

エントロピー法によるスペクトル推定について

浜 中 建一郎*・川 村 裕**

1. ま え が き

エントロピー法によるスペクトル推定法（以下 MEM スペクトルと略す）は、与えられた有限個の自己共分散値からその情報エントロピーを最大にすることにより最も確からしいスペクトルを推定する方法として、John Parker Burg¹⁾により提案された。この方法は最終的には Yule-Walker 方程式を解くことに帰着するため以下 Y-W 法と略す。さらに Burg²⁾ は、有限個の共分散値そのものも、与えられたデータからより直接的に求める漸化的アルゴリズムを提示した。以下 BURG 法と略す。また、MEM と最尤法によるスペクトルとの簡明な関係も導いている³⁾。

MEM に関する研究はこれまで数多く発表されており、特に Andersen⁴⁾ は BURG 法の簡潔な計算プログラムを示しており、Urlych⁵⁾ は MEM の原理、計算アルゴリズム、FPE(赤池⁶⁾による Final Prediction Error) との関係等について詳しく論じている。また、日本においても、斎藤⁷⁾、日野⁸⁾により詳しい解説が発表されており、種々の分野に応用されつつある。

ここでは、初めに Y-W 法と BURG 法の違いにつき述べ、次に、3 種の特徴的なデータ（自己回帰過程—以下 AR、正弦波プラス正規乱数—以下 SW、移動平均過程—以下 MA）を発生させ、それらを Blackman-Tukey 法（以下 B-T 法）により求めたスペクトルとの比較により、MEM スペクトルの一般的特性を述べる。さらに、おのおののデータに対する FPE の特徴を調べ、最後に、一例ではあるが海岸工学への応用として、検潮記録による港内振動のスペクトルを示す。

2. Y-W 法と BURG 法との相違

MEM の原理については参考文献に譲り、ここでは結果だけを示す。いま、次式のようにして、 $M+1$ 個の自己共分散値が与えられたとする。時系列を $X_n, n=1, N$ として

$$\rho(k) = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N-k} (X_n - m)(X_{n+k} - m), \quad k=0 \cdots M, \\ m = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N X_n \quad \cdots \cdots \cdots (1)$$

MEM の原理から、スペクトルを $P(f)$ として

$$P(f) = \Delta t \sum_{k=-\infty}^{\infty} \rho(k) e^{-i2\pi f k \Delta t} \quad \cdots \cdots \cdots (2)$$

の制約のもとで

$$P(f) = \frac{\Delta t P_{M+1}}{\left| 1 - \sum_{k=1}^M a_k \exp(-i2\pi f k) \right|^2} \quad \cdots \cdots \cdots (3)$$

ただし、

$$\begin{pmatrix} \rho(0) & \rho(1) & \cdots & \rho(M) \\ \rho(1) & \rho(0) & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ \rho(M) & \cdots & \cdots & \rho(0) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -a_{M1} \\ \vdots \\ -a_{MM} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P_{M+1} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \quad \cdots \cdots \cdots (4)$$

この (4) 式の $a_{M1} \cdots a_{MM}, P_{M+1}$ を求める方法として Y-W 法と BURG 法がある。Y-W 法は Levinson の漸近関係を用いて 図-1 の如く求められる。それに対し BURG 法では、 $\rho(0)$ だけを (1) 式によって与え、あとは 図-2 の手順に従って求められる。MEM の原理からこの 2 つの手順を導くには次の関係が共に用いられて

