

風波の成分波の波速に関する研究

郭 一羽*・光易 恒**・増田 章***

1. 緒 言

風波の成分波の波速の特性を詳しく調べることは、風波の力学的モデルを明確にするための重要な手掛りを与える。これはまた、測定された風波の周波数スペクトルを波数スペクトルに変換するという実際的な問題においても重要である。筆者らは、前回¹⁾、風洞水槽の風波の場合についてこの問題を実験的に詳しく調べた。とくに、風洞水槽の途中より、風を抜いて水槽後半部を無風域とし、吹送流や風圧の効果を除いた条件のもとで風波の成分波の波速を詳しく調べた。風波の成分波の波速は、波の進行方向に一定距離で設置した2組の波高計を使用して、クロス・スペクトル法で求めたものである。前回得られた主要な結果を列記すると、次のようなものである。

(i) 風波のエネルギーの大部分が含まれているスペクトルのピークの周波数 f_m の付近 ($0.8f_m \sim 1.6f_m$) においては、測定された成分波の波速は、波の方向分散の効果を考慮した線型理論より計算された波速にほぼ等しい。(ii) 成分波のコヒーレンスの変化も上記の周波数範囲においては、方向分散を考慮した線型理論より与えられるものにほぼ等しい。(iii) 風波のスペクトルのピークの周波数の約2倍 $2f_m$ および3倍 $3f_m$ 付近では、急激なコヒーレンスの低下がみられる。(iv) コヒーレンスに異状が生じる周波数付近から高周波側にかけて、波速が線型理論で与えられる値よりいちじるしく異なってくる。(iii) および (iv) の性質は、明らかに風波場の非線型効果によるものと考えられる。

今回の研究は、最近、筆者ら²⁾が展開した、非線型な2次元のランダム波に関する3次近似解を利用して、その理論より導かれる結果と上述の実験結果とを比較したものである。類似した研究としては、古くは Tick (1959) の研究³⁾、Longuet-Higgins & Phillips (1962) の研究⁴⁾ならびに最近の Huang & Tung (1976) の研究⁵⁾ などがある。しかしながら、Tick の研究は1次元波 (long-

crested wave) に関する2次近似の理論であり、これでは測定結果を定量的に説明できないことが後に示される。Longuet-Higgins & Phillips (1962) の研究も1次元波に関する計算である。また、Huang & Tung (1976) の研究は、2次元波に対する3次近似であるが、これには重大な誤りがある。

2. 理論の概要

非粘性かつ非圧縮性流体とし、非回転運動とする。このとき速度ポテンシャル $\Phi(\mathbf{x}, z, t)$ が存在し、それは Laplace 方程式を満足する。

$$\nabla^2 \Phi(\mathbf{x}, z, t) = 0 \quad \dots\dots\dots (1)$$

ただし、 $\mathbf{x}$ は水平座標を示すベクトル、 z は鉛直座標、 t は時間である。無限水深の場合には、式 (1) の解が形式的に次のようになる。

$$\Phi(\mathbf{x}, z, t) = \int_{\mathbf{k}} \int_n dA(\mathbf{k}, n) e^{i[\mathbf{k} \cdot \mathbf{x} + (k_z z - nt)]} \quad \dots\dots\dots (2)$$

$dA(\mathbf{k}, n)$ は波数ベクトル $\mathbf{k}$ と角周波数 n の複素ランダム関数である。積分範囲は全領域とする。同様に波の水面変位 $\zeta(\mathbf{x}, t)$ はもう一つのランダム関数 $dB(\mathbf{k}, n)$ により、次のように表現される。

$$\zeta(\mathbf{x}, t) = \int_{\mathbf{k}} \int_n dB(\mathbf{k}, n) e^{i[\mathbf{k} \cdot \mathbf{x} - nt]} \quad \dots\dots\dots (3)$$

統計的定常性と均一性の仮定をすれば、 $dB(\mathbf{k}, n)$ と波のエネルギースペクトル $\Psi(\mathbf{k}, n)$ との間に次の関係が存在する。

$$\overline{dB(\mathbf{k}, n) dB(\mathbf{k}', n')} = \Psi(\mathbf{k}, n) \delta(\mathbf{k} + \mathbf{k}') \delta(n + n') d\mathbf{k} dn \quad \dots\dots (4)$$

