

流れによる波の屈折と波高変化

岩垣 雄一*・酒井 哲郎**・岡 幸夫***

1. ま え が き

流れによる波の屈折の問題は波の変形現象の1つであるが、浅水変形、水深変化による波の屈折、回折などくらべてそれほど研究されていない。Longuet-Higgins and Stewart¹⁾は流れの中の波のエネルギーの保存式を導き、それを用いて簡単な流れの場合の深海波の屈折と波高変化の式を導き、これまでの扱いではいわゆる radiation stress が考慮されていないことを指摘した。ここでは、浅海波の場合に、彼らの理論を拡張する。一方、複雑な流れの場合には数値計算によらざるを得ないが、最近 Noda ら²⁾と Skovgaard and Jonsson³⁾は流れによる波の変形の数値計算モデルを提案した。ここでは、これらと類似の数値計算モデルを提案する^{4), 5)}。さらに簡単な流れの場合についてこの数値計算モデルを適用し、理論結果と比較してその妥当性を検討するとともに、radiation stress などの効果を検討する。

2. 簡単な流れによる浅海波の屈折の理論

Longuet-Higgins and Stewart¹⁾は、図-1に示すように、 $y > 0$ の領域に存在する y 方向に任意に変化する x 方向のみの流れ $U(y)$ に深海波が斜めに入射(x 軸と初期波向のなす角度 θ_0 を反時計回りにはかる)する場合を扱った。この場合、 U は正負の値をとりうるものとし、 θ_0 は $0^\circ \sim 90^\circ$ の範囲の値にかぎる。まず波数の定義によって、波数は非回転である^{6), 7)}。波数 $\mathbf{k}$ の x, y 成分を k_x, k_y で表わすと、現象は x 方向に変化しないから、

$$\partial k_x / \partial y - \partial k_y / \partial x = \partial k_x / \partial y = \partial(k \cos \theta) / \partial y = 0$$

すなわち、

$$k \cos \theta = \text{const.} = b \quad \dots\dots\dots (1)$$

次に、波数の運動学的保存式⁷⁾は、定常状態を考えると、

$$\partial \mathbf{k} / \partial t + \nabla \omega = \nabla \omega = 0 \quad \dots\dots\dots (2)$$

ここで ω は静止座標から見た波の角周波数で、流れ

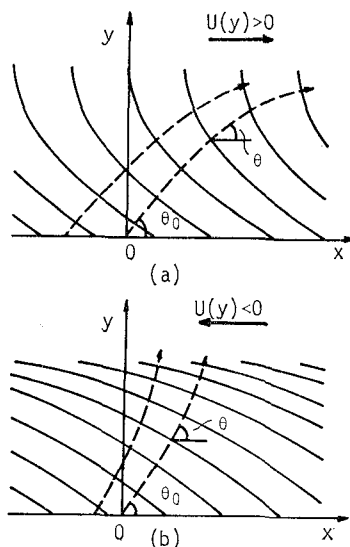


図-1 座 標 系 (理論)

に相対的な波速を c_* とすると、静止座標から見た波速は $c_* + U \cos \theta$ であるから、 $\omega = k(c_* + U \cos \theta)$ となり、式(2)より、

$$k(c_* + U \cos \theta) = \sigma_0 \quad \dots\dots\dots (3)$$

ここに σ_0 は流れのない領域($y < 0$)での波の角周波数である。第三に、波数と流れに相対的な波速との関係は微小振幅波の関係

$$kc_*^2 = g \tanh kh \quad \dots\dots\dots (4)$$

が成立するとする。ここに h は水深である。上式は、水深および流速の変化がゆるやかな場合には成立するものと考えられる。Longuet-Higgins らは $\tanh kh = 1$ とした深海波の場合を扱っているが、流れによって波長が長くなる場合のあることを考えると、流れがない場合には深海波とみなせても、流れがあると浅海波として扱った方が一般的であると考えられる。式(1), (3), (4)を用いて、彼らと同様の操作をすると、結局次式が得られる。

$$c_*/c_0 = 1 / (1 - U/c_0 \cos \theta_0) \cdot \tanh kh / \tanh k_0 h_0, \quad \dots\dots\dots (5)$$

$$k/k_0 = (1 - U/c_0 \cos \theta_0)^2 \cdot \tanh k_0 h_0 / \tanh kh, \quad \dots\dots\dots (6)$$