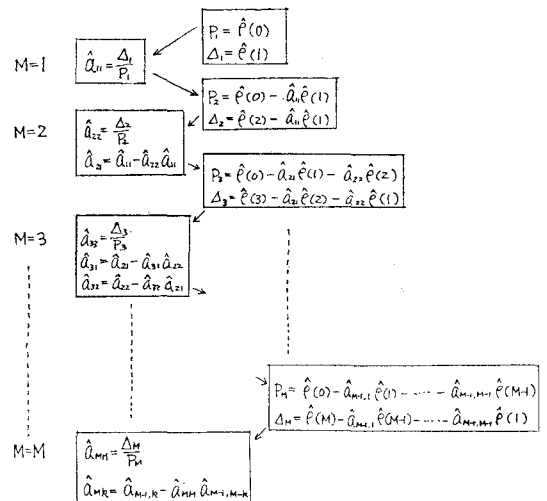


図-1 Y-W 法による AR 係数の推定

* 正会員 工修 北海道大学助手 工学部土木工学科

** モービル石油（株）大阪油槽所

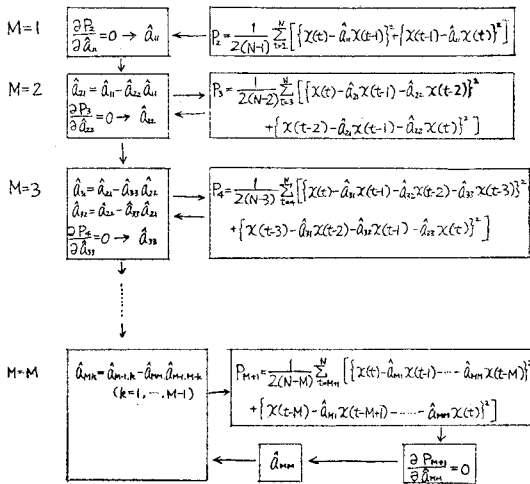


図-2 BURG 法による AR 係数の推定

いる。

$$\frac{P_{m+1}}{\partial a_{mm}} = 0 \text{ から } a_{mm} \text{ を求める} \quad \dots\dots\dots (5)$$

$$a_{mk} = a_{m-1}, \quad k = a_{mm} \cdot a_{m-1}, \quad m-k$$

$$k=1, \dots, m-1 \quad \dots\dots\dots (6)$$

$$P_{m+1} = P_m(1 - a_{mm}^2) \quad \dots\dots\dots (7)$$

$$\rho(k) = \sum_{j=1}^k \rho(k-j) a_{kj} \quad k=1, \dots, m \quad \dots\dots\dots (8)$$

このうち、(5) 式は最小 2 乗規範より求められ、(6)、(7)、(8) 式は (4) 式の Yule-Walker 方程式から導かれる。なお、BURG 法において (8) 式は直接スペクトル計算には必要ではなく、自己共分散の推定に用いられる。なお図中ハットは推定量を表わす。さて、図-1 において $\hat{a}_{mm} = \Delta_m / P_m$ は (5) 式の最小 2 乗規範から求められるのだが、 P_m は次式で与えられる。 E が期待値を表わすとして

$$P_{m+1} = E[X_{n+1} - a_{m1}X_n - \dots - a_{mm}X_{n+1-m}]^2 \quad \dots\dots\dots (9)$$

これに対し BURG 法では図-2 から明らかなように、 P_{m+1} を与えられたデータに直接予測式を走らすことにより求めている。すなわち両者の違いは、最小 2 乗規範を前者は確率空間で考えているのに対し、後者は時間空間で考えていることにある。別な見方をすると、データから直接推定する統計量として、前者は自己共分散値をとるのに対し、後者は予測 2 乗誤差をとることが異なっている。ここで BURG 法において予測式を前向きと後向きとに走らせているのは本質的なことではない。

3. 用いたモデルデータ

まえがきで述べた 3 種のモデルデータのうち AR モデルは次式による。ここで B は後方作用子とする

$$X_n = a_1 X_{n-1} + \dots + a_M X_{n-M} + \eta_n \quad \dots\dots\dots (10)$$

あるいは

$$(1 - A_1 e^{-i2\pi f_1 B}) \cdot \dots \cdot (1 - A_M e^{-i2\pi f_M B}) X_n = \eta_n \quad \dots\dots\dots (11)$$