—— はアンサンブル平均で、 δ は Dirac のデルタ関数である。自由水面の運動学的境界条件は次式のようになる。

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} = \frac{\partial \Phi}{\partial z} - \nabla \Phi \cdot \nabla \zeta \quad (z = \zeta) \quad \dots\dots\dots (5)$$

(2) と (3) の両式をもとに、式 (5) を2次オーダー近似まで展開すると、次式が得られる。

$$dA(\mathbf{k}, n) = -\frac{in}{|\mathbf{k}|} dB(\mathbf{k}, n)$$

* 学生員 工修 九州大学大学院 工学研究科
 ** 正会員 理博 九州大学教授 応用力学研究所
 *** 理修 九州大学助手 応用力学研究所

$$+\int_{k_1}\int_{n_1}i\frac{\mathbf{k}\cdot\mathbf{k}_1}{|\mathbf{k}|\cdot|\mathbf{k}_1|}n_1dB(\mathbf{k}_1,n_1)dB(\mathbf{k}-\mathbf{k}_1,n-n_1)\quad(6)$$

次に、自由表面での動力学的境界条件

$$\frac{\partial\Phi}{\partial t}+\frac{(\nabla\Phi)^2}{2}-g\zeta=0\quad(z=\zeta)\quad\cdots\cdots(7)$$

に対して、式(6)を使って $dA(\mathbf{k},n)$ を消去し、上と同様に2次オーダーまでの摂動展開をすると、 dB の2次オーダーの量 $dB^{(2)}$ が1次オーダーの量 $dB^{(1)}$ で表わされる。すなわち

$$dB^{(2)}(\mathbf{k},n)=\int_{k_1}\int_{n_1}F(\mathbf{k},n,\mathbf{k}_1,n_1)dB^{(1)}(\mathbf{k}_1,n_1)\\ \times dB^{(1)}(\mathbf{k}-\mathbf{k}_1,n-n_1)\left/\left(g-\frac{n^2}{|\mathbf{k}|}\right)\right.\quad\cdots\cdots(8)$$

で、ただし g は重力加速度である。したがって、1次の表面変位について、Gauss過程を仮定すれば、強制波としての2次近似のスペクトルが、式(4)より次のように求められる。

$$\Psi^{(2)}(\mathbf{k},n)=\int_{k_1}\int_{n_1}2\left\{\frac{F(\mathbf{k},n,\mathbf{k}_1,n_1)}{(g-n^2/|\mathbf{k}|)}\right\}^2\\ \Psi^{(1)}(\mathbf{k}_1,n_1)\Psi^{(1)}(\mathbf{k}-\mathbf{k}_1,n-n_1)d\mathbf{k}_1dn_1\cdots(9)$$

ただし

$$F(\mathbf{k},n,\mathbf{k}_1,n_1)=\frac{1}{2}\{n^2-[1+\cos(\theta-\theta_1)]n_1\\ \times(n-n_1)-n[n_1\cos(\alpha-\theta_1)\\ +(n-n_1)\cos(\alpha-\theta)]\},\\ \alpha=\tan^{-1}\left\{\frac{|\mathbf{k}_1|\sin\theta_1+|\mathbf{k}-\mathbf{k}_1|\sin\theta}{|\mathbf{k}_1|\cos\theta_1+|\mathbf{k}-\mathbf{k}_1|\cos\theta}\right\},\\ |\mathbf{k}|=[|\mathbf{k}-\mathbf{k}_1|^2+|\mathbf{k}_1|^2\\ +2|\mathbf{k}-\mathbf{k}_1||\mathbf{k}_1|\cos(\theta-\theta_1)]^{1/2}.$$

ここに $|\mathbf{k}_1|$ と $|\mathbf{k}-\mathbf{k}_1|$ は分散関係から決まり、 θ と θ_1 はそれぞれ波数ベクトル $(\mathbf{k}-\mathbf{k}_1)$ と $\mathbf{k}_1$ の方向を示す角度である。

