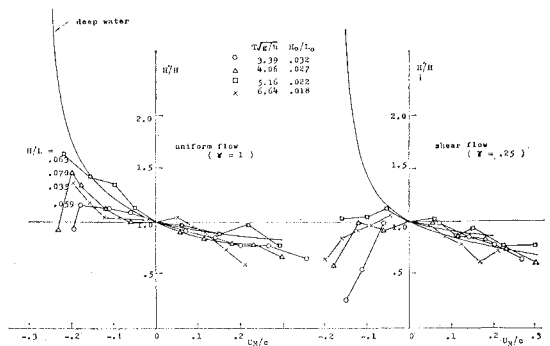
図—5 せん断流による波長変化

図—6, 7 は、同じく波高変化の計算例および実測例である。流れが順流の場合の波高減少については、計算値とよく一致しているが、流れが逆流の場合には、計算値から予測されるような急激な波高増大は見られない。特に、台形分布の場合には、分布流を作り出すために用いた工作物が短波長時に大きな減衰効果をもたらすために、波高が増大するという傾向は、ほとんど見られなかった。また 図—7 中の逆流時における急激な波高減少は、波が砕けるという現象に対応している。これは、波形勾配が大きくなりすぎて砕波するものと考えられ、ほぼ対称な波形で、波峰部分で水面が乱れるという形で砕ける。一般に、相対速度 U_M/c が負で絶対値が大きくなると、波のエネルギー伝播速度が小さくなり〔北沢 (1977)〕、横振動が生じて波は不安定になり、図—7 中に示すような比較的小さな波形勾配でも、波形を維持し切れなくなった。

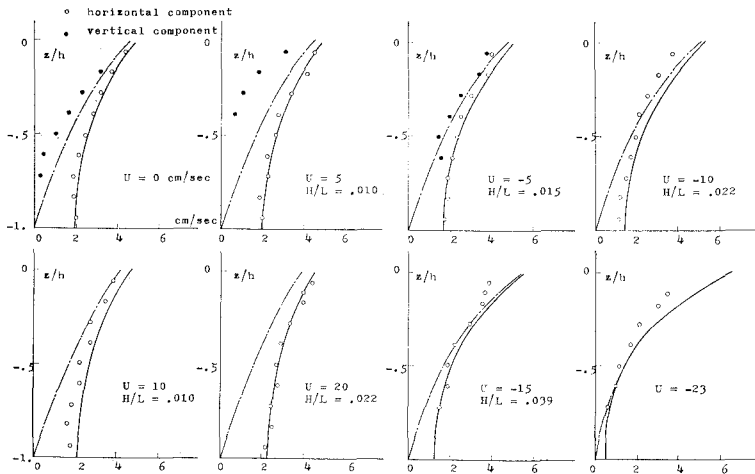


図—6 せん断流による波高変化の計算例

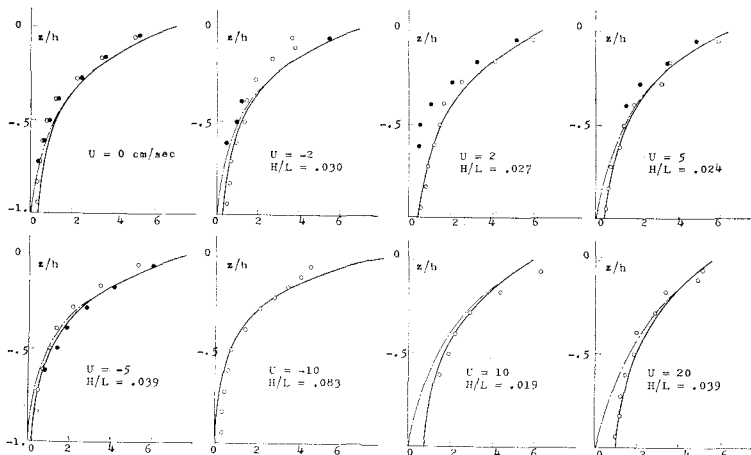
最後に、熱膜流速計による水粒子速度の測定結果を図—8、



図—7 せん断流による波高変化の実測例



図—8 一様流中の波による水粒子速度の最大値 ($T\sqrt{g/h}=5.17$)



