

Catastrophe 理論による砕波の試み

筒 井 茂 明*

1. 緒 言

非線形波動理論には、主として2つの流れがある。第1のものは、波動運動に対する流体力学の基礎方程式から摂動法により高次近似解を求める通常の方法¹⁾である。第2の方法は、等角写像により流体内部を複素平面上に写像して得られる微分、積分方程式の解として波動量を決定しようとするものである²⁾。砕波に関する理論^{3)~6)}は後者に属するものが多く、波頂での水粒子速度と波速あるいは重力の加速度との関係から極限波形を求めている。しかし、この方法は、一様水深の場合にのみ有効であり、斜面上の波を記述することはできない。一方、第1の方法は、一様水深および斜面上の波を取扱いうるはずであるが、高次近似解を求めても砕波波形を表現することはできないであろう。

このように、波の変形理論と砕波理論との間には一線が画されており、通常の波から砕波までの一連の波を記述することができる解析手法は、いまだ確立されていないようである。特に、沿岸漂砂や構造物の設計などの問題においては砕波に近い波の特性が非常に重要であり、これらの波動現象の解明が望まれている。

本研究は、このような一連の波を表示することができる方程式を、流体力学の基礎方程式から現象の物理的な解釈が容易な形で求め、波の変形に対する解析手法を研究しようとする1つの試みである。

さて、われわれが観測することのできる現象のほとんどは、何らかの安定性をもっていると考えられる。特に保存力の場における物理的な系を表わす力学系の場合には、ほとんどの状態がいずれかの沈点のたらい（吸引領域またはポテンシャルの井戸）の中にあり、その他の状態は“起りそうにない”⁷⁾。また、波動運動に対する基礎方程式は、変分原理⁸⁾により表現されることがわかっている。すなわち、基礎方程式は解曲面上での停留関数を定める式となっている。したがって、重力波を問題とする場合には、このポテンシャルの井戸の中で議論すれば十分であり、停留値付近での解曲面の局所的な形、すな

わち曲面のトポロジ的な特性が、このような系における運動の種々のタイプを定めると考えることができる。

このような曲面上での特異点のトポロジ的な特性とその構造安定性を問題とする理論として、R. Thom の Catastrophe の理論⁹⁾があり、その概要は次のとおりである。保存力の場における力学系のうち、勾配系の場合には、現象はポテンシャル関数（Catastrophe ポテンシャル）で表わされ、その現象内に不連続現象が発生する場合には、ポテンシャルの極小条件により定められ、さらにこのときのポテンシャルの局所的な型の分類が可能である、というものである。

以上のような観点から、波動運動に対する変分原理の汎関数である Lagrangian の積分が、Catastrophe ポテンシャルに対応することがわかる。したがって、この Lagrangian の積分あるいは Hamiltonian がどのような型のときに砕波現象を表わすことができるかを議論すればよいことになる。次章以下では、流体力学の基礎方程式から Lagrangian を求め、正準変換により対応する Hamiltonian を誘導し、この Hamiltonian は基礎方程式の解曲面（エネルギー曲面）となっており、ポテンシャルの井戸付近の曲面のトポロジ的な特性を上述の Catastrophe 理論により定めることにより、砕波現象を表現できることを示す。ただし、この理論は曲面の近似理論であるが、近似されたエネルギー曲面に対して波形全体が確定するもので、波形に対する局所的な近似理論ではない。また、ここでは、一様水深の場合について述べるが、それは斜面上の波の記述に対する基本となること、緩勾配の場合には一様水深に対する結果が適用可能であるなどの理由によるものである。

2. 基礎方程式に対する変分原理と Hamiltonian

(1) 浅海波に対する基礎方程式

一様水深 h の場合を考え、水底に原点を置き、水平および鉛直方向にそれぞれ x^* および z^* をとる。速度ポテンシャル ϕ^* 、水位変動 ζ^* 、時間 t^* および空間座標を式 (1) により無次元化すると、基礎方程式は式 (2) で与えられる。