さて、必要な量はクロス・スペクトル $C_r(n,\mathbf{l})$ およびパワースペクトル $\phi(n)$ である。ただし $C_r(n,\mathbf{l})$ 、 $\phi(n)$ は次のように定義される。すなわち

$$C_r(n,\mathbf{l})\equiv\int_{\mathbf{k}}\Psi(\mathbf{k},n)e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{l}}d\mathbf{k}\\ =\int_{\mathbf{k}}\{\Psi^{(1)}(\mathbf{k},n)+\Psi^{(2)}(\mathbf{k},n)\}e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{l}}d\mathbf{k}\\ =C_r^{(1)}(n,\mathbf{l})+C_r^{(2)}(n,\mathbf{l})\quad\cdots\cdots(10)$$

$$\phi(n)\equiv C_r(n,\mathbf{o})=\int_{\mathbf{k}}\Psi(\mathbf{k},n)d\mathbf{k}\\ =C_r^{(1)}(n,\mathbf{o})+C_r^{(2)}(n,\mathbf{o})=\phi^{(1)}(n)+\phi^{(2)}(n)\\ \cdots\cdots\cdots(11)$$

ここで、肩の数字⁽¹⁾、⁽²⁾はそれぞれ1次スペクトル、2次スペクトルの意味である。 $\Psi^{(1)}(\mathbf{k},n)$ は自由波であり、分散式を近似的に満足するときのみゼロでない。つまり、3次オーダー近似以上の効果あるいは吹送流の効果等を考えない限り、線型分散関係式

$$|\mathbf{k}|=n^2/g\quad\cdots\cdots(12)$$

を満たすものだけが存在する。したがって $\Psi^{(1)}(\mathbf{k},n)$ は次のように表わされる。

$$\Psi^{(1)}(\mathbf{k},n)d\mathbf{k}dn=\phi^{(1)}(n)G(n,\theta)\delta(|\mathbf{k}|-n^2/g)\\ \times d|\mathbf{k}|d\theta dn\quad\cdots\cdots(13)$$

ここに $G(n,\theta)$ は自由波の方向分布関数である。

一方、3次オーダー近似まで展開すると、線型分散関係式(12)の代わりに、一つの実線型分散関係が現われて来る。結局、次式が得られる²⁾。

$$\frac{n^2}{|\mathbf{k}|}=g+\int_{k_1}\int_{n_1}\hat{F}(\mathbf{k},n,\mathbf{k}_1,n_1)\Psi^{(1)}(\mathbf{k}_1,n_1)d\mathbf{k}_1dn_1\\ \cdots\cdots\cdots(14)$$

ここに波の成分 $(\mathbf{k},n)$ と $(\mathbf{k}_1,n_1)$ は自由波であり、線型波として近似されとする。関数 $\hat{F}$ の形は複雑なので、ここでは省略する。式(14)は単一方向の波に限れば、論文4)により提出された結果と同じである。以上の理論の詳細に関しては文献2)を参照されたい。