図—9 一様流中の波による水粒子速度の最大値 ($T\sqrt{g/h}=3.39$)

9 に示す。ただし、波による変動分だけをとりだして (24) 式による計算値と比較してある。水路水平床部が短かいため消波装置に改良を加えた結果、流れが無い時の反射率は、 $T\sqrt{g/h}=3.69, 5.17$ の各々に對し、Healy の方法で測って 4 および 7% であった。また、整流装置などの都合で主流に変動があり、 $|U|=5$ cm/sec で完全な乱流であり、low pass filter を用いた。なお、台形分布流を用いた実験は、装置の都合で省略した。水平水粒子速度は、同位置で測定した波形の峰および谷の値の平均値、鉛直速度は、プローブを流れと平行において、波形のゼロアップクロス点での値を用いた。結果は、波形勾配による差はほとんどなく、波力に寄与する水平成分は、計算値とよく一致している。鉛直成分も、計算値よりやや小さめではあるが一致の程度は悪くない。

以上、結論としては、波が流れのない場から流れのある場に進入 (抽象的な意味を含めて) する場合の波数 (波長)、波高、水粒子速度場の変化は、流れが台形分布

の範囲内では、微小振幅波のオーダーの波と流れが共存する場の理論で十分に表わされる。ただし、波高は、逆流時において計算上予測される波形勾配がある限度 (本実験では、0.04~0.08) を越すと砕波する。

4. 波と流れが共存する場の流体力について

以下、流れが一様な場合についてのみ扱う。上記の結果より波と流れが共存する場の流体力学的特性は、(24), (25) 式によって、十分な精度で表わされることから、その場におかれた物体 (円柱) に作用する全流体力 F_T は、次のように表わせる。

$$F_T = F_D + F_M$$

$$= \frac{\rho D C_D}{2} \times \int_{-h}^{\eta} (u' + U) |u' + U| dz$$

$$+ \frac{\rho \pi D^2}{4} C_M \times \int_{-h}^{\eta} \frac{d}{dt} (u' + U) dz$$

$$\dots\dots\dots (27)$$

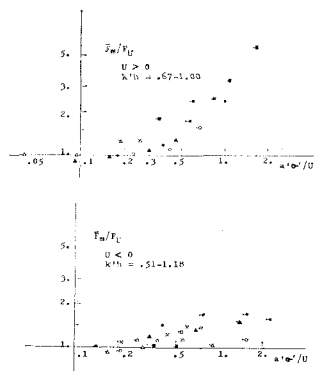
$$u' = a' \sigma' \frac{\cosh k'(h+z)}{\sinh k'h} \cos \sigma t,$$

$$\eta = a' \cos \sigma t, \quad \sigma' = \sigma - Uk',$$

$$\sigma'^2 = gk' \tanh k'h, \quad \sigma = \frac{2\pi}{T}, \quad a' = \frac{H'}{2}$$

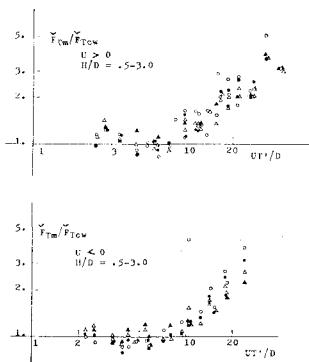
ここで、 D は円柱の径であり、 C_D, C_M は、それぞれ抗力係数、質量力係数である。(27) 式を、前報中の (2) 式と比較してみると、進行波中を一定速度で曳航される円柱に作用する力と、実際に波と流れ (一様な) が共存する場における力との差は、分散関係式におけるドップラー効果の表われ方のみであることがわかる。すなわち、前報における議論は、流れが一様でその乱れが流体力に関与しない範囲では、そのまま、現実的となる。ただ 1 つの非現実的な点は、曳航速度と波の位相速度との関係に、波の存在限界という条件を考慮しなければならないということである。