* 正会員 工修 琉球大学助手 理工学部土木工学科

$$\begin{aligned}\phi &= \phi^*/h\sqrt{gh}, \quad x = x^*/h, \quad z = z^*/h, \\ t &= \sqrt{gh} \, t^*/h, \quad \zeta = \zeta^*/h \dots\dots\dots (1)\end{aligned}$$

$$\left. \begin{aligned}P^2\phi &= 0 \\ \phi_t + (1/2)(\phi_x^2 + \phi_z^2) + z - 1 &= 0, \quad z = \zeta \\ \zeta_t + \zeta_x\phi_x - \phi_z &= 0, \quad z = \zeta \\ \phi_z &= 0, \quad z = 0\end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (2)$$

ただし, g は重力の加速度である.

上式に対する変分原理¹⁰⁾は,

$$\left. \begin{aligned}\delta \int \int_R L dx dt &= 0 \\ L &= - \int_0^{\zeta} \left\{ \phi_t + \frac{1}{2}(\phi_x^2 + \phi_z^2) + z - 1 \right\} dz\end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (3)$$

である. ここに, R は (x, t) 空間での任意領域である.

式(2)の第1, 3および4式は変分 $\delta\phi$, 第2式は変分 $\delta\zeta$ により求められる. すなわち, 基礎方程式は, 関数空間における汎関数の停留条件となっている.

式(2)から水位変動のみで表わした浅海における波動方程式は, 次のようにして求められる. まず, Gardner-Morikawa 変換

$$\xi = \varepsilon^{1/2}(x - t), \quad \tau = \varepsilon^{3/2}t, \quad z = z, \quad |\varepsilon| \ll 1, \dots\dots (4)$$

を行ない, 水位変動および速度ポテンシャルに対して

$$\left. \begin{aligned}\zeta(x, t) &= 1 + \varepsilon\zeta_1(\xi, \tau) + \varepsilon^2\zeta_2(\xi, \tau) + \dots \\ &\equiv 1 + \varepsilon\zeta \\ \phi(x, z, t) &= \varepsilon^{1/2}\{\phi_1(\xi, \tau, z) \\ &\quad + \varepsilon\phi_2(\xi, \tau, z) + \dots\}\end{aligned} \right\} \dots\dots (5)$$

を仮定し, $z = \zeta$ での境界条件を $z = 1$ での条件で表示する. さらに, 土屋・安田¹¹⁾にならって, 式(2)を摂動する.

ここでは, permanent type wave を考えると, 特性曲線上で,

$$d\xi/d\tau = c_0 + \varepsilon c_1 + \varepsilon^2 c_2 + \dots = c^* = \text{const.} \dots\dots (6)$$

となるような波が存在する. したがって, 変換

$$\theta = \xi - c^*\tau \dots\dots\dots (7)$$

を用いると, 所要の方程式は次の常微分方程式で与えられる.

$$\left. \begin{aligned}-c^*\zeta_0 + (3/2)\zeta\zeta_0 + (1/6)\zeta_{000} &= -\varepsilon F_1(\zeta) \\ &\quad - \varepsilon^2 F_2(\zeta) - \dots, \\ F_1(\zeta) &= (1/15)\zeta_{00000} + (2/3)\zeta\zeta_{000} + (3/2)\zeta_0\zeta_{00} \\ &\quad + (3/2)\zeta^2\zeta_0 - (1/6)c^*\zeta_{000} - (5/2)c^*\zeta\zeta_0 \\ &\quad + (1/2)c^{*2}\zeta_0, \\ F_2(\zeta) &= (17/630)\zeta_{000000} + (2/5)\zeta\zeta_{00000} \\ &\quad + (4/3)\zeta_0\zeta_{0000} + 2\zeta_0\zeta_{000} + (15/2)\zeta\zeta_0\zeta_{00} \\ &\quad + (5/4)\zeta^2\zeta_{000} + (5/2)(\zeta_0)^3 + (9/4)\zeta^3\zeta_0 \\ &\quad - (1/15)c^*\zeta_{00000} - c^*\zeta\zeta_{000} - (7/2)c^*\zeta_0\zeta_{00} -\end{aligned} \right\}$$

$$\left. \begin{aligned}-6c^*\zeta^2\zeta_0 + (1/6)c^{*2}\zeta_{000} + 4c^{*2}\zeta\zeta_0 \\ - (1/2)c^{*3}\zeta_0, \\ \dots\dots\dots\end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (8)$$

