

津波の遡上に関する数値解析

首 藤 伸 夫*・後 藤 智 明**

1. 序

津波や高潮は、我国の沿岸地方にしばしば災害をもたらすにもかかわらず、現状ではそのもっとも重要と思われる陸上へのうちあげを容易に計算することは困難である。これは、波の先端がかわいた陸上へおしあがるということ、そして波がひくとき海底があらわれることを容易に表現できないためである。

そこで、筆者らは移動する水粒子に固定した物質座標による表現、つまり Lagrange 風に現象をみつめることによって考えることにする。

このような津波の遡上の問題を物質座標系によって考える利点は、まず第一に、海底の露出や陸上地形の複雑さなどを容易に満足せしめうることである。静水時水底に存在した水粒子は、水底を離れることはないというのが水底での条件になり、陸上へのうちあげの最先端に存在する水粒子は、静水時汀線に存在した水粒子である。

第二に、二次元問題への拡張が容易であることがあげられる。津波の遡上に関する問題においては、単に水路幅の変化に対応する項を基礎式に加えることにより、平面的広がり効果を十分に計算できる地形は少なく、やはり普遍的には二次元問題として解く必要がある。この物質座標系で考えると平面的広がりのある複雑な陸上および海底の地形を水深という表現で安易に考慮できるのである。さらに津波の陸上へはいあがったときの樹木や家屋など地物の水流に対する抵抗、いわゆる津波の先端付近での抵抗の導入も可能と思われ、将来性のある方法であるということがいえるであろう。

また、地形の形状が簡単な次元問題の場合には、波の細部の挙動は多少異なるかもしれないが、最大のうちあげ高については、物質座標による線型理論と空間座標による浅水理論とが同一の解を与えることがわかって¹⁾いる。津波による災害においてもっとも重要と考えられているのは最大のうちあげ高であり、この物質座標による線型理論で解決できる問題は数多くあると思われる。

まず、一次元問題として任意の海底形状における長波の第一次近似式を求める。水路幅の変化、海底摩擦を入れることも可能であるが、ここでは省略する。今回は、物質座標による長波近似式を数値計算する場合の安定性、収束性および境界条件を研究することを主目的とするからである。したがって、波形変化に影響する地形の変化は、もっぱら水深の変化によるものだけである。また、海底摩擦を省略することは、現象を大きく見積ることになっている。

数値計算法としては有限差分法を採用した。沖合の入力地点、すなわち沖の境界条件と汀線における境界条件を基本式から導き、理論解の存在する簡単な地形形状の場合について計算を実施した。

この結果、理論値と非常に良い一致をすることがわかり、この数値計算が実用になることが明らかになった。

最後に、実海岸の例として一次元計算がほぼ可能と思われる三陸地方普代海岸の現地地形を用いて計算を実施した。

2. 物質座標による線型理論

図—1 に示すような水域において、 (a, b) を物質座標とし、 (x, y) をそれからの水粒子の変位を表すものとする。図における丸印は仮想的な水粒子を意味する。物質座標系による長波の第一次近似²⁾において連続の式は

$$\frac{\partial x}{\partial a} + \frac{\partial y}{\partial b} = 0 \quad \cdots \cdots (1)$$

運動の式は

$$\frac{\partial^2 x}{\partial t^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial a} + g \frac{\partial y}{\partial a} = 0 \quad \cdots \cdots (2)$$

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial a} - g \frac{\partial x}{\partial a} = 0 \quad \cdots \cdots (3)$$

である。ここで、 p は圧力、 ρ 、 g はそれぞれ密度および重力加速度である。

水底での条件は、図—1 に示すように静水時水底つまり座標 $(a, -h(a))$ に存在した水粒子の変位およびその地点の水深を使って

$$b = -h(a) \quad \text{で} \quad y = h(a) - h(a+x) \quad \cdots \cdots (4)$$

* 正会員 工博 東北大学教授 土木工学科

** 学生会員 中央大学大学院 理工学研究所

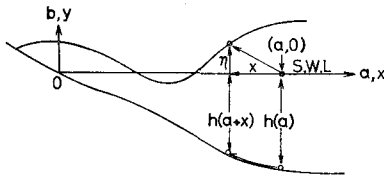


図-1 座 標 系

表わされる。水表面での条件は

$$b=0 \quad \text{で} \quad p=0 \quad \cdots \cdots (5)$$

$$b=0 \quad \text{で} \quad y=\eta \quad \cdots \cdots (6)$$

となる。ここで、 η は静水時座標 $(a, 0)$ に存在した水粒子の鉛直変位を表わし、空間座標系における波形に対応する。以下これを波形と呼ぶ。

連続の式を b について $-h(a)$ から b まで積分し、水底の条件を適用すると、

$$y = - \int_{-h(a)}^b \frac{\partial x}{\partial a} db - h(a+x) + h(a) \quad \cdots \cdots (7)$$

