

波により水底斜面上に作用する摩擦力について

岩 垣 雄 一*・ 義 光**

1. 緒 言

海浜の変形は海岸工学上重要な問題の一つであり、従来より多くの人々によって研究が行われてきている。これらの研究は海浜変形の予測法を確立することを最終目標として行われていると考えられ、そのためには漂砂量の定式化や漂砂量分布の解明が必須であり、精度の高い予測を行うためには、波浪条件に対応した漂砂の移動機構にもとづく正確な漂砂量の評価が必要となる。

漂砂の移動機構を解明するには、波と流れの場における水理量の場合的变化を知る必要があり、変動の絶対量を求めるには、それらの時間的変化をも知らねばならない。

この観点から、本研究では、その一過程として、砂の移動に最も関係があると考えられる波による水底斜面上の摩擦力について理論的および実験的に検討した。

海底摩擦の機構を根本的に解明するためには、波動運動にともなう海底付近の流れの特性を明確に知る必要があり、したがって波動運動にともなって発達する境界層の解析を行わなければならない。波により水底面上に作用する摩擦力に関する研究は、波高減衰との関連において従来より数多く研究されており、層流境界層については、すでに水深が一樣の場合のみ理論的、実験的に解明されている^{1),2)}。また乱流境界層の場合は理論的にも実験的にも解明に困難な点があり、まだ研究の途上にあると言えよう。さらに、層流境界層に関する諸理論は、主流の波形が対称である場合について解析されたものであり、波が伝播するにつれて海底の影響を受けて波形が非対称になってくることを考えれば、海浜に作用する底面摩擦力を評価するのに、上述の諸成果を用いるには限界があるように思われる。

ところで、非対称な波形を有する波を表現するのに、Dean が提唱した流れ関数表示による波動理論がある³⁾。岩垣・酒井は流れ関数表示による波の理論を用いると、斜面上を進行する周期波の碎波点における水平方向水粒子速度の実験値を、他の波動理論よりもよく説明しうる

ことを示した⁴⁾。

本研究では、境界層外縁の水粒子速度として Dean の流れ関数表示による波動理論から得られる関係を用いて、層流境界層方程式の摂動解を誘導し、波により水底斜面上に作用する摩擦力について検討する。なお、底面摩擦力測定装置を製作して、一樣水深および一樣勾配斜面について実験を行ったので、理論値との比較を示すこととする。

2. 波動の層流境界層理論にもとづく底面摩擦力に関する理論式

(1) Dean の流れ関数理論による波の水粒子速度

流れ関数理論による波の水粒子速度は、底面に沿う方向の成分を U とすれば、

$$U = - \sum_{m=4,6,8,\dots}^{N-1} \frac{(m-2)\pi}{L} \cosh(m-2)\pi \frac{h+z}{L} \times \left[X_m \cos \frac{(m-2)}{2}(kx - \sigma t) + X_{m+1} \sin \frac{(m-2)}{2}(kx - \sigma t) \right] \dots \dots (1)$$

となる。ここに、 L : 波長、 h : 水深、 z : 静水面を原点とする鉛直上向き座標、 X_m および X_{m+1} は水面の変位量を与えることにより求まる定数である。

(2) 斜面上に発生する層流境界層

勾配 i_0 を考慮した場合の Navier-Stokes 方程式および連続式は境界層用の座標系 (x, z) を用いて表わすと、

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + w \frac{\partial u}{\partial z} = - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} - g i_0 + \nu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right) \dots \dots (2)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \dots \dots (3)$$

となる。

ここに、 u , w はそれぞれ x , z 方向の水粒子速度、 ρ は密度、 p は圧力、 g は重力加速度、 ν は動粘性係数である。また、主流に関する運動方程式は水粒子速度の z 方向成分を無視すると、

$$\frac{\partial U_0}{\partial t} + U_0 \frac{\partial U_0}{\partial x} = - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} - g i_0 \dots \dots (4)$$