ただし、 η_n は正規乱数で、 $A_k e^{-i2\pi f_k B}$ は (10) 式の特性方程式の根の逆数である。 X_n の分散は係数 $a_1, \dots, a_M$ と η_n の分散によって決まり、 X_n の分散を異なった係数の基でも一定値 (ここでは常に 1) にするには、与えられた係数を用いて (4) 式を逆に解くことにより $\rho(0)$ を求め、それが一定値になるよう η_n の分散を与えなければならない。

ここで用いたデータは 8 次の AR 式で、 $A_1 = A_2 = \dots = A_8 = 0.9$ および 0.99、 f_k は符号だけが異なるペアをなし、おのおの 0.05, 0.225, 0.275, 0.45 を用いた。

SW モデルは等振幅の 4 つの正弦波と正規乱数を加え、正弦波の周波数は 0.05, 0.2, 0.3, 0.45 とし、振幅は与えられた SN 比を満たし、かつデータの分散が 1 となるように与えた。

MA モデルは簡単のため矩形フィルターを用い、4 個と 8 個の移動平均とした。ここでもモデルの分散は 1。

4. MEM スペクトルの特徴

図-3 以後において、 N はデータの個数、 M は予測係数の個数 (推定次数) を表わす。また、 Δt は単位とする。

MEM スペクトルの分解能の良さは著者等の計算によっても確かめられたが、これまでも多くの研究の中に示されているため、ここでは図示しない。次に図-3 から

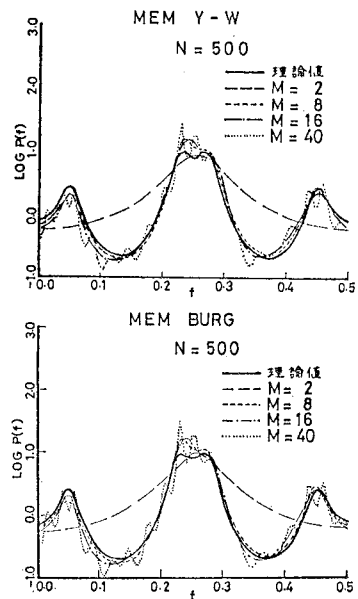


図-3 AR モデル ($A_k=0.9$) の MEM スペクトル

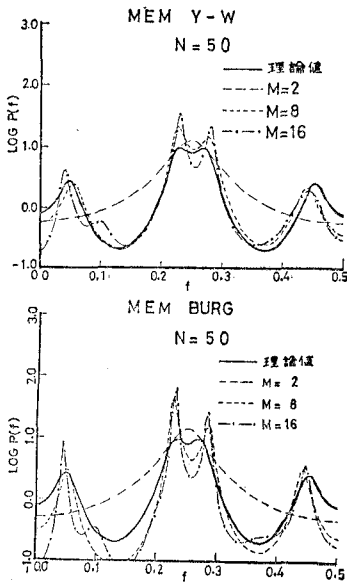
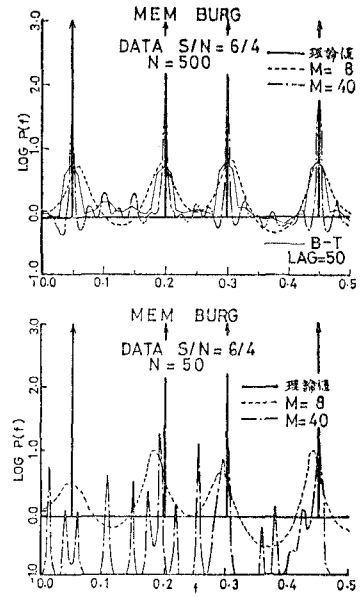
図-4 AR モデル ($A_k=0.9$) の MEM スペクトル