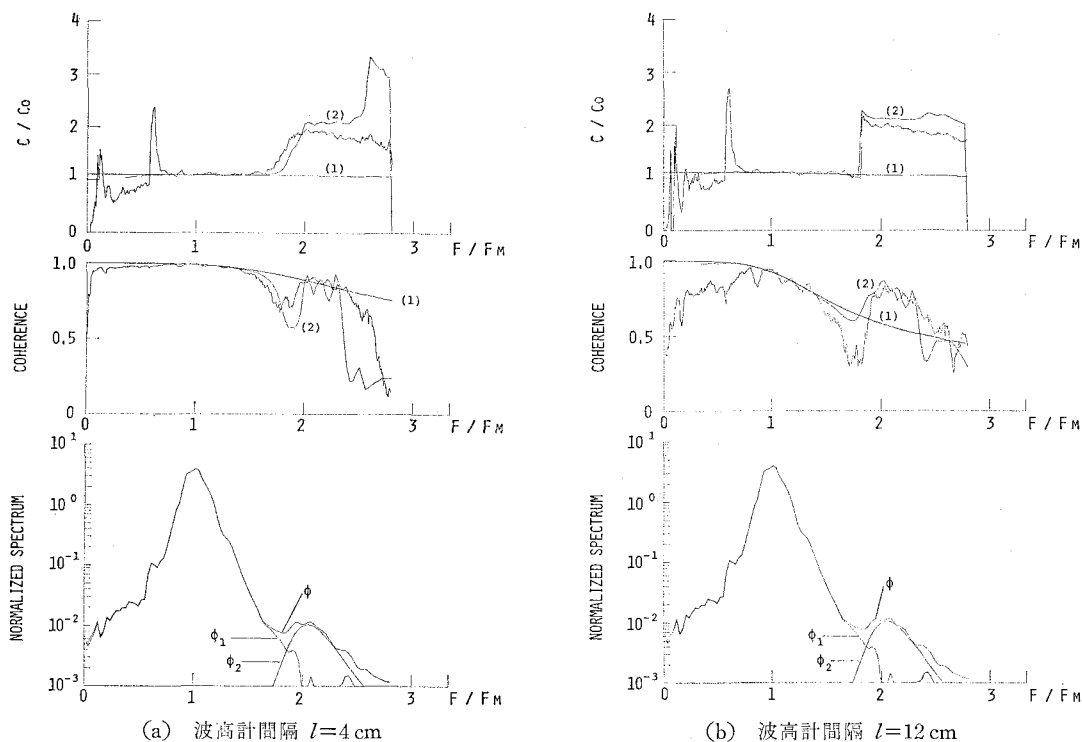
3. 理論モデルによる波速の計算

式(9)に示すように、2次オーダーのスペクトル $\phi^{(2)}(\mathbf{k},n)$ を求めるためには、1次オーダーのスペクトル $\phi^{(1)}(\mathbf{k},n)$ あるいはこれを分離して表示したパワースペクトルおよび方向分布関数に関する情報が必要である。しかしそれはまだ未知であるので、まず計測されたパワースペクトル $\phi(n)$ そのものを1次オーダーのパワースペクトル $\phi^{(1)}$ と仮定し、方向分布関数に関しては後述するもっともらしい形を使用して、これらを式(9)に代入し、 $\phi^{(2)}(\mathbf{k},n)$ を計算した。

この $\phi^{(2)}(\mathbf{k},n)$ より $\phi^{(2)}(n)$ を求め、測定した $\phi(n)$ より $\phi^{(2)}(n)$ を引いて $\phi^{(1)}(n)$ を求め、次にこの $\phi^{(1)}(n)$ を使用してはじめと同様に計算を繰返した。このような逐次近似法で計算を続け、測定されたパワースペクトル $\phi(n)$ を $\phi^{(1)}(n)$ と $\phi^{(2)}(n)$ に分離した。実際に逐次近似計算を行なった結果、その収束は極めて速いことがわかった。すなわち、1回目の計算により求めた $\phi^{(2)}$ の結果と2回目の計算より求めた結果がほとんど一致することがわかった。これは、 $2f_m$ 付近にピークを有する $\phi^{(2)}$ は大部分 f_m 付近の $\phi^{(1)}$ の寄与で生じ、 f_m 付近では $\phi^{(2)}$ は極めて小さく、 ϕ と $\phi^{(1)}$ とがほとんど一致するためである。

図-1は計算結果の一例を示したものである。これより、 $\phi^{(2)}$ はピーク周波数の2倍 $2f_m$ 付近に集中して現われ、その大きさは自由波成分、すなわち $\phi^{(1)}$ に比して極めて大であることがわかる。

ただし、方向分布関数としては、前回と同様に次の分布形を仮定した。



図—1 風波の波速比 C/C_0 、コヒーレンスおよびパワースペクトルの実測値および計算値。($U_r=10$ m/sec).
(1): 線型近似, (2): 2次近似, 方向分散はともに $\cos^4 \theta$ に比例。

$$G(n, \theta) = \begin{cases} G'(m) \cos^m \theta & n > 0, |\theta| < \pi/2 \\ & \text{or } n < 0, |\theta| > \pi/2 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases} \quad (15)$$

ここに,

$$G'(m) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cdot \frac{\Gamma(1+m/2)}{\Gamma(1/2+m/2)}$$

Γ はガンマー関数である。前回、1次オーダー近似までの理論計算により、水槽の風波の方向分散が大体 $m=2 \sim 4$ の間に存在していることがわかったので、今回も便宜的に式(15)で $m=4$ としたものを使用する。

