

風波の波高と周期との結合確率分布について

本 多 忠 夫*・光 易 恒**

1. 結 言

波高の理論的統計分布は narrow spectrum の場合にしか導くことができない。現実には、スペクトル幅パラメータ $\epsilon=0$ の理論 (Rayleigh 分布) を適用している。これは海洋波が単一周期の波と仮定されていることに相当する。実際の海洋波が単一周期の波から構成されていると考えることは不可能である。しかしながら, zero-up cross 法で定義される波高分布の実測値は Rayleigh 分布ではほぼ近似できる (合田・永井¹⁾)。この理由は現在のところまだよくわかっていない。周期に関しては, Bretschneider (1957) 以来, 周期の2乗が Rayleigh 分布をするものとして統計的に処理されてきている。周期の2乗の Rayleigh 分布でよく表わされる場合もあるが, 実測された周期の分布は Rayleigh 分布より大きな集中度を持つ傾向がある (合田・永井¹⁾)。波高と周期との結合確率分布は更にむづかしく, 現在のところまだほとんどわかっていない。Longuet-Higgins²⁾ が波高と周期との結合確率分布に関する1つの理論を最近提出した。しかし, この理論も narrow spectrum の場合に限られている。いずれにしろ, 波高および周期の理論的分布は現在のところ narrow spectrum の場合にしか導くことができない。

他方, 実際の波の測定について考えてみると, 使用する波高計の応答特性あるいは得られたデータのサンプリングタイム等の関係から, われわれは一般にローパスフィルターを通して波の場を測定していることがわかる。これらのフィルターの相乗効果がわれわれが得ている種々の統計量——例えば, 平均波高あるいは平均周期——にかなりの影響を与える可能性がある。

一方, 実際の海洋波を観察すると, dominant wave に小さなさざ波が乗っているのが認められる。このさざ波の周波数は非常に高いが, 振幅そのものは非常に小さい。この点を考慮すると, 水位変動は dominant wave によってほぼ決まると考えることができる。風洞水槽の風波のスペクトル測定の結果をみると, $f/f_m > 2$ (f : ス

ペクトルの周波数, f_m : ピークの周波数) の領域にはエネルギーがほとんど含まれていないことがわかる (光易・本多³⁾)。特殊な問題を除けば, dominant wave に乗っているさざ波の統計はそれほど重要ではない。実際的な面からいっても, 重要なのは dominant wave の統計的特性である。

これらの点を考慮して, 高周波領域まで精密に測定された風洞水槽の風波のデータを使用して, $2f_m$ あるいは $3f_m$ 以上の高周波成分を除去した dominant wave の波高および周期の統計的性質を調べた。これらの結果を最近の Longuet-Higgins (1975) の理論²⁾ と比較した。random noise の特性周期とスペクトルのモーメントとの間に成立する関係式が Rice⁴⁾ によって与えられている。この Rice の理論から求められる特性周期と実測された平均周期との比較を行なった。

2. 実験データ

幅 60 cm, 高さ 80 cm, 長さ 850 cm の風洞水槽を使用して実験を行なった。水深は約 38 cm であった。5 種類の風速 $U=5, 7.5, 10, 12.5$ m/sec を使用して, 測点 $F=105, 225, 345, 585, 825$ cm で風波による水位変動を測定した。このうち, 測点 $F=345, 585$ cm で測定された風波のデータを今回解析した。これはある程度発達した風波の統計的特性を調べるためである。白金 (径 0.1 mm) の1本線および2本線の2種類の抵抗型波高計を使用した。1本線型の一様感度周波数範囲は約 80 Hz であり, 2本線型は約 40 Hz であった。線型性は2本線型がすぐれている。これらの点を考慮して, 水位変動ははげしいがその振幅が比較的小さい測点 $F=345$ cm には1本線型波高計を使用し, 水位変動が大きい測点 $F=585, 825$ cm には2本線型波高計を使用した。各風速に対して各測点で測定された波高計の信号をいったん磁気テープへ記録した。この磁気テープの信号をサンプリングタイム 200 Hz で A-D 変換し, 1ブロック 2048 個ずつの digitized data に編集した。各測点の 10 ブロックずつのデータを今回解析した。したがって, 測定時間約 102.4 sec の記録を統計処理したことになる。これ以上の詳細な実験条件等に関してはすでに発