(2) 変分原理と Lagrangian

式(8)に対する Lagrangian を求めるために, これをさらに変形する. すなわち, 式(8)より $\zeta_1, \zeta_2, \dots$ に対する第1, 2, $\dots$ 近似式を求め, 非同次項を変形したのちに, 辺々加えて整理すると, 次式が得られる.

$$\begin{aligned}-c^*\zeta_0 + (3/2)\zeta\zeta_0 + (1/6)\zeta_{000} \\ = \varepsilon\{(3/20)(\zeta_0^2)_0 - (3/10)(\zeta^3)_0 \\ + (21/10)c^*(\zeta^2)_0 - (19/10)c^{*2}\zeta_0\} \\ + \varepsilon^2\{(13/35)(\zeta\zeta_0^2)_0 - (73/210)c^*(\zeta_0^2)_0 \\ - (657/560)(\zeta^4)_0 + (15/14)c^*(\zeta^3)_0 \\ - (1/700)(4273c^{*2} - 894B_0)(\zeta^2)_0 \\ + (1/175)c^*(576c^{*2} - 298B_0)\zeta_0\} + \dots, \\ \dots\dots\dots (9)\end{aligned}$$

ただし, B_0 は積分定数である. 式(9)が変分原理に対する基礎方程式であり, 対応する Lagrangian は, 次のようにして求められる.

ポテンシャル表示,

$$\zeta = \varphi_\xi = \varphi_\theta, \quad \chi = \varphi_{\xi\xi} = \varphi_{\theta\theta} \dots\dots\dots (10)$$

を用いると, 式(9)は,

$$\begin{aligned}-c^*\varphi_{\theta\theta} + (3/2)\varphi_0\varphi_{\theta\theta} + (1/6)\chi_{00} \\ = \varepsilon\{(3/20)(\varphi_{\theta\theta}^2)_0 - (3/10)(\varphi_0^3)_0 \\ + (21/10)c^*(\varphi_0^2)_0 - (19/10)c^{*2}\varphi_{00}\} \\ + \varepsilon^2\{(13/35)(\varphi_0\varphi_{\theta\theta}^2)_0 - (73/210)c^*(\varphi_{\theta\theta}^2)_0 \\ - (657/560)(\varphi_0^4)_0 + (15/14)c^*(\varphi_0^3)_0 \\ - (1/700)(4273c^{*2} - 894B_0)(\varphi_0^2)_0 \\ + (1/175)c^*(576c^{*2} - 298B_0)\varphi_{00}\} + \dots, \\ \dots\dots\dots (11)\end{aligned}$$

となり, 式(10)および(11)がここで考える力学系であり, 以下では Lagrangian を問題としているので積分定数は0としてよいことが容易にわかる. 変分原理

$$\delta \iint L(x, x_\theta, \varphi_\theta, \varphi_{\theta\theta}) d\theta^2 = 0 \dots\dots\dots (12)$$

に対する Euler の方程式は,

$$\left. \begin{aligned}d(\partial L / \partial \chi_0) / d\theta - \partial L / \partial \chi &= 0 \\ d(\partial L / \partial \varphi_\theta) / d\theta - d^2(\partial L / \partial \varphi_{\theta\theta}) / d\theta^2 &= 0\end{aligned} \right\} \dots\dots (13)$$

となる. 式(10), (11)および(13)から所要の Lagrangian は次式で与えられる.