計算は次のような順序で行なわれた。まず上に述べた逐次近似法で求めた $\phi^{(1)}$ を使用して、式(10)から2次オーダー近似までの成分波のクロス・スペクトル $C_r(n, l)$ を求める。次に $C_r(n, l)$ の実数部を $CO(n, l)$ 、虚数部を $Q(n, l)$ として、次式を使って波の成分波の位相差 $\bar{\theta}$ 、コヒーレンス COH および波速 C を計算する。

$$\bar{\theta} = \tan^{-1} \left\{ \frac{Q(n, l)}{CO(n, l)} \right\} \quad (16)$$

$$COH = \sqrt{Q^2(n, l) + CO^2(n, l)} / \phi(n) \quad (17)$$

$$C = n \cdot l / \bar{\theta} \quad (18)$$

4. 計算値と実測値の比較

(1) 波形勾配が小さい場合

発生域における風速 $U_r=10$ m/sec で起こした風波を

無風領域に伝播させた場合について最初に検討する。この波の平均波形勾配は約 $1/20$ で、これは後に検討する風速 $U_r=15$ m/sec の場合の風波より波形勾配が小さい。計算値と実測値の比較を図—1に示した。図中1番上のグラフは波速比 C/C_0 を示す。 C_0 は線型理論式(12)により求めた波速である。真中のグラフはコヒーレンスである。下の図は波の総エネルギー E およびスペクトルのピーク周波数 f_m により無次元化したパワースペクトルである。2つのグラフはともに f_m により無次元化された周波数 f/f_m を横軸として表わされている。図—1の(a), (b)は、それぞれ2台の波高計間隔 l が4 cm および12 cm の場合に得られた結果である。式(10)より求めた1次近似までの結果と2次近似までの結果、ならびに実測結果を示している。なお、前回も述べたように、 $f/f_m \approx 0.6$ ($f=1.6$ Hz に相当)にみられる実測された波速比 C/C_0 の異状な値(スパイク的)は、水槽内の水のわずかな横振動によるものである。

スペクトルのピークの周波数の1.6倍すなわち $1.6f_m$ の周波数より低周波側においては、1次オーダーの計算結果と2次オーダーの計算結果が全く同じで、それらは実測値ともよく一致している。すなわち、周波数約 $1.6f_m$ より低周波側では、成分波の波速が方向分散を考慮した線型理論によりかなり正確に説明できることがわかる。周波数約 $1.6f_m$ より高周波側では、1次オーダー

の理論計算は、実測といちじるしく異なっている。しかし、2次オーダーまで近似すると、実測値とかなりよく合ってくる。

図の中のパワースペクトルをみると、周波数 $1.8f_m$ 付近において、2次オーダーのパワースペクトル $\phi^{(2)}$ と1次オーダーのパワースペクトル $\phi^{(1)}$ が量的に等しくなっている。したがって、この付近では、強制波と自由波という位相速度を異にする2種類の波が共存することになり、波の位相差に急激な変化があらわれる。この位相差の急激な変化により、波のコヒーレンスの急速な低下、ならびに波速の急激な増大が生じる。また、この位相差の変化率は、波高計間隔 l と波の波長の比の増大に従って増大する。この内容は次のような単純化されたモデルより容易に推測される。

いま、一つの自由波とそれに同じ周波数の強制波とが共存している波の系について考えると、強制波成分の波数は自由線型波成分の波数 k の $1/2$ となるので、波の波速は次のようにあらわされる。

$$\frac{C(n)}{C_0(n)} = kl / \tan^{-1} \left\{ \frac{\sin(kl) + \alpha \sin(kl/2)}{\cos(kl) + \alpha \cos(kl/2)} \right\} \quad \dots\dots\dots (19)$$

ここに $\alpha = \phi^{(2)}(n) / \phi^{(1)}(n)$ である。図-2は C/C_0 と $kl(=2\pi l/L)$ および α との関係をプロットしたものである。 $\alpha=1.0$ はちょうど上に述べた $1.8f_m$ 周波数付近に対応しているが、図に示すよう、 kl あるいは l/L の値の増大により、波速の増大が非常に急激に生じるようになる。すなわち、波速に対する強制波の寄与と自由波の寄与との限界のはっきり区別できるようになる。それ故に図-1において、 $1.8f_m$ の周波数付近における波速の増加率が l によって変化した原因が理解できる。一方、その位相差における急激な変化を考慮すると、(18)式を使用して位相差から波速を求めるに際して、 kl が大きい場合には、 2π の位相の修正について、