参考までに、図—10, 11 に、実測された流体力の平均および変動振幅の値の例を示す。当然のことながら、多少のバラつきはあるものの前報の結果と同じ傾向を示し、上記の考え方を確認している。図中の記号の意味は



図—10 流体力の平均値
($D=1$ cm)

図—11 流体力の変動振幅
($D=1$ cm)



前報を参照されたい。なお今回の実験では、位相 $\sigma t = \pi/2$ および $3\pi/2$ での流体力の値を用いて、波と流れが共存する場における質量力係数を見積った結果、その値は $K-C\sigma$ 数 (UT/D) が大きくなるにつれて直線的に減少するというのが、前報に付け加えるべき特徴である [中井 (1977)]。

5. おわりに

波と流れの共存する場の流体力を見積るための考え方として、(1) Morison 公式に、水粒子速度のベクトル和を採用し、抗力係数としては、流れのみによる値、質量力係数として波のみによるものをとれば十分であり、(2) その時の水粒子速度は、微小振幅波のオーダーでの波と流れが共存する場を表わす理論である (19), (20) および (23) 式で表わされるものを用いてよいと結論される。

今後に残された課題としては、流体運動の場としては、

(1) 波の有限振幅性、(2) エネルギー干渉における radiation stress、底面摩擦、乱れおよび 3 次元性の影響、(3) 波の存在限界もしくは限界波のスケールなどに問題があり、流体力については、便宜上用いられている Morison 式の物理的な意味の検討による抗力係数、質量力係数の定量的な評価の確立という問題がある。

本研究は、本州四国連絡橋公団よりの委託により行われたものであることを付記し、関係各位に謝意を表する。

参考文献

- 1) 北沢 修：せん断流中の進行波について，東京大学工学系研究科土木工学専門課程修士論文，p. 99, 1977.
- 2) 佐藤道郎：不等流を遡る波の波高変化に関する基礎的研究，土木学会論文報告集，242 号，pp. 15-29, 1975.
- 3) 中井雅彦：波と流れが共存する場における波力について，東京大学工学部土木工学科卒業論文，p. 103, 1977.
- 4) 浜田徳一：せん断流中の表面波の性質について，第 18 回海岸工学論文集，pp. 111-114, 1971.
- 5) 浜田徳一・加藤 始：流れをさかのぼる波についての一計算，第 8 回海岸工学講演集，pp. 25-29, 1961.
- 6) 浜田徳一・加藤 始：流水の中の有限振幅波の計算，第 10 回海岸工学講演集，pp. 1-6, 1963.
- 7) 堀川清司・水口 優・北沢 修・柳本泰伴：波と流れが共存する場における流体力について (1)，第 23 回海岸工学論文集，pp. 39-44, 1976.
- 8) Benjamin, T. B.: The solitary wave on a stream with an arbitrary distribution of vorticity, Jour. Fluid Mech., Vol. 12, pp. 97-116, 1962.
- 9) Hunt, N. J.: Gravity waves in flowing water, Proc. Roy. Soc., A231, pp. 496-504, 1955.
- 10) Longuet-Higgins, M. S. and R. W. Stewart: Changes in the form of short gravity waves on long waves and tidal currents, Jour. Fluid Mech., Vol. 8, pp. 565-583, 1960.
- 11) Longuet-Higgins, M. S. and R. W. Stewart: The changes in amplitude of short gravity waves on steady non-uniform currents, Jour. Fluid Mech., Vol. 10, pp. 529-549, 1961.
- 12) Unna, P. J.: Waves and tidal streams, Nature, Vol. 149, pp. 219-220, 1942.