$$\begin{aligned}L &= -(1/6)\chi_0\varphi_\theta - (1/12)\chi^2 + L^* \\ L^* &= (1/2)c^*\varphi_0^2 - (1/4)\varphi_0^3 \\ &\quad + \varepsilon\{-(3/20)\varphi_0\varphi_{\theta\theta}^2 + (21/80)\varphi_0^4 \\ &\quad + (1/10)c^*\varphi_0^3 - (19/20)c^{*2}\varphi_0^2\} \\ &\quad + \varepsilon^2\{-(71/1400)\varphi_0^2\varphi_{\theta\theta}^2 + (73/210)c^*\varphi_0\varphi_{\theta\theta}^2 \\ &\quad - (99/2800)\varphi_0^5 - (157/175)c^*\varphi_0^4 \\ &\quad + (347/700)c^{*2}\varphi_0^3 + (288/175)c^{*3}\varphi_0^2\} + \dots, \\ &\dots\dots\dots (14)\end{aligned}$$

(3) Hamiltonian

次に、式 (14) に対する Hamiltonian を求める。 χ_θ , φ_θ および $\varphi_{\theta\theta}$ に共役な運動量をそれぞれ p, q および r とすると、正準変換は、

$$\left. \begin{aligned} p &= \partial L / \partial \chi_\theta = -(1/6)\varphi_\theta \\ q &= \partial L / \partial \varphi_\theta = -(1/6)\chi_\theta + \partial L^* / \partial \varphi_\theta \\ r &= \partial L / \partial \varphi_{\theta\theta} = \partial L^* / \partial \varphi_{\theta\theta} \end{aligned} \right\} \dots (15)$$

であるから、Hamiltonian は次のようになる。

$$\begin{aligned} H &= (1/4)\varphi_\theta^3 - (1/2)c^*\varphi_\theta^2 + q\varphi_\theta + (1/12)\chi^2 \\ &\quad - \varepsilon \{ (3/20)\varphi_\theta\varphi_{\theta\theta}^2 + (21/80)\varphi_\theta^4 \\ &\quad + (1/10)c^*\varphi_\theta^3 - (19/20)c^{*2}\varphi_\theta^2 \} \\ &\quad - \varepsilon^2 \{ (71/1400)\varphi_\theta^2\varphi_{\theta\theta}^2 - (73/210)c^*\varphi_\theta\varphi_{\theta\theta}^2 \\ &\quad - (99/2800)\varphi_\theta^5 - (157/175)c^*\varphi_\theta^4 \\ &\quad + (347/700)c^{*2}\varphi_\theta^3 + (288/175)c^{*3}\varphi_\theta^2 \} - \dots, \\ &\quad \dots\dots\dots (16) \end{aligned}$$

また、Hamilton の方程式は、

$$\left. \begin{aligned} d\chi/d\theta &= \partial H / \partial p, \quad d\varphi/d\theta = \partial H / \partial q, \\ d\varphi_\theta/d\theta &= \partial H / \partial r, \quad dp/d\theta = -\partial H / \partial \chi, \\ dq/d\theta &= -\partial H / \partial \varphi = 0, \\ dr/d\theta &= -\partial H / \partial \varphi_\theta \end{aligned} \right\} \dots (17)$$

となり、第5式から $q = \text{const.}$ が得られる。式 (16) は θ を陽に含んでいないので、基礎方程式 (11) の解曲面 (エネルギー曲面) となっていることがわかる。さらに、式 (16) は第1近似において Korteweg & de Vries 方程式のエネルギー曲面に等しい。したがって、式 (16) を物理変数 (ζ, ζ_θ) を用いて表示すると、エネルギー曲面は次式で与えられる。

$$\begin{aligned} H &= [(1/4) - (1/10)\varepsilon c^* - (347/700)\varepsilon^2 c^{*2} - \dots] \\ &\quad - \{(21/80) - (157/175)\varepsilon c^* - \dots\} \varepsilon \zeta \\ &\quad + \{(99/2800) - \dots\} \varepsilon^2 \zeta^2 - \dots \zeta^3 \\ &\quad - [(1/2) - (19/20)\varepsilon c^* \\ &\quad + (288/175)\varepsilon^2 c^{*2} - \dots] c^* \zeta^2 + q \zeta \\ &\quad + [(1/12) - \{(3/20) - (73/210)\varepsilon c^* + \dots\} \varepsilon \zeta \\ &\quad - \{(71/1400) - \dots\} \varepsilon^2 \zeta^2 - \dots] \zeta_\theta^2 \\ &\quad \dots\dots\dots (18) \end{aligned}$$