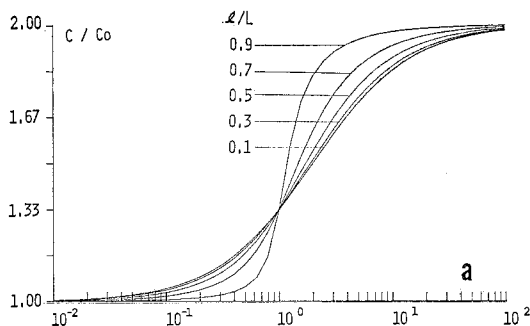


図-2 自由波(波数 k)と同じ周波数の高調波(波数 $k/2$)が共存する場合に、クロス・スペクトル法で求めた波速 C (振幅比 α および無次元波高計間隔 l/L による波速比 C/C_0 の変化、 C_0 は波数 k の自由線型波の波速)

十分注意しなければならない。前回の報告において、波高計間隔が大きい場合に、周波数に対する波速比 C/C_0 の変化が $2f_m$ 付近で滑らかな結果があった。しかし、これは 2π だけ位相の調節を行なう際に生じた間違いであることがわかった。正しく位相を調節すれば、今回のデータのように $2f_m$ 付近に急速な波速比の増大が生じる。

また、図-1において、 $2f_m$ の周波数付近では、 $\phi(f)$ はほとんど強制波によるものであること、波速が線型理論の2倍になること、コヒーレンスが再びよくなることなどが、すべて2次オーダー近似までの理論計算によって説明できる。

風洞水槽の風波のデータについては、ほとんど常に周波数 $2f_m$ 付近に非線型効果が強く現われている。多くの場合、海洋波のエネルギー・スペクトル分布は風洞水槽の風波に比して集中度が小さく、非線型性が弱いので、周波数 $2f_m$ 付近において、強制波成分のエネルギーが常に自由線型波のエネルギーより大きいとは限らないであろう。

Tickは、波の方向性を考えないで、同じ2重摂動法により波のパワースペクトルおよびクロス・スペクトルの近似計算式を導いている。参考までに、彼の式によって計算した結果も図-3に示した。図にみられるように、Tickの理論で定性的にはある程度実測結果を説明できるけれども、定量的には極めて不十分である。すなわち、 $\phi^{(2)}$ が ϕ よりも大きくなり、また、波速および

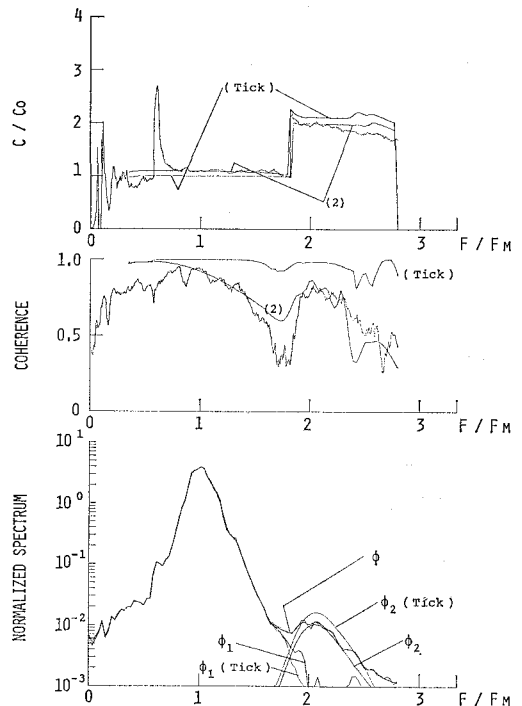


図-3 Tickの2次近似と方向分散を考慮した今回の2次近似との比較。

コヒーレンスの両方とも実測値との間にかなりの違いが存在する。したがって、風波の非線型効果を議論するに際しては、波の方向分散の効果を考慮しなければならないことが、この結果よりわかる。

(2) 波形勾配が大きい場合

よく知られているように、波の非線型効果は、波形勾配が大きくなるほど著しくなる。 $U_r = 10 \text{ m/sec}$ の波(波形勾配 $\div 1/20$)については、2次近似までで十分説明できたが、 $U_r = 15 \text{ m/sec}$ で生じた波形勾配が少し大きい波(波形勾配 $1/13$)については少し不充分であった。そこで、3次オーダー近似までの理論計算を行なって、その結果と実測値とを比較した。図-4 は $U_r = 15 \text{ m/sec}$ で、波高計間隔 $l = 12 \text{ cm}$ の場合のデータである。ここでいう3次オーダーまでの計算とは、式(9)、式(10)と式(11)を使って、クロス・スペクトルを求めるに際して、線型分散関係式(12)を使わずに、非線型分散関係式(14)を使って計算をすることである。