* 正会員 工博 京都大学教授 工学部土木工学教室

** 学生会員 工修 京都大学大学院 工学研究科博士課程

となる。

次に諸量を無次元化するため、幾何学的代表変数として波長 $L=2\pi/k$ 、運動学的代表変数として $U_M=H/T$ を用い、また波速 c を用いた便宜的な Reynolds 数 $Re=2\pi c/(k\nu)$ を導入し、

$$\left. \begin{aligned} x' &= kx/2\pi, \quad z' = \sqrt{Re} \cdot kz/2\pi, \\ t' &= \sigma t/2\pi, \\ u' &= u/U_M, \quad w' = \sqrt{Re} \cdot w/U_M, \\ p' &= p/\rho c U_M, \quad g' = 2\pi \cdot g/\sigma c \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (5)$$

のように表わす。以後、簡単のために無次元量のダッシュを取り除いて表わすことにする。したがって、式(2)、(3)および(4)を無次元表示すると次のようになる。

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{U_M}{c} \left(u \frac{\partial u}{\partial x} + w \frac{\partial u}{\partial z} \right) \\ = -\frac{\partial p}{\partial x} - \left(\frac{U_M}{c} \right)^{-1} g_{i0} + \frac{1}{Re} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + Re \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right) \end{aligned} \dots\dots\dots (6)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \dots\dots\dots (7)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial U_0^*}{\partial t} + \left(\frac{U_M}{c} \right) U_0^* \frac{\partial U_0^*}{\partial x} \\ = -\frac{\partial p}{\partial x} + \left(\frac{U_M}{c} \right)^{-1} g_{i0} \end{aligned} \dots\dots\dots (8)$$

ここに、 U_0^* は主流の水粒子速度を無次元化したものを表わす。境界層内では Reynolds 数は $Re \gg 1$ であること、式(8)で表わされる圧力と境界層内の圧力とは等しいことにより、最終的に与えられる境界層方程式は

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{U_M}{c} \left(u \frac{\partial u}{\partial x} + w \frac{\partial u}{\partial z} \right) \\ = \frac{\partial U_0^*}{\partial t} + \left(\frac{U_M}{c} \right) U_0^* \frac{\partial U_0^*}{\partial x} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \end{aligned} \dots\dots\dots (9)$$

となり、無次元水粒子速度に関する非線型偏微分方程式が、パラメータ U_M/c を含んだ形で得られる。

ここに、 U_M/c は波形勾配 H/L を表わし、一般に微小量と仮定できるので、

$$\epsilon = U_M/c = H/L \ll 1 \dots\dots\dots (10)$$

とおき、これを用いて、無次元水粒子速度を

$$\left. \begin{aligned} u &= u_0 + \epsilon u_1 + \epsilon^2 u_2 + \dots\dots\dots \\ w &= w_0 + \epsilon w_1 + \epsilon^2 w_2 + \dots\dots\dots \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (11)$$

と摂動級数展開する。

次に、境界層外縁の水粒子速度として、式(1)で $z=-h$ において得られる値を用いることとし、これを U_M で割って無次元化したものは、 $n=(m-2)$ とおくと、

$$\begin{aligned} U_0^* = -\frac{T}{H} \sum_{n=2,4,6,\dots}^{N-3} \frac{n\pi}{L} [X_{n+2} \cos n\pi(x-t) \\ + X_{n+3} \sin n\pi(x-t)] \end{aligned} \dots\dots\dots (12)$$

となる。さらに式(12)を変形すると、

$$U_0^* = \sum_n U_{0n}(x) e^{in\pi t} \dots\dots\dots (13)$$

ここに、

$$\left. \begin{aligned} U_{0n}(x) &= -(a_n + ib_n) e^{-in\pi x} \\ a_n &= \frac{T}{H} \frac{n\pi}{L} \cdot X_{n+2}, \quad b_n = \frac{T}{H} \frac{n\pi}{L} \cdot X_{n+3} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (14)$$

となり、上式は実数部のみが物理的意味を有する。

式(7)と(9)に式(11)から式(14)までを代入し、 ϵ のべきで整理すれば、 ϵ^0 に関する方程式として、

$$\frac{\partial u_0}{\partial t} - \frac{\partial^2 u_0}{\partial z^2} = \frac{\partial U_0^*}{\partial t}, \quad \frac{\partial u_0}{\partial x} + \frac{\partial w_0}{\partial z} = 0 \dots\dots (15)$$