図-6 SW モデルの MEM スペクトルと B-T スペクトル

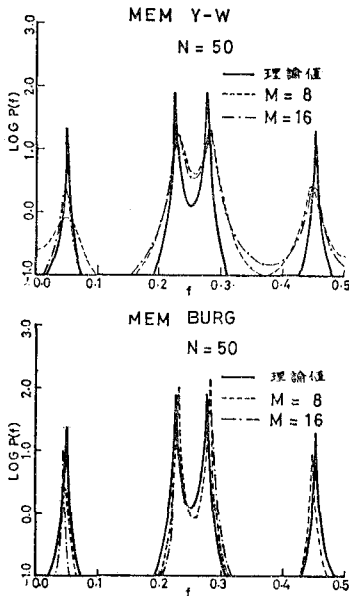
図-5 AR モデル ($A_k=0.99$) の MEM スペクトル

図-5 で表わされる他の一般的特徴として次のことがいえる。

- (a) データが長い程推定次数による影響が少ない。
(図-3, 4 の $M=8$ と $M=16$)。
- (b) 同じ推定次数のもとでデータを短くすると、よりピーキーな側に不安定となる (図-3, 4)。
- (c) Y-W 法と BURG 法とでは大きな差はないが、Y-W 法に比し、BURG 法はよりピーキーに推定される。したがって図-5 では BURG 法の方

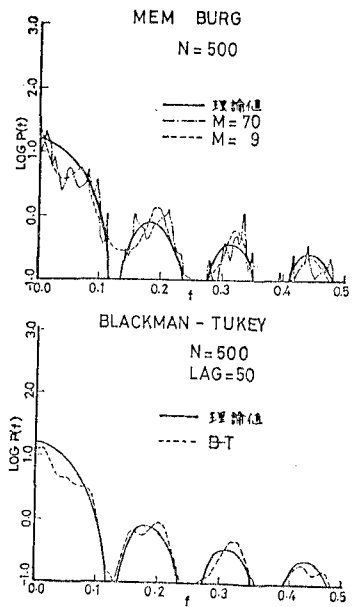


図-7 MA モデルの MEM スペクトルと B-T スペクトル

が Y-W 法より真値に近い。

- (d) 周期性の強いデータ程安定している

(図-4, 5 の $M=16$)。

ここで MEM の推定次数と B-T 法でのラグを対応させて考えてみると、(a) は当然のことと考えられるが、(b) と (d) は MEM の特徴と言えよう。また第2節において Y-W 法と BURG 法の理論的な相違を述べたが、

(c) はその具体的な表われであり、Y-W 法での共分散の推定式 (1) 式は、ラグに対し線形に減少する重みがかかっているが、BURG 法ではそのような重みは用いていないためである (重みの傾きが大きくなればなるほど、スペクトルは平坦になる)。

次に SW モデルについて述べる。周期性の強さを SN 比に置き換えると、SW モデル同士では上の (a)(b)(d) の性質を持つ (図は省略) が、SW モデルを無限大の周期性の強さを持つものとみなすなら上の性質は成り立たない (図-5, 6)。このことは、これまでの研究で指摘されているように、MEM は結果的には AR 過程の当てはめを行なっているに過ぎず、SW 過程は正弦波とノイズは独立であって、本質的に AR 過程では表わし得ないということに起因する。また B-T 法との比較で分解能の良さはピークの近傍ではいえるが、スペクトルの平坦な部分では必ずしも MEM が優れているとはいえない (図-6 の $M=40$)。

有限次の MA 過程は本質的に無限次の AR 過程である。このことから上に述べた、MEM が結果的には AR 過程の当てはめであるという制約により好しくない結果を生む。すなわち、AR モデルの所で述べた MEM の一般的性質から予測されることであるが、B-T 法との比較において、ピーキーなスペクトルを持つ MA モデルでは、データが短かくとも MEM スペクトルが B-T スペクトルより真値に近いこともあるが、平坦スペクトルの場合は B-T 法がより優れている (図省略)。図-7 は同程度の推定がなされたと思われる例である。