* 正会員 工博 京都大学教授 工学部土木工学科

** 正会員 工博 京都大学助教授 工学部土木工学科

*** 正会員 工修 飛鳥建設

$$\cos \theta / \cos \theta_0 = 1 / (1 - U / c_0 \cdot \cos \theta_0)^2 \cdot \tanh kh / \tanh k_0 h_0 \quad \cdots \cdots (7)$$

アンダーラインの部分、深海波の場合には1になる。添字の0は、流れのない領域 ($y < 0$) での量であることを意味するものであり、深海波を意味するものではない。

Longuet-Higgins ら¹⁾ が与えた流れの中における波のエネルギーの保存式は、次式で与えられる。

$$\begin{aligned} \partial E / \partial t + \partial \{E(U + c_{gx})\} / \partial x + \partial \{E(V + c_{gy})\} / \partial y \\ + S_{xx} \cdot \partial U / \partial x + S_{xy} \cdot \partial V / \partial x + S_{yx} \cdot \partial U / \partial y \\ + S_{yy} \cdot \partial V / \partial y = 0 \quad \cdots \cdots (8) \end{aligned}$$

ここで、 $E = 1/8 \cdot \rho g H^2$ は波のエネルギー、 H は波高、 U, V は流速の x, y 成分、 c_{gx}, c_{gy} は流れに相対的な波の群速度の x, y 成分、 S は radiation stress で次式で与えられる。

$$\begin{aligned} S_{xx} &= E \{c_{gx} / c_* \cdot \cos^2 \theta + 1/2 \cdot (2c_{gx} / c_* - 1)\}, \\ S_{xy} &= E \{c_{gx} / c_* \cdot \cos \theta \cdot \sin \theta\}, \\ S_{yx} &= E \{c_{gx} / c_* \cdot \cos \theta \cdot \sin \theta\}, \\ S_{yy} &= E \{c_{gy} / c_* \cdot \sin^2 \theta + 1/2 \cdot (2c_{gy} / c_* - 1)\} \quad \cdots \cdots (9) \end{aligned}$$

波の群速度と波速の関係は、微小振幅波の次の関係が成立するものとする。

$$c_{gx} / c_* = n_* = 1/2 \cdot (1 + 2kh / \sinh 2kh) \quad \cdots \cdots (10)$$

いま定常状態を考え、 x 方向には変化がないことを考えると、式 (1), (3), (4), (10) より、式 (8) は、

$$\begin{aligned} \partial \{n_* E \tanh kh \cdot \sin \theta / (\sigma_0 - bU)\} / \partial y \\ + n_* E \cdot b \tanh kh \cdot \sin \theta / (\sigma_0 - bU)^2 \cdot \partial U / \partial y = 0 \quad \cdots \cdots (11) \end{aligned}$$

となり、上式の積分は次式で与えられる。

$$n_* E \tanh kh \cdot \sin \theta / (\sigma_0 - bU)^2 = \text{const.}$$

式 (7) を用いると上式は $n_* E \sin 2\theta = \text{const.}$ となり、結局、

$$\begin{aligned} H/H_0 &= (E/E_0)^{1/2} \\ &= (\sin 2\theta_0 / \sin 2\theta)^{1/2} \cdot (n_0/n_*)^{1/2} \cdots \cdots (12) \end{aligned}$$

アンダーラインの部分、深海波の場合1になる。なお、式 (5), (7) を用いて式 (12) を変形し、流れのない領域として深海域をとると、次式のように変形できる。

$$\begin{aligned} H/H_d &= (c_d/2n_*c_*)^{1/2} \cdot (\sin \theta_d / \sin \theta)^{1/2} \cdot \\ &\quad (1 - U/c_d \cdot \cos \theta_d)^{1/2} \cdots \cdots (13) \end{aligned}$$

ここに添字 d は流れのない深海での値であることを示す。

$\cos \theta$ は1以下であるから、式 (7) より解の存在する U の値の上限値が次式によって与えられる。

$$U/c_0 \leq [1 - (\cos \theta_0 \cdot \tanh kh / \tanh k_0 h_0)^{1/2}] / \cos \theta_0 \quad \cdots \cdots (14)$$

U がこの上限値に達すると波向 θ は0となり、波は流れによって完全に遮蔽される。一方、 $U < 0$ の場合は U に制限はないが、 U が $-\infty$ に近づくと式 (6) からわか

