逐次時間積分型有限要素法とその安定性について

川　原　睦　人*

1. 緒　言

有限要素法による河川や海域などの流れ解析については，近年，多くの方法が発表され，また，実際上の応用例がみられるようになってきた．著者らは，時間的に，定常や準定常の場合について有効な方法を提案してきた[1)~6)]．時間的に不規則な現象，例えば津波や高潮などを扱う場合には，非定常解析を行う必要がある．このときには，全解析時間を短い時間区間に分割し，分割された時間点に対して逐次計算を進める，いわゆる逐次時間積分型有限要素法が用いられることになる．

このような空間関数のほかに時間関数をも含む有限要素解析に対しては，その収束性と安定性に対して充分な証査を行なわねばならない．ここに，収束性とは，要素分割を充分細くすれば，近似解が正解へ近づいていくという保証である．ここでは，この問題は扱わず，別途考察するものとする[7)]．空間関数に有限要素法を適用し，時間関数に対して逐次積分型公式を用いて計算する場合，積分回数を多くしても安定な計算が行え，解が得られるかどうかが大きな問題となる．すなわち安定性の問題である．

この論文は，近年多く用いられている逐次積分型公式に対して，その最も簡単な安定性の判定条件であるNeumann 条件を調べたものである．理論を簡単にするために，すべて空間関数としては一次元関数のみを扱っている．しかし，著者らの数値実験の結果では，ここで得られた安定性の判定規準は二次元関数の場合に拡張応用しても実用的に充分応用性があるものと認められている．

2. 基礎方程式

基礎方程式として，次の2種類の場合を扱うことにする．すなわち，線形双曲型方程式，

$$\frac{\partial u}{\partial t}+\frac{\partial u}{\partial x}=0 \quad 0\leqq t\leqq T,\quad 0\leqq x\leqq L \quad \cdots\cdots(1)$$

$$u(0,\ t)=u(L,\ t)=0 \quad \cdots\cdots(2)$$

$$u(x,\ 0)=u^0(x) \quad \cdots\cdots(3)$$

と，線形長波方程式

$$\frac{\partial u}{\partial t}+g\frac{\partial h}{\partial x}=0 \quad \cdots\cdots(4)$$

$$0\leqq t\leqq T,\quad 0\leqq x\leqq L$$

$$\frac{\partial h}{\partial t}+H\frac{\partial u}{\partial x}=0 \quad \cdots\cdots(5)$$

$$u(0,\ t)=u(L,\ t)=0,$$

$$h(0,\ t)=h(L,\ t)=0 \quad \cdots\cdots(6)$$

$$u(x,\ 0)=u^0(x),\quad h(x,\ 0)=h^0(x) \quad \cdots\cdots(7)$$

である．ここに，u, h は未知関数，$u^0(x)$, $h^0(x)$ は，与えられた初期値関数，g, H は定数であるとする．簡単のため境界条件は，式 (2) または式 (6) のように両端で0であるとしておく．

式 (1) の両辺に重み関数 u^* をかけ，区間 l について積分すると，次のようになる．

$$\int_0^l\left(u^*\frac{\partial u}{\partial t}\right)dx+\int_0^l\left(u^*\frac{\partial u}{\partial x}\right)dx=0 \quad \cdots\cdots(8)$$

試験関数と重み関数とに対して，それぞれ，一次の形状関数を用いるものとすると，

$$u=\left(1-\frac{x}{l}\right)u_a+\left(\frac{x}{l}\right)u_b \quad \cdots\cdots(9)$$

$$u^*=\left(1-\frac{x}{l}\right)u_a^*+\left(\frac{x}{l}\right)u_b^* \quad \cdots\cdots(10)$$