上式からわかるように、浅海における波動方程式に対するエネルギー曲面は、基本的には2変数 (ζ, ζ_θ) に関する3次式で近似される。

3. Catastrophe ポテンシャルとその特性

式 (18) の右辺第4項の ζ_θ^2 の係数 $[(1/12) - \dots] = 0$ となる $\varepsilon \zeta$ が存在するので、そのときには ζ_θ^2 は特異性を示し、砕波波形が得られる可能性がある。しかし、摂動パラメーター ε のオーダーが等しい項を等価とする従来の摂動論に基づく方程式系は、準線形化されているため、上述の特異性が有効に作用せず、砕波モデルとはならない。

一方、前述のように、式 (18) で与えられる Hamiltonian が波動運動に対する Catastrophe ポテンシャルである。2変数 (ζ, ζ_θ) で表わされるこの曲面は、真の解曲面の停留点付近における Taylor 近似であり、トポロジ的に重要な特性が保持されているものと考えられる。

R. Thom の Catastrophe 理論¹²⁾によると、2変数の3次式で表わされるポテンシャルの型には2種類あり、それぞれ次式で与えられる。

$$\left. \begin{aligned} \text{Hyperbolic umbilic :} \\ V_1 &= X^3 + Y^3 + a_1 XY + a_2 X + a_3 Y \\ \text{Elliptic umbilic :} \\ V_2 &= X^3 - XY^2 + a_1(X^2 + Y^2) + a_2 X + a_3 Y \end{aligned} \right\} \dots (19)$$

ここに、 a_1, a_2 および a_3 はパラメータである。

$(X, Y) \equiv (\zeta, \zeta_\theta)$ とすると、Hamiltonian が上式のいずれの型に属するかは、 $\zeta \zeta_\theta^2$ の係数の符号に左右される。しかるに、この係数は、

$$\begin{aligned} (3/20) - (73/210)\varepsilon c^* + \dots &\approx (2!/5!)(1+2^3) \\ &\quad - (4!/7!)(1+2^3+4^3)\varepsilon c^* + (6!/9!)(1 \\ &\quad + 2^3+4^3+6^3)\varepsilon^2 c^{*2} - \dots, \dots\dots\dots (20) \end{aligned}$$

となり、この級数は $|\varepsilon c^*| < 1$ で収束し、常に正值である。したがって、波動運動に対する Catastrophe ポテンシャルは Elliptic umbilic: V_2 であり、式 (18) は次式のように表示するのが妥当である。すなわち、式 (18) は、多様体上の力学系であるから、多様体のトポロジーが重要な役目を果たすので、 ε のオーダーから各項を比較するのではなく、2変数 (ζ, ζ_θ) で表わされる曲面の摂動として考えるべきであろう。

$$\begin{aligned} H &= \{(1/4) - (1/10)\varepsilon c^* - (347/700)\varepsilon^2 c^{*2} - \dots\} \zeta^3 \\ &\quad - \{(1/2) - (19/20)\varepsilon c^* + (288/175)\varepsilon^2 c^{*2} - \dots\} c^* \zeta^2 \\ &\quad + q \zeta + [(1/12) - \{(3/20) - (73/210)\varepsilon c^* \\ &\quad + (289/504)\varepsilon^2 c^{*2} - \dots\} \varepsilon \zeta] \zeta_\theta^2 + O(\zeta^4) \dots (21) \end{aligned}$$