5. FPE の挙動

MEM においてその次数の決定については Burg 自身は何も述べていないが、実際の解析においては避け得ない問題である。赤池は AR 過程の当てはめ問題に関して、予測誤差の 2 乗平均として FPE を定義し、その最小値をとる次数を最適次数とした。ここではこれまで用

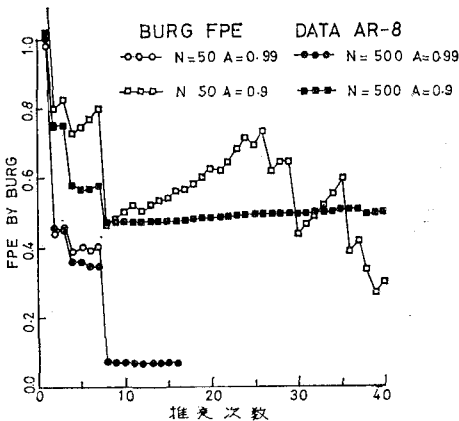


図-8 AR モデルに対する FPE

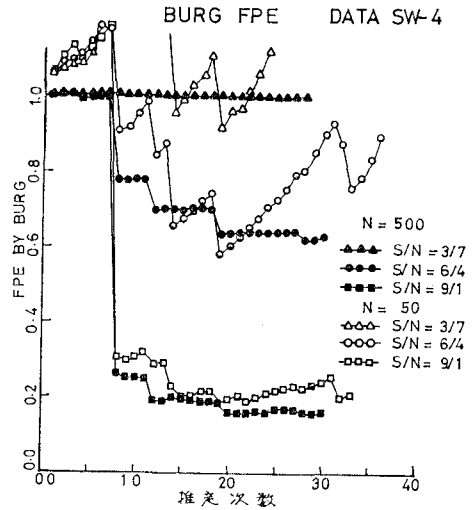


図-9 SW モデルに対する FPE

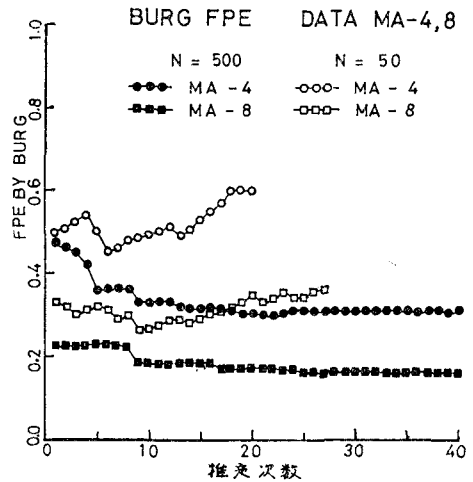


図-10 MA モデルに対する FPE

いた 3 種のモデルに対する FPE の挙動について述べる。

Y-W 法と BURG 法とでは FPE の挙動に大きな違いはないため BURG 法についてだけ図示した。図-8, 9 を見て明らかなように、おのおののモデルに明確な相違が見られる。

AR モデルでは大きく減少したあとあまり変化がないような点がかかりはつきりとわかる。図-3~5 からわかるように、それが最適次数を示す。ただし必ずしもそれが最小値ではない。これに対して、MA モデルではほとんど平坦であり、有効な最適次数決定は行ないがたい。また、SW モデルでは、SN 比が高い場合は AR モデルに似た動きを示すが、小さなステップ状にいつまでも下がる傾向がみられる。SN 比が低い場合には最適次数を決定することは不可能のようである。