* 正会員 九州大学助手 応用力学研究所

** 正会員 理博 九州大学教授 応用力学研究所

表³⁾ されているので省略する。

3. 結果と議論

200 Hz のサンプリングタイムで A-D 変換された水位変動のデータを 1 ブロック (2048 個のデータ) ずつフーリエ変換し、フーリエ級数の係数を求めた。このフーリエ級数の係数のうち、 $2f_m$ あるいは $3f_m$ (f_m : パワースペクトルのピーク周波数) 以上の高周波の係数を 0 とし、逆フーリエ変換を行なって、波形を再合成した。この高周波成分の除去は理想的なローパスフィルタを波形の信号にかけたことに相当する。これは、dominant wave を数学的にはっきり定義でき、しかもこの高周波成分の除去で raw data の波形をあまりそこなわないよう考慮したためである。事実、今回のパワースペクトルの測定結果をみると、 $2f_m$ あるいは $3f_m$ までの周波数領域に全パワーの 94~99% が含まれている。

図-1 には raw data の波形と $2f_m$ -cut あるいは $3f_m$ -cut の dominant wave との比較が示されている。周波数の高い小さな波が完全に除去されているのがわかる。これらの dominant wave の波高および周期の統計的特性を調べ、これらの結果を Longuet-Higgins の波高と周期との結合確率密度の理論²⁾と比較した。

水位変動が Gaussian であり、かつ narrow spectrum であるという仮定から、Longuet-Higgins は次式のような波高と周期との結合確率密度関数を導いた。

$$p(\xi, \eta) = (\xi^2 / \sqrt{2\pi}) \exp(-\xi^2(1+\eta^2)/2)$$

ここに、 $\xi = a/\mu^{1/2}$,

a = 波の振幅 ($2a = H_c, H_c$: crest-to-crest 法による波高),

T_z = zero-up cross 法による周期,

$\bar{T}_z = T_z$ の平均値,

μ_0 = エネルギースペクトルの 0 次のモーメント,

μ_2 = エネルギースペクトルの平均点まわりの 2 次のモーメント,

$$\nu = (\mu_2/\mu_0)^{1/2} (\bar{T}_z/2\pi)$$

この結合確率密度関数から波高および周期の確率密度関数はそれぞれ次のように表わされる。

$$p(\xi) = \xi \exp(-\xi^2/2) \quad (\text{Rayleigh 分布})$$

$$p(\eta) = 1/2(1+\eta^2)^{3/2}$$

図-2 には、 $F=345$ cm, $U=5$ m/sec における raw data の波高 H_z と周期 T_z の分布が示されている。 H_z および T_z は zero-up cross 法で定義される波高および周期である。波高お

$F = 345 \text{ CM} \quad U = 5.0 \text{ M/S}$

FM2= 13.7695
FM3= 20.7031
YMAX= 0.1497

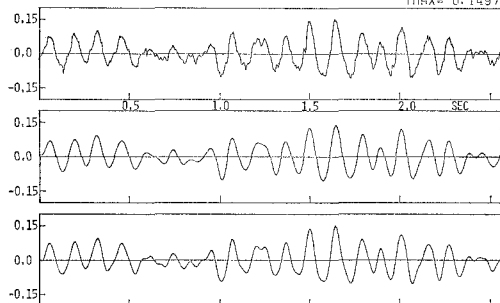


図-1 Raw Data の波形と Dominant Wave の波形との比較 ($f_m=6.88\text{Hz}$) (上: Raw Data, 中: $2f_m$ -cut, 下: $3f_m$ -cut)