が得られる。境界条件、

$$\left. \begin{aligned} z=0 \quad \text{で} \quad u_0 = w_0 = 0 \\ z \rightarrow \infty \quad \text{で} \quad u_0 \rightarrow U_0^*, \quad w_0 \rightarrow 0 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (16)$$

を満足する式(15)の解、すなわち第1近似解は、Schlichting の解法⁵⁾に準じて、次のように求めることができる。

$$\left. \begin{aligned} u_{1st} = u_0 = \sum_n U_{0n}(x) \zeta_0' e^{in\pi t} \\ w_{1st} = w_0 = - \sum_n \frac{\partial U_{0n}}{\partial x} \zeta_0 e^{in\pi t} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (17)$$

ここに、

$$\left. \begin{aligned} \zeta_0' &= 1 - e^{-(1+i)\sqrt{A_1}\eta}, \\ \zeta_0 &= 2\eta - \frac{1}{\sqrt{A_1}} \frac{1-i}{\sqrt{2}} [1 - e^{-(1+i)\sqrt{A_1}\eta}] \\ \eta &= z/\sqrt{2}, \\ A_1 &= (\sum_n n\pi U_{0n} e^{in\pi t}) / (\sum_n U_{0n} e^{in\pi t}) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (18)$$

したがって、実際の水粒子速度は式(17)の実数部で与えられる。

ϵ^1 に関する方程式は、

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial u_1}{\partial t} - \frac{\partial^2 u_1}{\partial z^2} &= U_0^* \frac{\partial U_0^*}{\partial x} - u_0 \frac{\partial u_0}{\partial x} + w_0 \frac{\partial u_0}{\partial z}, \\ \frac{\partial u_1}{\partial x} + \frac{\partial w_1}{\partial z} &= 0 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (19)$$

となり、境界条件、

$$\left. \begin{aligned} z=0 \quad \text{で} \quad u_1 = w_1 = 0 \\ z \rightarrow \infty \quad \text{で} \quad u_1 \rightarrow 0, \quad w_1 \rightarrow 0 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (20)$$

を満足する式(19)の解は、式(19)の第1式の右辺が複素数の積を含む点を考慮したうえで、第1近似解と同様、同次解と特解の和として求めることができるが、ここでは第1近似解を用いて検討するので、以下の式の誘導を省略する。

(3) 底面摩擦応力に関する理論式

前節までに展開してきた無次元量に関する諸量を、以下すべて次元量に変換して理論の展開を行うこととする。したがって、境界層内の底面に平行な水粒子速度は

次のように表わされる。

$$u_0 = Re[(H/T)U_0^* \times (1 - e^{-(1+i)\sqrt{A_1}(\sqrt{Re}/\sqrt{2})(z/L)})] \dots\dots\dots(21)$$

底面に働く摩擦応力 τ_0 は、 $\tau_0 = \mu(\partial u / \partial z)_{z=0}$ の関係から求められるので、いま、第1近似解の範囲で考えると τ_0 および最大摩擦応力 $\tau_{0\max}$ は次のように表わされる。

$$\begin{aligned} \tau_0 &= \mu \frac{\sqrt{A_1} \sqrt{Re}}{\sqrt{2} L} \sum_n \{-p_n \cos \theta_n + q_n \sin \theta_n\} \\ &= \mu \frac{\sqrt{A_1} \sqrt{Re}}{\sqrt{2} L} \sum_n \sqrt{p_n^2 + q_n^2} \sin(\theta_n - \varepsilon_n) \\ &= \frac{\mu \sqrt{A_1} \sqrt{Re}}{\sqrt{2} L^2} \sum (n\pi) \\ &\quad \times \sqrt{X_{n+2}^2 + X_{n+3}^2} \sin(\theta_n - \varepsilon_n) \dots\dots\dots(22) \end{aligned}$$

$$\frac{\tau_{0\max}}{\rho g H} = \frac{1}{g H L} \sqrt{\frac{A_1 \nu}{2T}} \sum (n\pi) \sqrt{X_{n+2}^2 + X_{n+3}^2} \dots\dots\dots(23)$$