これらの特徴から FPE を調べることににより逆に与えられたデータが特徴的な場合、その確率構造を予測することが可能と思われる。

6. 港内副振動の解析例

図-11 は昭和49年10月21日9時から26日9時までの苫小牧港の検潮記録をBURG法により求めたMEMスペクトルとFPEである。図中省略されているが、推定次数21から70まではほぼ平坦である。したがって、 $M=70$ では新たなピークがいくつか発生しているが、このままではそれらが有意なものであるかどうかはわからない。また、FPEの全体的な様子は前節で述べたARモデルとMAモデルの場合の中間的な変動を示している。このことから、自己回帰-移動平均型の確率

過程(AR-MA過程)へ発展させる必要性を感じさせる。

7. あとがき

Burgの行なった仕事は結果的には単にAR過程の当てはめにすぎないにしても、与えられた情報(与えられたデータ)から統計量としてのスペクトルへの一つの明確な道筋を示したことにある。また、エントロピー最大化の原理がなぜAR過程を導いたかという問に対する一つの消極的答えは、例えばMA過程の自己共分散関数はある有限なラグを越えると零になり、SW過程では余弦波としていつまでも続く。いま有限個の自己共分散値を与えられたとして、その後の共分散値をそのように推定することはあまりにも特殊すぎるであろう。

しかし、AR-MA過程とエントロピー原理との関係はいまだ不明であり、今後の大きな問題となろう。

参考文献

- 1) Burg, J. P.: Maximum entropy spectral analysis, paper Presented at the 37th Annual International Meeting, Soc. of Explor. Geophys., Okla., Oct. 31, (1967).
- 2) Burg, J. P.: A new analysis technique for time series data, paper presented at Advanced Study Institute on Signal Processing, NATO, Ensched, Netherlands, (1968).
- 3) Burg, J. P.: The relationship between maximum entropy spectra and maximum likelihood spectra, Geophysics, 37, 375~376 (1972).
- 4) Anderson, M.: On the calculation of filter coefficients for maximum entropy analysis, Geophysics, 33, 69~72 (1974).
- 5) Ulrych, T. J. & Bishop, T. N.: Maximum entropy spectral analysis and autoregressive decomposition, Review of Geophy. and Space Phy. 73, No. 1, 183~200 (1975).
- 6) Akaike, H.: Statistical predictor identification, Ann. Inst. Statist. Math., 22, 203~217.
- 7) 齊藤正徳: パワースペクトルを計算する新しい方法(2)-エントロピー法-, bit, No. 13, 4, 1219~1223 (1972).
- 8) 日野幹雄: 最大エントロピー法による新しいスペクトルの計算法, 土木学会誌, 7月号, 50~54 (1976).

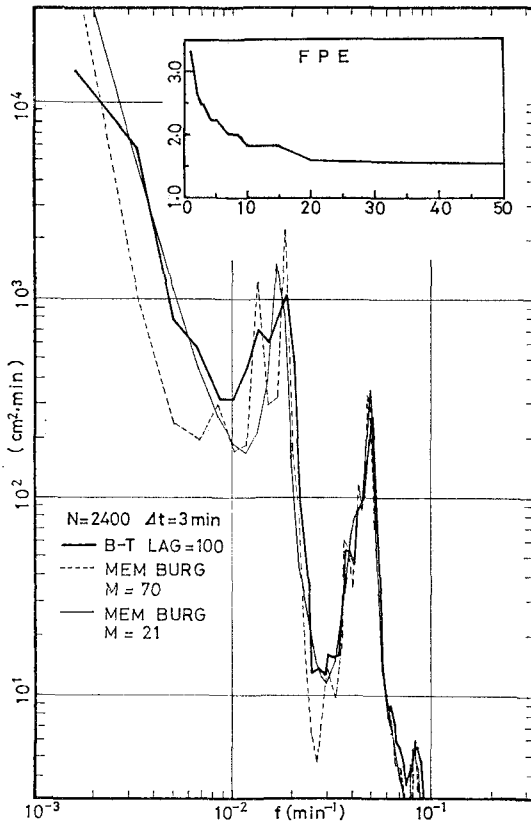


図-11 港内副振動のスペクトル