鉛直方向の運動の式を b について 0 から b まで積分し、表面の圧力条件を適用すると

$$p = \int_0^b \frac{\partial x}{\partial a} db \quad \cdots \cdots (8)$$

となる。式 (7), (8) から

$$\frac{1}{\rho} p + gy = \int_0^{-h(a)} \frac{\partial x}{\partial a} db - h(a+x) + h(a) \quad \cdots \cdots (9)$$

となる。もし x が a, b, t の関数であったとしても、 $p/\rho + gy$ は a, t の関数である。(9) 式を水平方向の運動の式に代入して

$$\frac{\partial^2 x}{\partial t^2} + g \frac{\partial}{\partial a} \left[\int_0^{-h(a)} \frac{\partial x}{\partial a} db - h(a+x) + h(a) \right] = 0 \quad \cdots \cdots (10)$$

が成立するためには、 x も a, t のみの関数でなければならない。したがって

$$\frac{\partial^2 x}{\partial t^2} + g \frac{\partial}{\partial a} \left[-h(a) \frac{\partial x}{\partial a} - h(a+x) + h(a) \right] = 0 \quad \cdots \cdots (11)$$

となる。次に、式 (7) に式 (6) の条件を適用すると

$$\eta = -h(a) \frac{\partial x}{\partial a} - h(a+x) + h(a) \quad \cdots \cdots (12)$$

が求まる。

この2式が任意の海底形状における物質座標系による線型理論式であり、この2式を数値計算すればよいのである。

3. 数 値 計 算

(1) 数値計算式

基本式である偏微分方程式の解法としては、高潮計算

などによく使われる有限差分法を採用した。式 (11), (12) の陽差分式は

$$\begin{aligned} x_{i,j+1} &= 2x_{i,j} - x_{i,j-1} \\ &+ \frac{1}{4} g \left(\frac{\Delta t}{\Delta a} \right)^2 [h(a_{i+1}) - h(a_{i-1})] \\ &\times [x_{i+1,j} - x_{i-1,j}] + g \left(\frac{\Delta t}{\Delta a} \right)^2 h(a_i) \\ &\times [x_{i+1,j} - 2x_{i,j} + x_{i-1,j}] + g \frac{(\Delta t)^2}{2\Delta a} \\ &\times [h(a_{i+1} + x_{i+1,j}) - h(a_{i-1} + x_{i-1,j})] \\ &- g \frac{(\Delta t)^2}{2\Delta a} [h(a_{i+1}) - h(a_{i-1})] \quad \cdots \cdots (13) \end{aligned}$$

および

$$\begin{aligned} \eta_{i+1,j+1} &= -\frac{1}{2\Delta a} h(a_i) [x_{i+1,j+1} - x_{i-1,j+1}] \\ &- h(a_i + x_{i,j+1}) + h(a_i) \quad \cdots \cdots (14) \end{aligned}$$

となる。ここで Δa および Δt はそれぞれ計算の格子間隔そして時間間隔である。

図-2 には、式 (13) を使って計算する方向をしめしてある。時間ステップ j までの値から $j+1$ ステップへの計算方向である。波形 η は、式 (14) を用いて各ステップで水平方向変位 x を計算した後その値を使って計算すればよい。

式 (11) は、水深による変化はあっても基本的には双曲型である。したがって、Courant-Friedrichs-Lewy の安定条件

$$\Delta a \geq \sqrt{2gh_{\max}} \Delta t \quad \cdots \cdots (15)$$

で $\Delta a, \Delta t$ を定めればよいことになる。ここで、 $h_{\max}$ は計算領域における最大の水深である。

(2) 計算領域

計算領域については、斜面部における反射を考慮した波を沖の境界条件に与えることは困難であるため、反射の影響が沖の入力地点に到達するまでの時間と重複波によるうちあげを考え、汀線から水平距離 20 km としている。

なお、沖水深は、実際の水深の如何にかかわらず、計

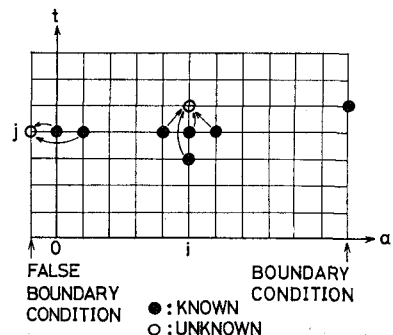


図-2 計 算 方 向

算上は一様水深（ここでは 40m）としてある。したがって、そこでの計算結果は、実際の外海における津波とただちに対応するものではない。

(3) 初期条件・境界条件

初期条件としては、時間の原点において静水面の条件を与える。つまり

$$t \leq 0 \quad (j \leq 0) \quad \text{で} \quad x = 0 \quad \dots\dots\dots (16)$$