よび周期はそれぞれの平均値で無次元化されている。右下の 2 つの図が H_z および T_z の測定されたヒストグラムである。これらの図の中の理論曲線は Rayleigh 分布 (波高) および周期の 2 乗の T^2 -Rayleigh 分布 (周期) である。実測値と理論曲線とはかなりずれている。なお

$F = 345 \text{ CM} \quad U = 5.00 \text{ M/S}$

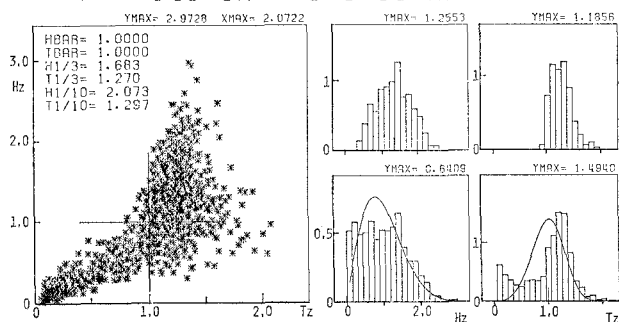


図-2 Raw Data の波高 H_z と周期 T_z の分布 (曲線、波高: Rayleigh, 周期: T^2 -Rayleigh)

2FM-CUT

$F = 345 \text{ CM} \quad U = 5.00 \text{ M/S}$

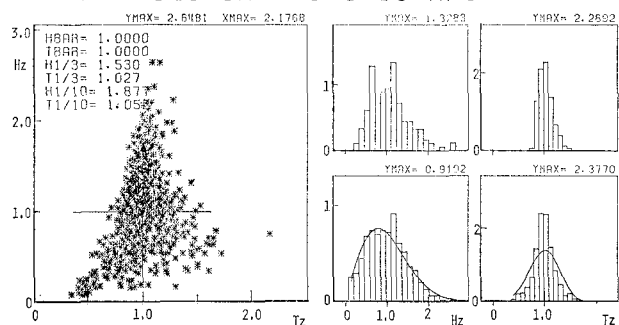


図-3 $2f_m$ -cut の Dominant Wave の波高 H_z と周期 T_z の分布 (曲線、波高: Rayleigh, 周期: T^2 -Rayleigh)

左の図の十字の線は測定された H_z および T_z の平均値を示している。右上の2つの図は測定された結合確率密度の最大値を示す点での H_z および T_z のヒストグラムである。この結合確率密度は H_z 軸および T_z 軸を10~20等分してできるメッシュの中に入る測定点の数を数えて求めたものである。同じデータの $2f_m$ -cut の dominant wave の H_z および T_z の分布が図-3に示されている。波高に関しては Rayleigh 分布でよく表わせるが、周期に関しては T^2 -Rayleigh 分布では集中度が不足している。

$F=345$ cm, $U=7.5$ m/sec の場合の raw data の H_z および T_z の分布が図-4に示されている。周期に関しては T^2 -Rayleigh 分布は実測値に比較するとかなり集中度が不足していることがわかる。この同じデータを $2f_m$ -cut の dominant wave に関して crest-to-crest 法で定義される波高 H_c および周期 T_c の分布を求め、これと Longuet-Higgins の理論とを比較した。結果が図-5に示されている。測定された H_c および T_c の分布と理論との一致はかなり良好である。raw data および $2f_m$ -cut の dominant wave の H_z , T_z および H_c , T_c の分布が $F=585$ cm および $U=10$ m/sec に対して図-6および図-7に示されている。Longuet-Higgins の理論と実測値との一致はかなり広範囲で良好であることがこれらの図からわかる。

次に、 $2f_m$ -cut あるいは $3f_m$ -cut の dominant wave の平均波高、平均周期、有義波高および有義周期といった各種の統計量が raw data の統計量とどの程度くいちがうかを次に調べた。その結果の数例が表-1にまとめられている。