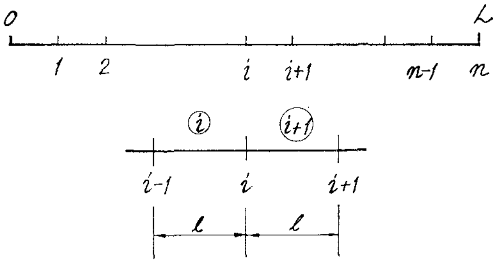
である．ここに，u_a, u_b, u_a^*, u_b^* は，それぞれ，区間 l における両端の試験関数ならびに重み関数の値である．式 (9), (10) を式 (18) に代入し，u_a^*, u_b^* の任意性を用いると，次の方程式を得ることができる．

$$\begin{pmatrix}\frac{l}{3} & \frac{l}{6}\\ \frac{l}{6} & \frac{l}{3}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\dot{u}_a\\ \dot{u}_b\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-\frac{1}{2} & \frac{1}{2}\\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}u_a\\ u_b\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 0\end{pmatrix} \cdots(11)$$

まったく同様の方法により，式 (4), (5) より，次の離散化された方程式を得ることができる．

$$\begin{pmatrix}\frac{l}{3} & \frac{l}{6}\\ \frac{l}{6} & \frac{l}{3}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\dot{u}_a\\ \dot{u}_b\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-\frac{g}{2} & \frac{g}{2}\\ -\frac{g}{2} & \frac{g}{2}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}h_a\\ h_b\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 0\end{pmatrix} \cdots(12)$$

* 正会員　工博　中央大学助教授　理工学部土木工学科



図—1　有限要素分割

$$\begin{pmatrix} \frac{l}{3} & \frac{l}{6} \\ \frac{l}{6} & \frac{l}{3} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \dot{h}_a \\ \dot{h}_b \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} -\frac{H}{2} & \frac{H}{2} \\ -\frac{H}{2} & \frac{H}{2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u_a \\ u_b \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \cdots(13)$$

式 (11), (12), (13) を，この論文における有限要素法により離散化した方程式とする.

次に，分割点に関する方程式を求めることにする. 図—1 に示すごとく，分割点を定めることにする. ただし，簡単のため分割点は，等間隔にとるものとしておく. 第 $i-1$ 点と第 i 点との間の区間を ⓘ 要素とすることにする. 第 ⓘ 要素について，式 (11) の第2式をたてると次のようである.

$$\left(\frac{l}{6}\right)\dot{u}_{i-1}+\left(\frac{l}{3}\right)\dot{u}_i+\left(-\frac{1}{2}\right)u_{i-1}+\left(\frac{1}{2}\right)u_i=0 \quad \cdots\cdots(14)$$

第 $(i+1)$ 要素について，式 (11) の第1式をたてると，

$$\left(\frac{l}{3}\right)\dot{u}_i+\left(\frac{l}{6}\right)\dot{u}_{i+1}+\left(-\frac{1}{2}\right)u_i+\left(\frac{1}{2}\right)u_{i+1}=0 \quad \cdots\cdots(15)$$

である. 式 (14), (15) より，第 i 分割点について，

$$\left(\frac{l}{6}\right)\dot{u}_{i-1}+\left(\frac{2l}{3}\right)\dot{u}_i+\left(\frac{l}{6}\right)\dot{u}_{i+1}+\left(-\frac{1}{2}\right)u_{i-1}+\left(\frac{1}{2}\right)u_{i+1}=0 \quad \cdots\cdots(16)$$

なる方程式を得ることができる. 式 (16) は全分割点に対して，成り立つ方程式である.