として考える。

波形を入力する沖合においては、先に述べたように水平底を仮定する。したがって、基本式は簡単に

$$\frac{\partial^2 x}{\partial t^2} - gh \frac{\partial^2 x}{\partial a^2} = 0 \quad \dots\dots\dots (17)$$

$$\eta = -h \frac{\partial x}{\partial a} \quad \dots\dots\dots (18)$$

となる。ここで、 h は沖の水深を意味し一定値である。

いま速度 $\sqrt{gh}$ で水平軸の負の方向へ進行する波を考えると、式 (17) の解は f を任意関数として

$$x = f(a + \sqrt{gh}t)$$

で与えられる。これを式 (17), (18) に代入することにより

$$\frac{\partial x}{\partial t} = -\frac{\sqrt{gh}}{h} \eta \quad \dots\dots\dots (19)$$

なる関係が得られる。

沖側の境界を表わす格子点を $i = m$ で表わし式 (19) を差分化すると

$$x_{m,j+1} = x_{m,j-1} - 2\Delta t \frac{\sqrt{gh}}{h} \eta_{m,j} \quad \dots\dots\dots (20)$$

となる。初期条件から $j = 0$ まで静水状態であったとするとこの式は

$$\left. \begin{aligned} x_{m,2n} &= -2\Delta t \frac{\sqrt{gh}}{h} [\eta_{m,1} + \eta_{m,2} \\ &\quad + \dots\dots + \eta_{m,2n-1}] \\ x_{m,2n+1} &= -2\Delta t \frac{\sqrt{gh}}{h} [\eta_{m,2} + \eta_{m,4} \\ &\quad + \dots\dots + \eta_{m,2n}] \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots\dots (21)$$

と簡単に表わすことができる。したがって波形の時間的変化を定めると、式 (21) を使って沖合の境界条件を与えることができる。

また、波形を三角関数など容易に積分できるものに考えられるときは、式 (19) を直接積分して境界条件を定めてもよい。

(3) 仮想汀線境界条件

図-2 にしめしてあるように、時間軸の方向へ計算を進める場合は汀線における境界条件が必要となる。もし汀線の境界条件がないときは、沖側の境界条件の方から汀線に向かって計算する方法が考えられる。しかし、先に述べたように沖の境界条件において反射の影響を考慮

することが困難であり、進行波のみの条件にすると斜面において反射がまったく起こらず不都合な結果となる。

差分式 (14) は汀線において、静水時汀線を表わす格子点を $i = 0$ とすると

$$\eta_{0,j} = -h(x_{0,j}) \quad \dots\dots\dots (22)$$

となる。これが汀線における条件である。静水時汀線に存在した水粒子は、地形の形状にそって地表上を移動することを意味している。

いま、汀線から微小距離 Δa だけ離れた沖側および陸側の格子点をそれぞれ $i = 1, i = -1$ であらわす。汀線と $i = 1$ の格子点の中間点 $i = 1/2$ においては

$$\begin{aligned} \eta_{1/2,j} &= -h\left(\frac{\Delta a}{2}\right) \frac{1}{\Delta a} [x_{1,j} - x_{0,j}] \\ &\quad - h\left(\frac{\Delta a}{2} + x_{1/2,j}\right) + h\left(\frac{\Delta a}{2}\right) \end{aligned}$$

である。これを Taylor 展開を使って汀線での値であらわすと

$$\begin{aligned} \eta_{0,j} + h(x_{0,j}) + \frac{\Delta a}{2} \frac{\partial}{\partial b} [\eta_{0,j} + h(x_{0,j})] \\ = -\frac{1}{2} \frac{\partial h(0)}{\partial a} [x_{1,j} - x_{0,j}] \\ - \frac{\Delta a}{2} \left[\frac{\partial x_{0,j}}{\partial a} \frac{\partial h(x_{0,j})}{\partial a} - \frac{\partial h(0)}{\partial a} \right] \end{aligned}$$

となる。ここで汀線における条件式 (22) を適用すると

$$\begin{aligned} \frac{\Delta a}{2} \left[\frac{\partial x_{0,j}}{\partial a} \frac{\partial h(x_{0,j})}{\partial a} - \frac{\partial h(0)}{\partial a} \right] \\ = -\frac{1}{2} \frac{\partial h(0)}{\partial a} [x_{1,j} - x_{0,j}] \end{aligned}$$