4. 孤立波に対する砕波モデル

ここでは、式 (21) を用いて孤立波に対する解を求め、第1近似ではあるが、砕波モデルとなっていることを示す。孤立波に対しては、 $\zeta = 0$ のとき $\zeta_\theta = \zeta_{\theta\theta} = 0$ であるから $H = q = 0$ となる。式 (21) の両辺に ε^3 を乗じて、

$$\eta = \varepsilon \zeta, \quad \psi = x - (1 + \varepsilon c^*)t \dots\dots\dots (22)$$

とおくと、孤立波に対する基礎方程式は次のようになる。

$$\left. \begin{aligned} \{a_0(\varepsilon c^*) - \eta\} \eta_\theta^2 &= a_1(\varepsilon c^*) \{a_2(\varepsilon c^*) - \eta\} \eta^2 \\ a_0(\varepsilon c^*) &= (1/12) / \{(3/20) - (73/210)\varepsilon c^* \\ &\quad + (289/504)\varepsilon^2 c^{*2}\} \\ a_1(\varepsilon c^*) &= \{(1/4) - (1/10)\varepsilon c^* - (347/700)\varepsilon^2 c^{*2}\} / \\ &\quad \{(3/20) - (73/210)\varepsilon c^* + (289/504)\varepsilon^2 c^{*2}\} \end{aligned} \right\}$$

$$\begin{aligned} a_2(\varepsilon c^*) &= \varepsilon c^* \{ (1/2) - (19/20)\varepsilon c^* \\ &\quad + (288/175)\varepsilon^2 c^{*2} \} / \{ (1/4) \\ &\quad - (1/10)\varepsilon c^* - (347/700)\varepsilon^2 c^{*2} \} \\ &\dots\dots\dots (23) \end{aligned}$$

上式の解は容易に求められ、次式で与えられる。

Non-breaking Waves

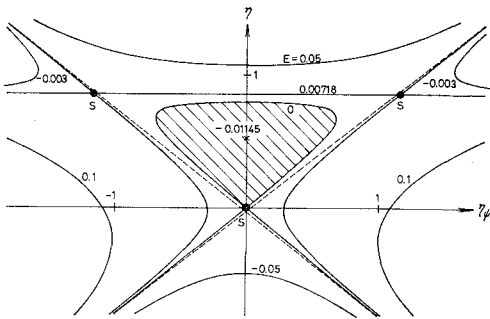
$$\begin{aligned} \eta &= a_0(\varepsilon c^*) \cdot (\alpha^2 - \beta^2) / (1 - \beta^2) \\ |\phi| &= \{ a_1(\varepsilon c^*) \cdot \log [\{ (\alpha + \beta) / \\ &\quad (\alpha - \beta) \}^{1/\alpha} \cdot (1 - \beta) / (1 + \beta)] \} \\ \alpha &= \{ a_2(\varepsilon c^*) / a_0(\varepsilon c^*) \}^{1/2} > \beta \end{aligned} \quad \dots\dots\dots (24)$$

Breaking Waves

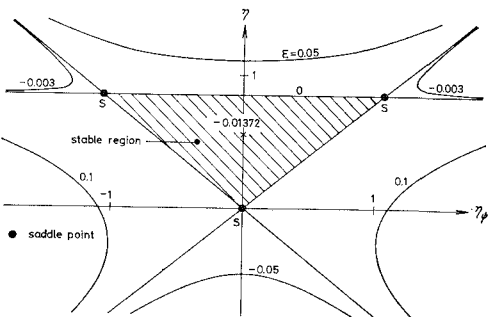
$$\eta = a_0(\varepsilon c^*) \cdot \exp [- \{ a_1(\varepsilon c^*) \}^{1/2} \cdot |\phi|], \dots\dots\dots (25)$$

$\eta = a_2(\varepsilon c^*)$ によって波速と波高の関係が得られる。この曲線と $\eta = a_0(\varepsilon c^*)$ の交点から砕波波高および波速が求められ、それぞれ $\eta_b = 0.8448$ および $C_b/\sqrt{gh} = 1.3514$ となる。このときの波頂角は約 87° である。