この表の数値は raw data の統計量で無次元化された値である。この結果から次のようなことがわかる。

(1) 波高および周期を zero-up cross 法で定義すれば平均波高 $\bar{H}$, 有義波高 $H_{1/3}$ および有義周期 $T_{1/3}$ は、数%の増減はあるけれども、 $2f_m$ -cut あるいは $3f_m$ -cut の影響はほとんど受けない。特に、有義周期は統計的に安定している。これらの統計量 $\bar{H}$, $H_{1/3}$, $T_{1/3}$ に反して、平均周期 $\bar{T}$ は高周波成分を cut すれば、たとえ zero-up cross 法であっても増大する。

(2) $2f_m$ -cut あるいは $3f_m$ -cut の dominant wave に関しては、zero-up cross 法で定義される波高 H_z と crest-to-crest 法で定義され

る波高 $\bar{H}_c$ とは、 $\bar{H}_c$ がわずかに小さい傾向があるが、ほぼ同じ値となる。ただし、周期に関しては少しの違いを示す。

これらの結果は、平均周期が zero-up cross 法で定義されたとしても、使用する波高計の応答特性あるいはサンプリングタムによりかなり変化する可能性があることを示している。平均周期は統計的に不安定である。

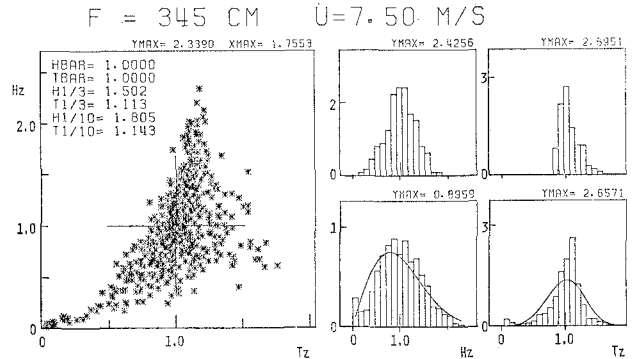


図-4 Raw Data の波高 H_z と周期 T_z の分布 (曲線、波高: Rayleigh, 周期: T^2 -Rayleigh)

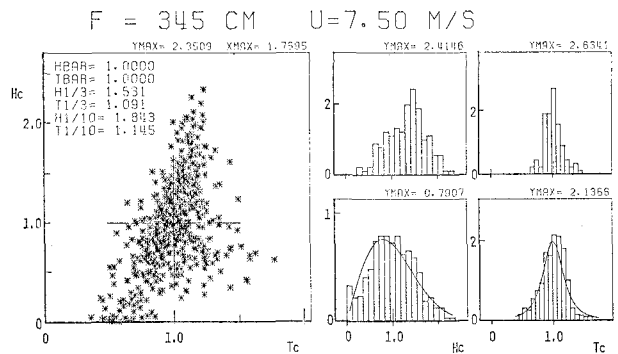


図-5 $2f_m$ -cut の Dominant Wave の波高 H_c と周期 T_c の分布 (曲線、波高: Rayleigh, 周期: Longuet-Higgins の理論)

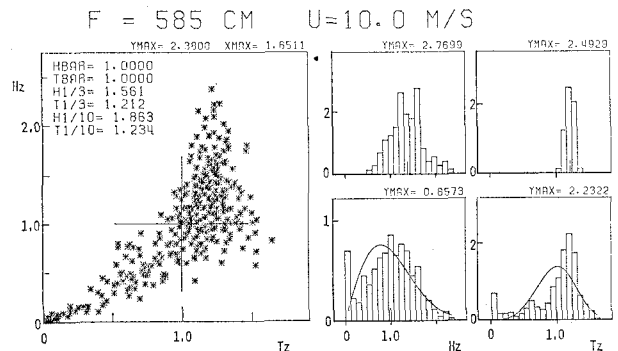


図-6 Raw Data の波高 H_z と周期 T_z の分布 (曲線、波高: Rayleigh, 周期: T^2 -Rayleigh)