まったく同様にして，式 (12), (13) より，次の方程式系を得ることができる.

$$\left(\frac{l}{6}\right)\dot{u}_{i-1}+\left(\frac{2l}{3}\right)\dot{u}_i+\left(\frac{l}{6}\right)\dot{u}_{i+1}+\left(-\frac{g}{2}\right)h_{i-1}+\left(\frac{g}{2}\right)h_{i+1}=0 \quad \cdots\cdots(17)$$

$$\left(\frac{l}{6}\right)\dot{h}_{i-1}+\left(\frac{2l}{3}\right)\dot{h}_i+\left(\frac{l}{6}\right)\dot{h}_{i+1}+\left(-\frac{H}{2}\right)u_{i-1}+\left(\frac{H}{2}\right)u_{i+1}=0 \quad \cdots\cdots(18)$$

3. 時間に関する離散化の方法

式 (16) を全分割点についてたてた方程式は，次のように表わすことができる.

$$[M]\{\dot{u}\}+[S]\{u\}=0 \quad \cdots\cdots(19)$$

式 (19) では，いまだ時間に対する微分が離散化されていない. この離散化に対して，次のような場合を考えることができる.

① 前方差分による場合

$$[M]\{\dot{u}\}\approx\frac{1}{\Delta t}([M]\{u^{n+1}\}-[M]\{u^n\}) \cdots(20)$$

② 集中係数を用いた前方差分による場合

$$[M]\{\dot{u}\}\approx\frac{1}{\Delta t}[\overline{M}]\{u^{n+1}\}-\frac{1}{\Delta t}[M]\{u^n\} \quad \cdots\cdots(21)$$

③ 集中係数を用いた中央差分による場合

$$[M]\{\dot{u}\}\approx\frac{1}{2\Delta t}[\overline{M}]\{u^{n+1}\}-\frac{1}{2\Delta t}[M]\{u^{n-1}\} \quad \cdots\cdots(22)$$

また，第2項についても，次のような場合を考えることができる.

ⓐ n 回目の値を用いる場合

$$[S]\{u\}\approx[S]\{u^n\} \quad \cdots\cdots(23)$$

ⓑ n 回目と $n+1$ 回目の平均を用いる場合

$$[S]\{u\}\approx\frac{1}{2}[S]\{u^{n+1}\}+\frac{1}{2}[S]\{u^n\} \quad \cdots\cdots(24)$$

以上を，適当に組み合わせることによって，次のような，逐次積分型公式を得ることができる.

I. 準陽型オイラー公式 (Semi-Explicit Euler Scheme)

この公式は ①—ⓐ の組み合わせである.

$$\frac{1}{\Delta t}[M]\{u^{n+1}\}=\frac{1}{\Delta t}[M]\{u^n\}-[S]\{u^n\} \quad \cdots\cdots(25)$$

$[M]$ の逆行列は一回計算すれば良い.

II. 陽型オイラー公式 (Explicit Euler Scheme)

この公式は ②—ⓐ の組み合わせである.

$$\frac{1}{\Delta t}[\overline{M}]\{u^{n+1}\}=\frac{1}{\Delta t}[M]\{u^n\}-[S]\{u^n\} \quad \cdots\cdots(26)$$

集中係数にすることにより，逆行列を計算することなく逐次計算を進めることができる.

III. 陰型クランク-ニコルソン公式 (Implicit Crank-Nicolson Scheme) この公式は ①—ⓑ の組み合わせである.

$$\left(\frac{1}{\Delta t}[M]+\frac{1}{2}[S]\right)\{u^{n+1}\}=\left(\frac{1}{\Delta t}[M]-\frac{1}{2}[S]\right)\{u^n\} \quad \cdots\cdots(27)$$

左辺の逆行列を計算しながら逐次積分を行う方法である.

IV. 陽型リープ-フロッグ公式 (Explicit Leap Frog Scheme) この公式は ③—ⓐ の組み合わせである.

$$\frac{1}{2\Delta t}[\overline{M}]\{u^{n+1}\}=\frac{1}{2\Delta t}[M]\{u^{n-1}\}-[S]\{u^n\} \quad\cdots\cdots(28)$$

出発値として u^0 と u^1 とを必要とする公式である.