孤立波に対するエネルギー曲面の等位面とそのときの波形をそれぞれ図-1 および 2 に示す。エネルギー曲面の安定領域は、図中に斜線で示した領域である。この曲面上には、特異点である鞍点が3点存在し、原点に位置するものは、孤立波の特異点である無限遠点に対応することがわかる。また、 $\eta \rightarrow \eta_b$ のときには他の2つの鞍点が軌道上に接合し、これらは砕波波頂に対応している。しかし、このときの軌道は鞍点を結ぶ形となるので、波



(a) $\varepsilon c^* = 0.340$



(b) $\varepsilon c^* = 0.3514$

図-1 エネルギー曲面の等位面

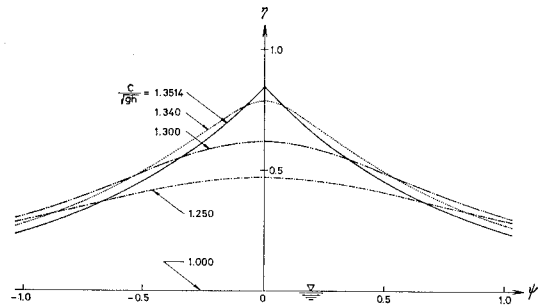


図-2 孤立波とその砕波波形 (波頂角 87°)

形は厳密な意味での砕波波形でなく、漸近的に近づく極限の波形を表わしていると考えらるべきであろう。

次に、水平および鉛直方向の水粒子速度は、それぞれ次式で与えられる。

$$\begin{aligned} u/\sqrt{gh} &= \Lambda - (z^2/2!) \Lambda_{\phi\phi} \\ &\quad + (z^4/4!) \Lambda_{\phi\phi\phi\phi} - \dots, \\ w/\sqrt{gh} &= -z \Lambda_{\phi} + (z^3/3!) \Lambda_{\phi\phi\phi} \\ &\quad - (z^5/5!) \Lambda_{\phi\phi\phi\phi\phi} + \dots, \end{aligned} \quad \dots\dots\dots (26)$$

ここに、

$$\begin{aligned} \Lambda &= \eta + \{ (1/2)\eta^2 - \varepsilon c^* \eta + (1/2)\eta_{\phi\phi} \} \\ &\quad + \{ (1/2)\eta^3 - (3/2)\varepsilon c^* \eta^2 + \varepsilon^2 c^{*2} \eta \\ &\quad - (1/2)\varepsilon c^* \eta_{\phi\phi} + \eta_{\phi}^2 + (3/2)\eta \eta_{\phi\phi} \\ &\quad + (5/24)\eta_{\phi\phi\phi\phi} \} + \dots\dots\dots (27) \end{aligned}$$

である。

式(26)は水粒子速度を与える一般式である。式(21)からわかるように関数の摂動項は $\varepsilon \xi = \eta$ であるから、上述の孤立波に対しては $\Lambda = \eta$ となる。したがって、波頂での水粒子速度は、

$$\begin{aligned} u/\sqrt{gh} &= \eta - (1/2!) \eta^2 \eta_{\phi\phi} \\ &\quad + (1/4!) \eta^4 \eta_{\phi\phi\phi\phi} - \dots, \quad w/\sqrt{gh} = 0, \quad \dots\dots\dots (28) \end{aligned}$$

となる。図-3 に波高と波速および波頂での水粒子速度の関係を示す。同図には各種の砕波限界および波速の近似式 $u/\sqrt{gh} = \sqrt{1+\eta}$ を併記する。波速はこの近似式と