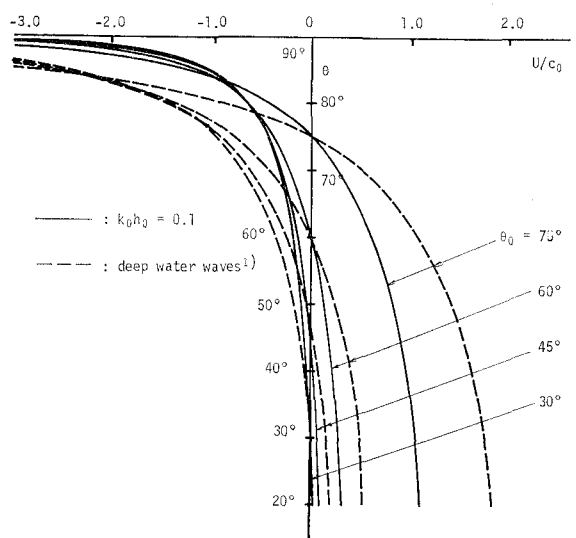
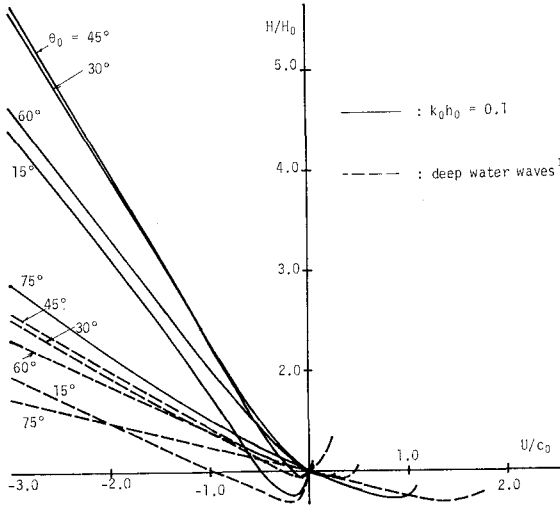


図-2 波向の変化の理論結果

るように k は非常に大きくなり、波長が非常に短くなる (図-1 の (b)). また式 (7) より θ は 90° に近づき、流れに直交するようになる。図-2 はこの様子を、横軸に U/c_0 、縦軸に θ 、パラメータとして θ_0 および $k_0 h_0$ をとって示したものである。実線は $k_0 h_0 = 0.1$ の場合、破線は Longuet-Higgins ら¹⁾ が扱った深海波の場合である。図から明らかに、浅海波の場合は深海波の場合にくらべて変化が急であることがわかる。

一方、式 (12) より θ が $0^\circ, 90^\circ$ のいずれの場合も波高は無限大になる。この点について Longuet-Higgins らは、 $\theta \rightarrow 0$ の場合はいわゆる焦線を形成するため、この場合にはこのような幾何光学的扱いでは不十分であると述べている。一方 $\theta \rightarrow 90^\circ$ の場合は $U \rightarrow -\infty$ の場合で、これは主に波長および波速が減少するために、 y 方向にエネルギーフラックスを保つためには波高が増大しなければならないためである。ただし、波の進行方向と流れの方向が一致する場合と異なって、逆向きの流れが群速度より大きくなっても波は進行を阻止されない。これは波の峯線が引きのばされるために、波高が減少する傾向があるからであると述べている。図-3 は波高の変化を示したものである。波向の場合と同様、浅海波の場合の方が変化が急であることがわかる。

最後に、式 (13) からわかるように、この場合の波高変化は、形の上ではいわゆる浅水係数および屈折係数と全く同じ2つの係数 $(c_d/2n_*c_*)^{1/2}$ および $(\sin \theta_d / \sin \theta)^{1/2}$ と $(1 - U/c_d \cdot \cos \theta_d)^{1/2}$ という係数の積からなっていることがわかる。ただし、 c_*, θ は、それぞれ流れの存在によって微小振幅波の波速が変化したものと流れによって屈折した波向であり、最初の2つの係数は流れが存在する場合の広義の浅水係数および屈折係数と呼べ



図—3 波高の変化の理論結果

る。また式 (11) において radiation stress の項 (左辺第 2 項) を無視すると、波高変化の式がこの広義の浅水および屈折係数のみの積で表わされることから、第 3 の係数は radiation stress の効果を表わす項といえる。