となる。同様にして汀線と $i = -1$ の中間点 $i = -1/2$ について考えると

$$\begin{aligned} \frac{\Delta a}{2} \left[\frac{\partial x_{0,j}}{\partial a} \frac{\partial h(x_{0,j})}{\partial a} - \frac{\partial h(0)}{\partial a} \right] \\ = -\frac{1}{2} \frac{\partial h(0)}{\partial a} [x_{0,j} - x_{-1,j}] \end{aligned}$$

となり、この両式から

$$x_{-1,j} = 2x_{0,j} - x_{1,j} \quad \dots\dots\dots (23)$$

が求まる。これが汀線における仮想条件である。

(4) 計算結果

このようにして簡単な地形形状について計算した波形の一例が 図-3 である。縦横の縮尺比は 1 : 2000 と大きく歪ませてあり、斜面の勾配は 1/50 である。先端部と中央部に小さな振動がある。中央部の振動は斜面と水平底の結合部で発生しており水粒子の運動方向が急に変わるためであろうと考えられる。先端部については今後検討を必要とするが、図の歪みから考えて大した問題とは思われない。

このような計算を数例実施したが、その結果を理論解³⁾と比較したものが 図-4 である。非常に良い一致を示している。このことから、差分式や格子間隔の妥当

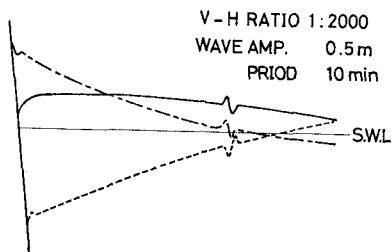


図-3 計算例その1

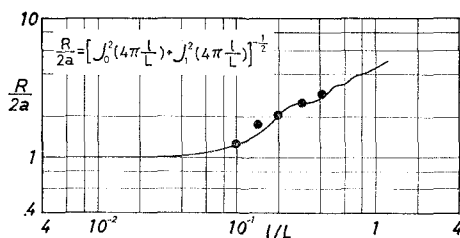
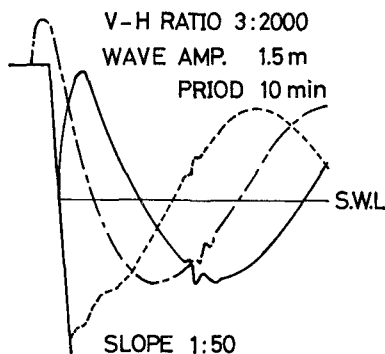
● 数値計算 — 理論
図-4 理論値との比較

図-5 計算例その2

性、境界条件の設定が正しかったことが証明された。

図-5 は陸地側の地形形状が水平部と 1/50 の斜面が組み合わされたものである。興味深い結果になった。

4. 普代海岸の例

普代海岸の形状をしらべると、水深約 7m 以深はほぼ 1/40 の勾配であり、汀線付近で 1/7 程度、陸上にあがってからは普代川の河道にそって平坦な流路が続く。この河道の両岸近くは急峻な山が迫っており、いくらか幅の変化があるにしても大きいものではない。このような

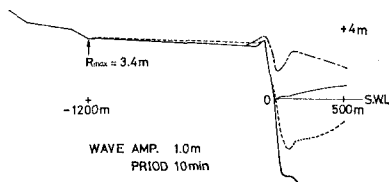


図-6 普代海岸の計算例

地形に対しては、ほぼ一次元計算が可能であると考えられる。

この地形について計算した例が 図-6 である。沖波の条件としては、半波高 1m および周期 10 分の正弦曲線を与えた。陸上の地形は河道にそって考えるのが本当であるが、河道についての資料が足りないため断面を平均してとってある。また、幅の効果はまったく考慮していない。

5. 結 論

物質座標による線型理論式を用いて、津波の遡上に関する数値解析を研究したが、計算上の各種条件などが理論解との比較で正しいことがわかった。また、普代海岸のような地形の複雑な場合においても実用になることがわかった。

残った問題は、二次元問題への拡張と海底および陸上における抵抗であるが、これらの解決の見通しはついていない。

なお、計算は、中央大学理工学部内 FACOM 230-48 および東京大学大型計算機センター HITAC 8800/8700 を使用した。

謝辞： この研究を行なうにあたり、文部省から科学研究費（研究代表者 東北大学岩崎敏夫教授）による補助を受けた。また、計算・整理にあたって、学部学生である古内弘通、石田辰美、紺野泰正、種子充の諸君の熱心な助力をえた。ここに記して謝意を表する。

参 考 文 献

- 1) Shuto, N.: Standing wave in front of a sloping dike, Proc. 13th Conf. on Coastal Eng., pp. 1629-1647, ASCE, 1972.
- 2) 前出 1).
- 3) 前出 1).