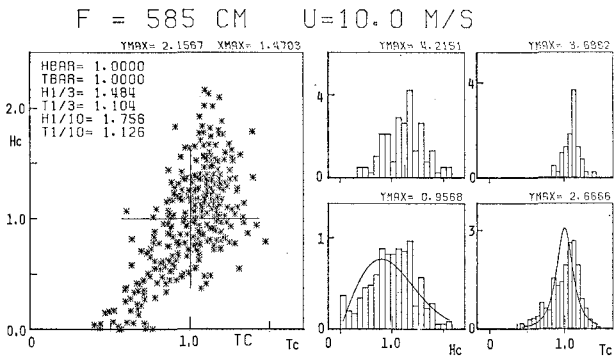


図-7 2fm-cut の Dominant Wave の波高 Hc と 周期 Tc の分布 (曲線, 波高: Rayleigh, 周期: Longuet-Higgins の理論)

表-1 統計量の変化

F=345 cm, U=5 m/sec							
	$\overline{H}$		$H_{1/3}$		$\overline{T}$		$T_{1/3}$
	H_z	H_c	H_z	H_c	T_z	T_c	T_z T_c
raw data	1.00	0.87	1.00	0.57	1.00	0.35	1.11 0.43
3fm-cut	1.07	0.93	0.98	0.94	1.22	1.06	1.00 0.99
2fm-cut	1.06	0.99	0.96	0.94	1.25	1.17	1.01 0.99

F=585 cm, U=10 m/sec							
raw data	1.00	0.17	1.00	0.28	1.00	0.15	1.00 0.18
3fm-cut	1.08	0.99	0.99	0.97	1.15	1.04	1.01 0.99
2fm-cut	1.06	1.00	0.96	0.95	1.17	1.11	1.02 1.01

F=825 cm, U=15 m/sec							
raw data	1.00	0.10	1.00	0.16	1.00	0.076	1.00 0.077
3fm-cut	1.10	0.96	1.94	9.92	1.25	1.09	1.01 0.98
2fm-cut	1.06	1.00	1.90	0.90	1.27	1.21	1.01 1.00

Raw Data の統計量で無次元化

最後に Rice⁴⁾ の理論より求められる特性周期と実測された周期との比較を行なった。Rice の理論によると, zero-up cross 法で定義される平均周期 $(\overline{T_z})_R$ および crest-to-crest 法で定義される平均周期 $(\overline{T_c})_R$ はスペクトルのモーメントから次のように求まる。

$(\overline{T_z})_R = \sqrt{m_0/m_2}, (\overline{T_c})_R = \sqrt{m_2/m_4}$

ここで, m_n はスペクトルの n 次のモーメントである。ただし, 2fm-cut あるいは 3fm-cut の dominant wave に関するモーメント計算においては, 積分範囲は 2fm あるいは 3fm にそれぞれ限定される。スペクトルのモーメントから計算されるスペクトル幅パラメータ $\epsilon_s = \sqrt{1 - m_2^2/m_0m_4}$ と波高の周期の比から計算

されるスペクトル幅パラメータ $\epsilon_r = \sqrt{1 - (\overline{T_c}/\overline{T_z})^2}$ との比較も同時に行なった。これらの結果が 表-2 に示されている。

この結果から次のようなことがわかる。

(1) 2fm-cut の dominant wave に関しては Rice の理論が十分な精度で成立している。すなわち, スペクトルのモーメントから求めた特性周期と波形から直接求めた平均周期とはほとんど一致している。

(2) 波形より求めた特性周期をもとにして計算した ϵ_r とスペクトルのモーメントをもとにして計算した ϵ_s とはかなりのくい違いを示す。

(1) と (2) の結果は一見矛盾するように見える。これは次のような事情によるものである。今 $x = \overline{T_c}/\overline{T_z}$ とすると, $\epsilon = \sqrt{1 - x^2}$ である。従って,