4. 安定性の検討

一次元方程式について, Neumann 条件による安定性を検討する. すなわち, 第 i 節点における未知関数 u_i の解を次のように仮定する.

$$u_i{}^n=R^n e^{j\omega i} \qquad j=\sqrt{-1} \quad\cdots\cdots(29)$$

このとき, R^{n+1} と R^n との比を考え,

$$Q(\omega)=\frac{R^{n+1}}{R^n} \quad\cdots\cdots(30)$$

この絶対値 $|Q(\omega)|$ によって安定性を判定する. すなわち, 線形方程式系であるので, $|Q(\omega)|$ が1より大きければ, 数値誤差が拡大され計算が不安定になる. また, 逆に1より小さければ, 計算は安定であると判定することができる.

I. 準陽型オイラー公式

式 (16) に式 (25) の公式を適用すると

$$\left(\frac{1}{6}\right)u_{i-1}{}^{n+1}+\left(\frac{2}{3}\right)u_i{}^{n+1}+\left(\frac{1}{6}\right)u_{i+1}{}^{n+1}$$
$$=\left(\frac{1}{6}\right)u_{i-1}{}^n+\left(\frac{2}{3}\right)u_i{}^n+\left(\frac{1}{6}\right)u_{i-1}{}^n$$
$$-\mu\left\{\left(-\frac{1}{2}\right)u_{i-1}{}^n+\left(\frac{1}{2}\right)u_{i+1}{}^n\right\} \quad\cdots\cdots(31)$$

となる. ここに,

$$\mu=\frac{\Delta t}{l} \quad\cdots\cdots(32)$$

である. すなわち, 時間間隔と空間分割間隔との比である. 式 (29) を式 (31) に代入して整頓し,

$$\cos\omega=\frac{e^{j\omega}+e^{-j\omega}}{2}, \quad \sin\omega=\frac{e^{j\omega}-e^{-j\omega}}{2i}$$

なる関係を用いて, 式(30)により $Q(\omega)$ を計算すると,

$$Q(\omega)=\frac{\left(\frac{2}{3}+\frac{1}{3}\cos\omega\right)-j\mu\sin\omega}{\left(\frac{2}{3}+\frac{1}{3}\cos\omega\right)} \quad\cdots\cdots(33)$$

である. よって

$$|Q(\omega)|=1+\left(\frac{\mu\sin\omega}{\frac{2}{3}+\frac{1}{3}\cos\omega}\right)^2\geqq 1 \quad\cdots\cdots(34)$$

となる. このことは, 準陽型オイラー公式は, 無条件不安定, すなわち, いかに細く分割しても計算は不安定で, 解は得られないことを意味している.

II. 陽型オイラー公式

式 (16) に式 (26) の公式を適用すると,

$$u_i{}^{n+1}=\left(\frac{1}{6}\right)u_{i-1}{}^n+\left(\frac{2}{3}\right)u_i{}^n+\left(\frac{1}{6}\right)u_{i+1}{}^n$$
$$-\mu\left\{\left(-\frac{1}{2}\right)u_{i-1}{}^n+\left(\frac{1}{2}\right)u_{i+1}{}^n\right\} \quad\cdots\cdots(35)$$

である. これより,

$$|Q(\omega)|^2=\left(\frac{2}{3}+\frac{1}{3}\cos\omega\right)^2+\mu^2\sin^2\omega\leqq 1 \quad\cdots\cdots(35)$$

であれば, 計算は安定となる. よって,

$$\mu\leqq\frac{1}{3} \quad\cdots\cdots(36)$$

のように選択すれば, 陽型オイラー公式による計算は安定する. 陽型オイラー公式は, 左辺に集中係数を用いて, 純陽型の公式を求めたものであるが, 時間間隔を空間分割の 1/3 より細くすれば, 安定な計算を行うことができる.