3. 流れによる波の屈折の数値計算モデル

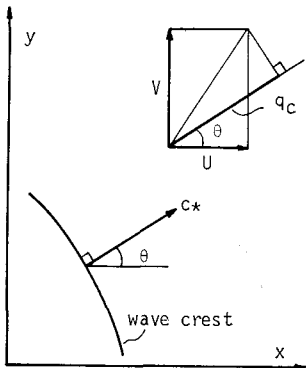
2. の理論的扱いでは、波向は波数の非回転の条件式 (1) より決定されたが、一方、流れが任意の場合に、Arthur⁸⁾ は、水深のみによる屈折の数値計算に用いられている波向線方程式に類似な式

$$\begin{aligned} d\theta/dt &= \partial(q_c + c_*)/\partial x \cdot \sin \theta \\ &\quad - \partial(q_c + c_*)/\partial y \cdot \cos \theta \end{aligned} \quad (15)$$

を与えている。この式は、次式、

$$\begin{aligned} dx/dt &= U + c_* \cos \theta, \quad dy/dt = V + c_* \sin \theta \\ &\dots\dots\dots (16) \end{aligned}$$

で与えられる経路に沿う波向 θ の時間的变化を示している。ここで、 q_c は $U \cos \theta + V \sin \theta$ で与えられる流れの波向き方向成分である (図—4)。Skovgaard and Jonsson⁹⁾ は式 (15) を wave orthogonal equation と呼んでいる。なお、波数の非回転の条件式からも式 (15) に類似な式



図—4 座標系数値 (計算モデル)

が求められるが⁵⁾、式 (15) の q_c に $U \cos \theta + V \sin \theta$ の表現を代入した場合に生じる $\partial\theta/\partial x, \partial\theta/\partial y$ に関する項が現われない。

x 方向のみの流れ U の場合は、波数の保存式は式 (3) で与えられるが、 y 方向成分 V もある場合は、次式

$$\begin{aligned} k(c_* + U \cos \theta + V \sin \theta) &= \sigma_0 = 2\pi/T \\ \text{が成立する。ここに } T &\text{ は流れのない領域での波の周期である。式 (4) を上式に代入すると、} \\ L_* &= \frac{gT^2/2\pi \cdot \tanh(2\pi h/L_*)}{(1 - T/L_* \cdot U \cos \theta - T/L_* \cdot V \sin \theta)^2} \end{aligned} \quad (17)$$

ここで L_* は流れの中での波長である。この式を用いれば、 T, h, U, V, θ を与えて L_* を求めることができる。さらにこの $L_* = 2\pi/k$ を用いれば、式 (4) から c_* が求まるので、式 (16) の径路が計算できる。

流れの中での波のエネルギーの保存式 (8) に式 (9) を代入し、定常状態とすると、次式が得られる。

$$\begin{aligned} (U + c_{g*} \cos \theta) \partial E / \partial x + (V + c_{g*} \sin \theta) \partial E / \partial y \\ = F(U, V, c_*, c_{g*}, \theta) \cdot E \quad (18) \\ F = \partial U / \partial x + \partial V / \partial y \\ + \partial c_{g*} / \partial x \cdot \cos \theta + \partial c_{g*} / \partial y \cdot \sin \theta \\ + c_{g*} (-\sin \theta \cdot \partial \theta / \partial x + \cos \theta \cdot \partial \theta / \partial y) \\ + \{ c_{g*} / c_* \cdot \cos^2 \theta + 1/2 \cdot (2c_{g*} / c_* - 1) \} \partial U / \partial x \\ + c_{g*} / c_* \cdot \cos \theta \cdot \sin \theta (\partial V / \partial x + \partial U / \partial y) \\ + \{ c_{g*} / c_* \cdot \sin^2 \theta + 1/2 \cdot (2c_{g*} / c_* - 1) \} \partial V / \partial y \end{aligned} \quad (19)$$

いま、

$$\left. \begin{aligned} dx/dt &= U + c_{g*} \cos \theta, \\ dy/dt &= V + c_{g*} \sin \theta \end{aligned} \right\} \quad (20)$$

で与えられる経路を考えると、この経路に沿う E の時間的变化が次のように式 (18) の右辺で与えられることがわかる。

$$dE/dt = F(U, V, c_*, c_{g*}, \theta) \cdot E \quad (21)$$

数値計算の例として、図—5 に示す 500m×500m の領域を考える。この領域を格子間隔 20m の格子網で表現し、各格子点で h, U, V を記憶させた。流れは、2. の理論結果と比較するために、次式で示すような U 成分のみの単純な場合を考えた。

$$\left. \begin{aligned} U &= 0: \quad 0 \leq y \leq 80 \text{ m}, \\ U &= 0.01 \cdot (y - 80): \quad 80 \text{ m} \leq y \leq 500 \text{ m} \end{aligned} \right\} \quad (22)$$