3次オーダーの近似計算の結果は、線型式(12)を使った2次オーダーの近似計算の結果とともに図-4に示した。3次オーダーの非線型効果を考えた理論計算結果は、かなり実測値に近いことがわかる。

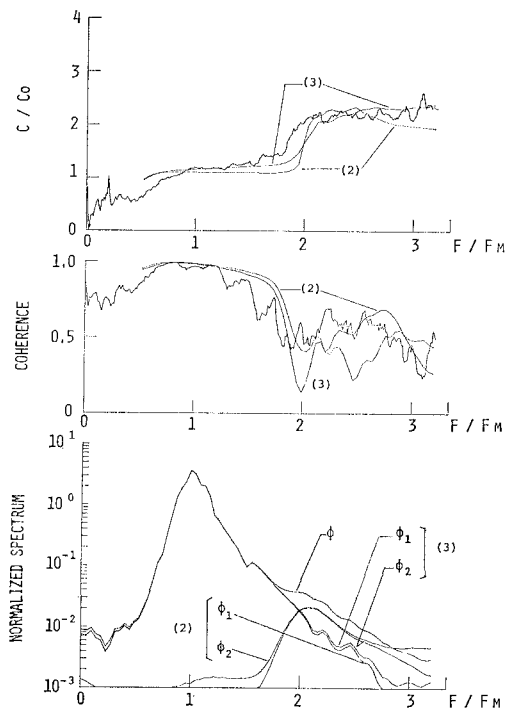


図-4 ($U_r = 15 \text{ m/sec}$, $l = 12 \text{ cm}$) 以外は 図-1 に同じ、ただし、線型近似の(1)を除き、3次近似(3)を加えた。

5. 結 論

前回の研究で得られた、無風領域における風波の成分波の波速のデータに、最近筆者らが行なった非線型な2次元ランダム波に関する理論的な研究の結果を適用して、解析した。

主要な結果は次のようなものである。

(1) 2次オーダーのパワースペクトル $\phi^{(2)}$ の計算に際して、1次オーダーのパワースペクトル $\phi^{(1)}$ のかわりに実測値 ϕ (高次のものを含む)を使用して求めると、逐次近似法で求めた結果とほとんど差を生じない。

(2) 風洞水槽の風波の場合、少なくとも無風域で調べた限りスペクトルのピークの周波数の2倍の周波数 $2f_m$ 付近のパワーは大部分非線型効果によるもの $\phi^{(2)}$ であって、自由波によるパワー $\phi^{(1)}$ は無視される程度である。

(3) 風洞水槽の風波では、約 $1.8f_m$ 付近で $\phi^{(1)}$ と $\phi^{(2)}$ とが等しくなる。このため、この周波数付近で波の位相差に急激な変化が生じ、それにともなう、コヒーレンスの急激な低下と波速の急激な増大とが生じる。

(4) 波形勾配の非常に大きい波を除くと、全般的にみて、2次元ランダム波の2次近似解は、成分波の波速、ならびに2点間で測定した波のコヒーレンスなどの周波数に対する変化を極めてよく説明する。

(5) 波形勾配が大きい波については、予想されるように、3次近似解の方が実測結果により近い値を与える。

(6) 風波のエネルギーの大部分が含まれるスペクトルのピークの周波数付近 ($0.8f_m < f < 1.8f_m$) においては、線型近似解を使用しても、方向分散の効果を考慮すれば、波速に関してはほぼ妥当な結果が得られる。

なお、発生域における風波の波速に関するデータについては、現在解析を行なっているもので、近い将来に報告する予定である。

参 考 文 献

- 1) 光易 恒・郭 一羽: 第23回海岸工学講演会論文集, pp. 323~328, 1976.
- 2) A. Masuda, Kuo Yi-Yu and H. Mitsuyasu: (準備中)
- 3) Leo J. Tick: J. Mathematics and Mechanics, Vol. 8, No. 5, pp. 643~651, 1959.
- 4) Longuet-Higgins & Phillips: J. Fluid Mech. 12, pp. 333~336, 1962.
- 5) N.E. Huang & C.E. Tung: J. Fluid Mech., Vol. 75, Part 2, pp. 337~345, 1976.