III. 陰型クランク-ニコルソン公式

式 (16) に式 (27) の公式を適用すると,

$$\left(\frac{1}{6}\right)u_{i-1}{}^{n+1}+\left(\frac{2}{3}\right)u_i{}^{n+1}+\left(\frac{1}{6}\right)u_{i+1}{}^{n+1}$$
$$+\frac{\mu}{2}\left\{\left(-\frac{1}{2}\right)u_{i-1}{}^{n+1}+\left(\frac{1}{2}\right)u_{i+1}{}^{n+1}\right\}$$
$$=\left(\frac{1}{6}\right)u_{i-1}{}^n+\left(\frac{2}{3}\right)u_i{}^n+\left(\frac{1}{6}\right)u_{i+1}{}^n$$
$$-\frac{\mu}{2}\left\{\left(-\frac{1}{2}\right)u_{i-1}{}^n+\left(\frac{1}{2}\right)u_{i+1}{}^n\right\} \quad\cdots\cdots(37)$$

である. この公式は,

$$|Q(\omega)|^2=1+\frac{4A^2B^2}{(A^2-B^2)^2}\geqq 1 \quad\cdots\cdots(38)$$

$$A=\frac{2}{3}+\frac{1}{3}\cos\omega, \quad B=\frac{\mu}{2}\sin\omega$$

となり, 無条件不安定である. すなわち, 構造解析においては, 標準的である陰型クランク-ニコルソン公式は, 双曲型方程式に対しては有効でないことが指摘できる.

IV. 陽型リープ-フロッグ公式

式 (16) に式 (28) の公式を適用すると,

$$u_i{}^{n+1}=\left(\frac{1}{6}\right)u_{i-1}{}^{n-1}+\left(\frac{2}{3}\right)u_i{}^{n-1}+\left(\frac{1}{6}\right)u_{i+1}{}^{n-1}$$
$$-2\mu\left\{\left(-\frac{1}{2}\right)u_{i-1}{}^n+\left(\frac{1}{2}\right)u_{i+1}{}^n\right\} \quad\cdots\cdots(39)$$

である. これより,

$$\begin{pmatrix} R^n \\ R^{n+1} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ a & b \end{pmatrix}\begin{pmatrix} R^{n-1} \\ R^n \end{pmatrix} \qquad \begin{aligned} a&=\frac{2}{3}+\frac{1}{3}\cos\omega \\ b&=-j\mu\sin\omega \end{aligned} \quad\cdots\cdots(40)$$

となる. 式 (40) の右辺の係数行列の固有値を計算すると, 次のようになる.

$$\lambda=\frac{-b+\sqrt{b^2+4a}}{2} \quad\cdots\cdots(41)$$

すなわち，$|\lambda|\leqq 1$ であり，無条件安定である．このようにリープ-フロッグ公式は，1段階および2段階前の値を用いて，計算するものであるが，有限要素法に対しては，有効に適用できる方法であると言える．

5. 長波方程式に対する検討

線形長波方程式を離散化した式 (12), (13) による場合でも，前節における議論は，そのまま成立する．ここでは，2段階ラックス-ウエンドロッフ公式（Two Step Lax-Wendroff Scheme[8),9)]）を検討することにする．

式 (12), (13) を分割点全体について，たてると

$$[M]\{\dot{u}\}+g[S]\{h\}=\{0\} \quad \cdots\cdots(41)$$

$$[M]\{\dot{h}\}+H[S]\{u\}=\{0\} \quad \cdots\cdots(42)$$

となる．2段階ラックスウエンドロッフ公式は，次の2段階よりなる公式である．

第1段階

$$[\overline{M}]\{u^{n+1}\}=[M]\{u^n\}-\frac{\Delta t}{2}g[S]\{h^n\} \quad \cdots(43)$$

$$[\overline{M}]\{h^{n+1/2}\}=[M]\{h^n\}-\frac{\Delta t}{2}H[S]\{u^n\} \quad \cdots\cdots(44)$$