ここに、

$$p_n = \frac{n\pi}{L} X_{n+2}, \quad q_n = \frac{n\pi}{L} X_{n+3},$$

$$\theta_n = \frac{n}{2}(kx - \sigma t), \quad \varepsilon_n = \frac{p_n}{q_n}$$

である。一方、微小振幅波理論による線型理論によれば、 τ_0 および $\tau_{0\max}$ は次のように与えられる。

$$\tau_0 = \frac{\sqrt{2} \mu \beta k c H}{2 \sinh kh} \sin\left(kx - \sigma t - \frac{\pi}{4}\right) \dots\dots\dots(24)$$

$$\frac{\tau_{0\max}}{\rho g H} = \frac{\sqrt{2} \nu}{g \sinh kh} \left(\frac{\pi}{T}\right)^{3/2} \dots\dots\dots(25)$$

ここに、 $\beta = \sqrt{\sigma/2\nu}$ 、 h ：水深である。

さらに、後述する底面摩擦力測定装置の shear plate に作用する圧力勾配は、線型理論において行われると同様な方法で計算し、補正係数を求めた。すなわち、摩擦力と圧力勾配による力の単位面積当りの合計 F は

$$\begin{aligned} F &= \frac{\mu \sqrt{A_1} \sqrt{Re}}{\sqrt{2} L} \sum_n \sqrt{p_n^2 + q_n^2} \sin(\theta_n - \varepsilon_n) \\ &\quad + \rho d \sum n \sqrt{p_n^2 + q_n^2} \sin(\theta_n + \varepsilon_n) \dots\dots\dots(26) \end{aligned}$$

となる。ここに、 d は shear plate の厚さである。したがって、実際に測定される単位面積当りの底面に平行に作用する力 F の最大値 $F_{\max}$ と求めようとする摩擦応力の最大値 $\tau_{0\max}$ との関係は次のようになる。ただし、 ε_n は $\pi/2$ に比して非常に小さいので、 $\sin(\theta_n - \varepsilon_n) \approx \sin(\theta_n + \varepsilon_n) = 1$ のときに F は最大となるものとした。

$$\left. \begin{aligned} \tau_{0\max} &= \frac{1}{1+\lambda} F_{\max} \\ \lambda &= \frac{\sqrt{2} \rho d L \sum n \sqrt{p_n^2 + q_n^2}}{\mu \sqrt{A_1} \sqrt{Re} \sum \sqrt{p_n^2 + q_n^2}} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(27)$$

$$= \sqrt{2} d \sqrt{\frac{T}{\nu A_1}} \frac{\sum n \sqrt{X_{n+2}^2 + X_{n+3}^2}}{\sum \sqrt{X_{n+2}^2 + X_{n+3}^2}} \Bigg|$$

である。

一方、線型理論によって与えられる $\tau_{0\max}$ と $F_{\max}$ との関係は次のようである。

$$\tau_{0\max} = \left[\frac{2}{1 + \{1 + (2d\sqrt{\pi f/\nu})^2\}^2} \right]^{1/2} F_{\max} \dots\dots\dots(28)$$

3. 底面摩擦力の測定⁶⁾

(1) 底面摩擦力測定装置

この種の測定装置は従来より製作されており、著者らは既往の研究成果を参考にして Eagleson, 岩垣・土屋らによるものと同じタイプの装置を試作した。装置は、長さ 8.0 cm、幅 5.0 cm および厚さ 0.2 mm のステンレス板で作った shear plate に作用する力を、shear plate 上方より鉛直上方に取り付けた支柱でモーメントに変換し、支柱に連結したUゲージで測定するものであり、支柱は波力を受けないようにシールド管で囲まれている。装置について考慮した点をあげれば、①Uゲージおよびシールド管を上下左右に微動できるよう工夫し、shear plate を底面と同一平面上に位置できるようにしたこと、②波の作用によってシールド管が振動しないようにピアノ線を用いて固定したこと、③ shear plate 直下の空隙内の流体の運動を止めるために、shear plate 直下中央部に小さな溝を作って、その中に水銀を入れたことなどである。なお、キャリブレーションは線型性をもつ別のUゲージを底面と平行に設置して静的に行った。