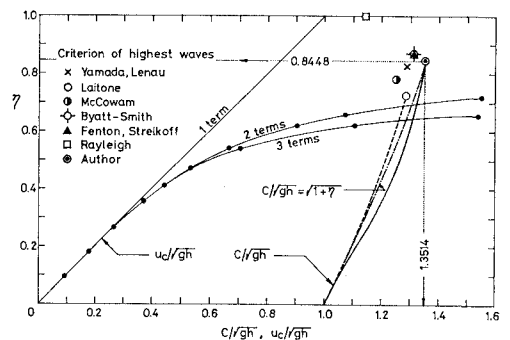


図-3 波高と波速および波頂での水平水粒子速度の関係

ほぼ同じであり、水粒子速度に対する式は、波高が小さいときには収束性が良いことがわかる。砕波に近い波における水粒子速度と波速との関係は、波動の内部構造と密接な関係がある¹³⁾が、上述のモデルにおける近似精度では十分な論議を行うことができず、今後より一層の研究が必要である。しかし、図-1 からわかるように、 $\eta \rightarrow \eta_b$ のときには3つの鞍点は等エネルギーレベルにあるから、このときにはエネルギーがポテンシャルの井戸からあふれることを示し、砕波の物理的な現象と同等である。したがって、上述のモデルは砕波モデルとなっていることがわかる。

5. 結 言

以上、通常の波から砕波までの一連の波を表現しうる砕波モデルを得るため、まず、摂動法によりエネルギー曲面である Hamiltonian を求め、Catastrophe 理論における Elliptic umbilic に対応することを示した。次に、この方程式を孤立波について解き、これが砕波モデルとなっていることを例示した。同様な取扱いはクノイド波に対しても進めることができるが、紙数の関係で省略する。しかし、このモデルは第1近似であるため数多くの問題が残されているが、関数のレベルを高めることにより改良されるであろう。事実、最近の研究¹⁴⁾によると高次の Elliptic umbilic が存在することがわかっており、このことも一助となるであろう。今後、より良い砕波モデルを構成し、砕波現象の解明を試みるとともに、斜面上の波についても論求していきたいと考えている。

最後に、本研究に際し終始温かい御指導・御鞭撻をいただいた京都大学防災研究所 土屋義人教授ならびに、本研究の機会を与えられた琉球大学理工学部 河野二夫教授に深謝の意を表する次第である。また、京都大学防災研究所 安田孝志助手から有益な御助言をいただいたことを記し、併せて感謝するものである。

参 考 文 献

- 1) Stokes, Laitone らの系列とその後の研究.
- 2) Nekrasov, Levi-Civita らの系列とその後の研究.
- 3) Michell, J. H.: The highest waves in water, Phil. Mag., vol. 36, part 5, pp. 430~437, 1893.
- 4) Lenau, C. W.: The solitary wave of maximum amplitude, J. Fluid Mech., vol. 26, part 2, pp. 309~320, 1966.
- 5) Yamada, H. and T. Shiotani: On the highest water waves of permanent type, Bull. Disas. Prev. Res. Inst., Kyoto Univ., vol. 18, part 2, No. 135, 1968.
- 6) Longuet-Higgins, M. S.: On the form of the highest progressive and standing waves in deep water, Proc. Roy. Soc. Lond., A. 331, pp. 445~456, 1973.
- 7) Hirsch, M.W. and S. Smale: Differential Equations, Dynamical Systems, and Linear Algebra, Academic P., New York, 1974.
- 8) Luke, J. C.: A variational principle for a fluid with a free surface, J. Fluid Mech., vol. 27, part 2, pp. 395~397, 1967.
- 9) Thom, R.: Stabilité Structurelle et Morphogénèse, Benjamin, Massachusetts, 1972.
- 10) 前出 8)
- 11) 土屋義人・安田孝志: 新しいクノイド波理論の試み, 第21回海岸工学講演会論文集, pp. 65~71, 1974.
- 12) 前出 9)
- 13) Longuet-Higgins, M. S.: On the mass, momentum, energy and circulation of a solitary wave. II, Proc. Roy. Soc. Lond., A. 340, pp. 471~493, 1974.
- 14) Poston, T. and I. N. Stewart: Taylor Expansions and Catastrophes, Research Note in Math. Series, No. 7, Pitman, London, 1976.