第2段階

$$[\overline{M}]\{u^{n+1}\}=[M]\{u^n\}-\Delta t g[S]\{h^{n+1/2}\} \quad \cdots(45)$$

$$[\overline{M}]\{h^{n+1}\}=[M]\{h^n\}-\Delta t H[S]\{u^{n+1/2}\} \quad (46)$$

図―1 における第 i 分割点に対する方程式は，次のようである．

第1段階

$$u_i^{n+1/2}=\frac{1}{6}u_{i-1}^n+\frac{2}{3}u_i^n+\frac{1}{6}u_{i+1}^n-\frac{\mu}{2}\left(-\frac{g}{2}h_{i+1}^n+\frac{g}{2}h_{i+1}^n\right) \quad \cdots\cdots(47)$$

$$h_i^{n+1/2}=\frac{1}{6}h_{i-1}^n+\frac{2}{3}h_i^n+\frac{1}{6}h_{i+1}^n-\frac{\mu}{2}\left(-\frac{H}{2}u_{i-1}^n+\frac{H}{2}u_{i+1}^n\right) \quad \cdots\cdots(48)$$

第2段階

$$u_i^{n+1}=\frac{1}{6}u_{i-1}^n+\frac{2}{3}u_i^n+\frac{1}{6}u_{i+1}^n-\mu\left(-\frac{g}{2}h_{i-1}^{n+1/2}+\frac{g}{2}h_{i+1}^{n+1/2}\right) \quad \cdots\cdots(49)$$

$$h_i^{n+1}=\frac{1}{6}h_{i-1}^n+\frac{2}{3}h_i^n+\frac{1}{6}h_{i+1}^n-\mu\left(-\frac{H}{2}u_{i-1}^{n+1/2}+\frac{H}{2}{}_{i+1}^{n+1/2}\right) \quad \cdots\cdots(50)$$

ここで，

$$u_i^n=R^n e^{j\omega i},\quad h_i^n=S^n e^{j\omega i}\quad j=\sqrt{-1} \quad \cdots\cdots(51)$$

なる解を仮定すると，

$$\begin{pmatrix} R^{n+1}\\ S^{n+1}\\ \hline R^{n+1/2}\\ S^{n+1/2}\end{pmatrix}=\left(\begin{array}{cc|cc} & gb & a & \\ Hb & & & a\\ \hline & & a & \frac{g}{2}b\\ & & \frac{H}{2}b & a\end{array}\right)\begin{pmatrix} R^{n+1/2}\\ S^{n+1/2}\\ \hline R^n\\ S^n\end{pmatrix}$$

$$a=\frac{2}{3}+\frac{1}{3}\cos\omega \quad \cdots\cdots(52)$$

$$b=-j\mu\sin\omega$$

である．これより，式 (52) 右辺の固有値より，

$$|\lambda_1|,\ |\lambda_2|,\ |\lambda_3|,\ |\lambda_4|\leqq 1 \quad \cdots\cdots(53)$$

なる条件の下に安定条件を求めると次のようになる．

$$\mu\leqq\frac{\sqrt{2}}{3}\cdot\frac{1}{\sqrt{gH}} \quad \cdots\cdots(54)$$

式 (41), (42) の離散化に対しては，次に示すような，ルンゲ-クッタ 2/3 公式なるものが考えられる．すなわち，第1段階

$$[\overline{M}]\{u^{n+2/3}\}=[M]\{u^n\}-\frac{2\Delta t}{3}g[S]\{h^n\} \quad \cdots\cdots(55)$$

$$[\overline{M}]\{h^{n+2/3}\}=[M]\{h^n\}-\frac{2\Delta t}{3}H[S]\{u^n\} \quad \cdots\cdots(56)$$