(2) 実験方法および解析方法

実験は、幅 50 cm、高さ 70 cm、長さ 27 m の両面ガラスばりの水槽を用いた。一樣水深における実験では、波高計は抵抗線式波高計を用い、1台を造波板から 4.5 m の位置に、1台を底面摩擦力の測定点に、他の1台を消波工近くに設置した。摩擦力の測定は水槽端における反射の影響を受けないよう水槽の中央部で行った。一樣勾配斜面（勾配は 1/10）は造波板から 7 m の位置より後方にかけて設置した。斜面の最上端は、静水面より高くとり、砕波後の波が遡上したのち、もどり流れとなって逆流するようにした。波高計は、一樣水深部に1台、斜面上の摩擦力の測定点に1台設置した。実験に用いた波の特性は、一樣水深の場合については表-1、斜面上の場合については表-2に示すようである。

記録の解析は、一樣水深の場合には規則波を作用させた後、測定点の波高記録の変動が比較的少ないと考えられる 4, 5 波について解析し、また斜面上における場合には規則波を作用させた後、最初の波より 10 波程度遅れて伝播してくる波高記録の変動が比較的少ないと思われる

表一1 一様水深の場合の波の特性

T(sec)	h(cm)	H(cm)
0.83	20.7-9.8	0.58-2.96
0.91		0.30-2.70
1.00		0.55-2.60
1.11		0.43-2.51
1.25		0.48-2.40

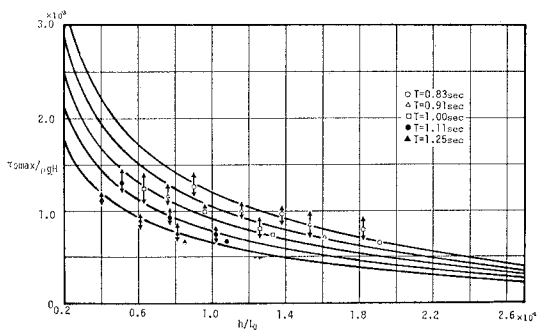
表一2 一様勾配斜面の場合の波の特性

T(sec)	H0(cm)	H0/L0
0.83	1.00	0.0055
	1.78	0.0164
	3.22	0.0297
	4.07	0.0376
0.91	0.89	0.0069
	2.00	0.0155
	3.17	0.0246
	4.54	0.0352
1.00	0.33	0.0021
	0.95	0.0061
	2.22	0.0142
	3.04	0.0195
1.11	0.79	0.0041
	1.60	0.0083
	2.70	0.0140
1.25	1.37	0.0056
	2.54	0.0104
	2.95	0.0121

る波について、それに対応する摩擦力の記録を採用した。なお、斜面上の波については流れ関数表示による理論を用いるので、摩擦力の記録に対応する水位の時間記録の1周期を15等分割して、その静水位からの変位量を読み取った。

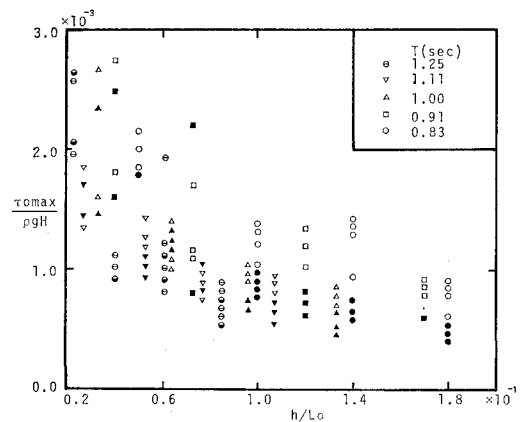
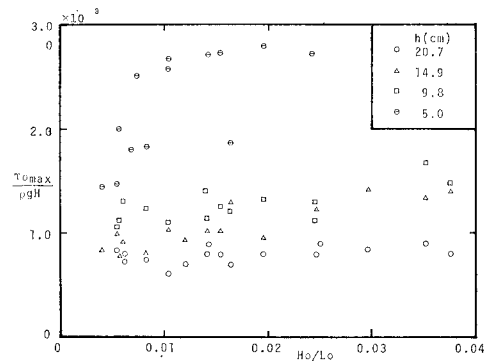
(3) 実験結果および考察