$|\Delta\epsilon/\epsilon| \sim (\overline{T_z}/\overline{T_c})^2/\epsilon^2$

となる。相対誤差 $\Delta\epsilon/\epsilon$ は ϵ^{-2} に比例する。 $\epsilon=1$ 付近

表-2 Rice の理論との比較

F=325 cm, U=5 m/sec						
	$(\overline{T_z})_R/\overline{T_z}$	$(\overline{T_c})_R/\overline{T_c}$	$(\overline{T_c}/\overline{T_z})_R/(\overline{T_c}/\overline{T_z})$	ϵ_r	ϵ_s	ϵ_s/ϵ_r
raw data	0.91	0.64	0.703	0.966	0.969	1.00
3fm-cut	1.00	0.96	0.964	0.498	0.549	1.10
2fm-cut	1.01	1.00	0.985	0.344	0.378	1.10

F=585 cm, U=10 m/sec						
raw data	0.82	0.58	0.703	0.984	0.995	1.01
3fm-cut	0.97	0.88	0.904	0.426	0.572	1.34
2fm-cut	1.00	0.98	0.973	0.317	0.383	1.21

F=825 cm, U=15 m/sec						
raw data	0.62	0.63	1.009	0.997	0.997	1.00
3fm-cut	0.95	0.85	0.890	0.486	0.628	1.29
2fm-cut	1.00	0.95	0.951	0.320	0.434	1.36

(添字 R: Rice の理論から求めた値, $\epsilon_s = \sqrt{1 - m_2^2/m_0m_4}$, $\epsilon_r = \sqrt{1 - (\overline{T_c}/\overline{T_z})^2}$)

では、スペクトルから求めた ϵ_s と波形から直接求めた ϵ_r とはほぼ等しい。 ϵ が小さくなって、 $\epsilon=0$ 付近になると ϵ^{-2} に比例してその相対誤差は急激に増幅される。例えば、 $\epsilon=0.4$ 付近では、周期の比が 5% 異なれば、 ϵ の計算の結果においては 30% の違いとなって現われる。こういう意味からも、このスペクトル幅パラメータ ϵ は使いにくいパラメータの 1 つである。

しかしながら、 ϵ の値が小さい時には、Cartwright and Longuet-Higgins⁶⁾ の極大値の分布に関する理論曲線は ϵ の値によりあまり大きな変化がない。したがって、スペクトルから計算される ϵ_s あるいは周期の比から計算される ϵ_r のいずれを使用したとしても、極大値の分布曲線にはあまり違いがでてこない。

謝 辞

本実験の遂行およびデータ整理に際しては、本研究所の江藤賢次技官の全面的な協力を得た。データ整理の過程においては田中道芳技官の協力を得た。ここに記して

感謝の意を表します。なお、データの解析には本研究所に設置されている電子計算機 FACOM 230-48 が使用された。

参 考 文 献

- 1) 合田良実・永井康平： 港湾技術研究所報告, Vol. 13, No. 1, 1974, pp. 3-37.
- 2) Longuet-Higgins, M.S.: J. Geophys. Res. Vol. 80, No. 18, 1975, pp. 2688-2694.
- 3) 光易 恒・本多忠夫： 第 19 回海岸工学講演会論文集, 1972, pp. 119-123.
- 4) Rice, S.O.: The Bell System Technical Journal, Vol. 23, 1944, pp. 282-332 and Vol. 24, 1945, 46-156 pp.
- 5) Mitsuyasu, H. and T. Honda: Rep. Res. Inst. Appl. Mech. Kyushu Univ., Vol. 24, No. 76, 1976, pp. 31-48.
- 6) Cartwright, D.E. and M.S. Longuet-Higgins: Proc. Roy. Soc. A237 (1209), 1956, pp. 212-232.