第2段階

$$[\overline{M}]\{u^{n+1}\}=[M]\{u^n\}-\frac{\Delta t}{4}g[S](\{h^n\}+3\{h^{n+2/3}\}) \quad \cdots(57)$$

$$[\overline{M}]\{h^{n+1}\}=[M]\{h^n\}-\frac{\Delta t}{4}H[S](\{u^n\}+3\{u^{n+2/3}\}) \quad \cdots(58)$$

である．

この場合には，2段階ラックス-ウエンドロッフ公式と同様に議論を進めることにより，次のような関係を導くことができる．

$$\begin{pmatrix} R^{n+1}\\ S^{n+1}\\ \hline R^{n+3/2}\\ S^{n+3/2}\end{pmatrix}=\left(\begin{array}{cc|cc} & \frac{g}{4}b & a & \frac{3g}{4}b\\ \frac{H}{4}b & & \frac{3H}{4}b & a\\ \hline & & a & \frac{2g}{3}b\\ & & \frac{2H}{3}b & a\end{array}\right)\begin{pmatrix} R^{n+3/2}\\ S^{n+3/2}\\ \hline R^n\\ S^n\end{pmatrix} \quad \cdots\cdots(59)$$

これより安定条件は，

$$\mu\leqq\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{gH}} \quad \cdots\cdots(60)$$

のようになる．この条件は式 (54) よりも多少広い範囲を与えている．

6. 結　言

双曲型方程式に対して有限要素法を適用する場合，楕円型や放物型方程式とは別の意味での安定性を検討しなければならない．ここで得られた結論をまとめると次のようになる．

1) 逆行列を計算しながら進む陰的公式であっても，無条件不安定な公式がある．放物型方程式に良く用いられる準陽型オイラー公式,陰型クランクーニコルソン公式などは，無条件不安定である．

2) 集中係数を用いることにより，計算を安定化することができる．陽的オイラー公式の安定条件は式 (36), で与えられ，陽的リープ-フロッグ公式は無条件安定である．

3) 長波方程式に対しては，2段階ラックス-ウエンドロッフ公式やルンゲ-クッタ 2/3 公式が安定である．安定条件は，式 (54)，式 (60) で与えられる．

一方，安定性と収束性は相反する場合が多い．すなわち，安定な計算公式であればあるほど誤差の集積が多くなることがある．このために，より誤差の少なく，より安定な計算公式の開発が望まれるものである．

参考文献

1) Kawahara, M. and N. Kaneko: Periodic Galerkin finite element method of incompressible viscous fluid flow, Theoretical and Applied Mechanies, Vol. 24, 東大出版会, 1977.
2) Kawahara, M.: Periodic Galerkin finite element method of unsteady periodic flow of viscous fluid, Int. J. Num. Meth. Engn. (in press), 1977.
3) Kawahara, M. and K. Hasegawa: Periodic Galerkin finite element method of tidal flow, Int. J. Num. Meth. Engng. (in press), 1977.
4) Kawahara, M., K. Hasegawa and Y. Kawanago: Periodic tidal flow analysis by finite element perturbation method, Comp. Fluid, (in press) 1977.
5) Kawahara, M.: Steady and unsteady finite element analysis of incompressible viscous fluid", Finite Elements in Fluids, Vol. 3, (in press) 1977.
6) 川原睦人・川上俊雄・船越晴也・長谷川賢一: 有限要素法と摂動法を用いた流動および拡散手法の開発，第23回土木学会海岸工学講演会, pp. 524～528, 1976.
7) Kawahara, M.: Convergence of finite element Lax-Wendroff method for linear hyperbolic differential equation, 土木学会論文報告集 No.253, pp. 95～107, 1976.
8) 川原睦人・竹内則雄・首藤伸夫: 2段階ラックスウェンドロッフ有限要素法による潮汐流解析，第23回土木学会海岸工学講演会, pp. 498～501, 1976.
9) Kawahara, M., N. Takeuchi and Y. Yoshida: Two step explicit finite element method for tsunami wave propagation analysis", Int. J. Num. Meth. Engng. (in press) 1977.