実験結果は、一様水深の場合には既に得られている線型理論による結果にもとづいて検討し、斜面上の場合には本研究によって導かれた理論結果にもとづいて検討した。図一1は式(28)を用いて $\tau_{0\max}$ を算定し、各周期をパラメーターとして $\tau_{0\max}/\rho g H$ と h/L_0 との関係を、理論曲線とともに示したものである。図中、各点における矢印は測定値のバラツキの範囲を示し、プロットした点は各測定値の平均値を示す。また、図の曲線は式(25)にもとづく理論曲線であり、測定値に多少のバラ

図一1 一様水深の場合の $\tau_{0\max}/\rho g H$ と h/L_0 との関係

ツキはあるが、ほぼ理論値を説明できると言える。図一2は式(27)を用いて $\tau_{0\max}$ を算定し、一様水深の場合と同様なパラメーターを用いて整理したものである。図中、黒くぬりつぶしたものが式(23)による理論値である。理論値と測定値は、 h/L_0 が小さくなるにつれてバラツキが少なくなっている。しかも、 h/L_0 が小さくなると $\tau_{0\max}/\rho g H$ の値は線型理論によるものよりも大きくなり、増加の割合が大きくなる傾向を示すことが言える。図一3は最大摩擦力の無次元量と沖波波形勾配 H_0/L_0 の関係を示すものである。これより、 $\tau_{0\max}/\rho g H$ は水深が比較深い場合は H_0/L_0 によらずほぼ一定値をとるが、水深が浅くなると値は約2~3倍へと大きくなり、値のバラツキが激しくなることがわかる。

このように、波により水底斜面上に作用する摩擦力は、微小振幅波理論では説明できない特性を有し、波の非線型性を考慮した Dean の流れ関数表示による理論を用いることによって、ある程度説明できることがわかった。

図一2 一様勾配斜面の場合の $\tau_{0\max}/\rho g H$ と h/L_0 との関係図一3 一様勾配斜面の場合の $\tau_{0\max}/\rho g H$ と H_0/L_0 との関係

4. 結 語

本研究では、層流境界層方程式の理論解から底面摩擦応力を誘導し、実験結果と比較して、波が非線型性を有する場合の理論の適合性について検討を加えたが、波形の非対称性が表現可能な Dean の流れ関数表示による理論は、斜面上を伝播する波の特性を説明できると考えられる。今後は、理論値と実験値が一致しない理由を明らかにするとともに、斜面上の波動場における諸水理量について、理論的・実験的に検討を行い、漂砂現象に関連した波動場の特性を明らかにしていくつもりである。

最後に、実験に際して協力して頂いた当時学部学生の平野義博君（現臨海土木KK）に謝意を表するとともにこの研究は文部省科学研究費（試験研究）（代表者 細井正延）による研究の一部であることを付記する。

参 考 文 献

- 1) Eagleson, P.S.: Laminar damping of oscillatory

waves, Proc. ASCE, Vol. 88, No. HY 3, pp. 155~181, 1962.

- 2) 岩垣雄一・土屋義人・坂井順行：海底摩擦による波高減衰の基礎的研究（2），第11回海岸工学講演会講演集，pp. 62~68, 1964.
- 3) Dean, R.G.: Stream function representation of nonlinear ocean waves, Jour. Geophys. Res., Vol. 70, No. 18, pp. 4561~4572, 1965.
- 4) 岩垣雄一・酒井哲郎：Stream function theory による斜面上の碎波の水粒子速度の表現について，第21回海岸工学講演会講演集，pp. 27~32, 1974.
- 5) Schlichting, H.: Boundary Layer Theory, McGraw-Hill, 1968.
- 6) 岩垣雄一・裏 義光・平野義博：波による水底斜面上の摩擦力に関する実験的研究，関西支部年次学術講演会講演概要，pp. II-18-1 ~ II-18-2, 1977.