$j=1(y=0)$ の沖側境界上の各格子点で、初期波向 θ_0 および初期波高 H_0 を与えた。周期 T は 5 sec で一定とし H_0 は 1 m とした。水深は、一様水深の場合と一様勾配海浜 ($y=500\text{m}$ で $h=0$) の場合を考えた。

数値計算においては、まず波向の計算を行い、計算された波向の値を用いて、波のエネルギーすなわち波高 ($E=1/8 \cdot \rho g H^2$) の計算を行った。式 (16) で与えら

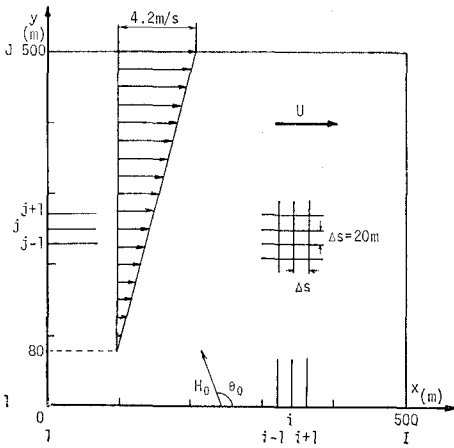


図-5 数値計算の領域

れる径路は、 $j=1$ 上の各格子点から出発する。各径路に沿って、時間間隔 Δt ごとに新しいステップ点 (x_m, y_m) と波向 θ_m が計算される。実際には、波向の計算の誤差を小さくするために、最初仮りの新しいステップ点と波向を計算し、この仮りの点で再び波向を計算して、2つの波向の平均の波向を最終的な新しい波向とし、またその波向に進んだ位置を最終的な新しいステップ点とした。一般にステップ点は格子点と一致しない。そのため、ステップ点での諸量およびその空間微係数は、その点を囲む格子の4つの格子点での値から内挿した。とくに式(15)の $q_c = U \cos \theta + V \sin \theta$ の計算においては、

4つの格子点で共通の θ の値を用いたため、すでに述べた波数の非回転の条件式から導かれる式を用いたのと同じこととなり、波向に関する両式の相違点である $\partial \theta / \partial x$, $\partial \theta / \partial y$ を含む項の効果は検討できなかった。各ステップ点で計算された θ の値を用いて、格子点での θ の値を内挿し、この値を用いて波高の計算がなされた。波高の計算においても、式(20)の径路は、 $j=1$ 上の各格子点から出発する。なお、一般に c^* と c_{g^*} は一致しないから、波向計算の径路と波高計算の径路とは一致しない。計算の時間間隔 Δt はここでは波の周期の1/2すなわち2.5 secとした。

4. 数値計算結果とその考察

図-6は、一様水深($h=30$ m)で初期波向 $\theta_0=60^\circ$ の場合の数値計算結果と2.の理論結果との比較を示している。 $U>0$ であるので、流れは順流である。数値計算値と理論値はほぼ一致している。波向は次第に流れに平行になり、波高は減少している。波高の理論値の方は一度減少したのち増加しており、数値計算値の方は理論値の増加する領域には値が存在しない。理論値の増加は2.で述べたように焦線を形成するため、この理論の適用範囲外である。また数値計算値が存在しないのは、すべての径路が $y=500$ mに到達する前に計算領域から出てしまうからである。図-7は、図-6で θ_0 を 120° とした場合である。理論の方は $0^\circ \leq \theta_0 \leq 90^\circ$ に対して適用されるので、 $\theta_0=60^\circ$ で U の値を負にした場合と同じである。

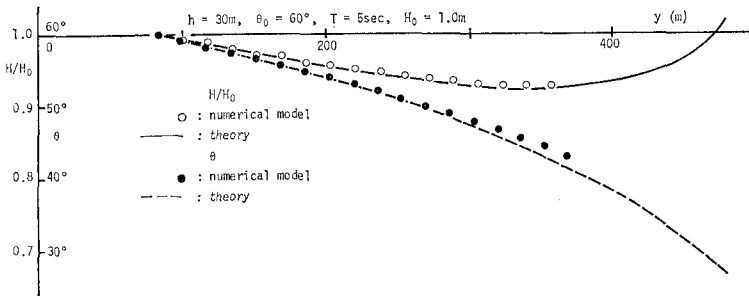


図-6 理論と数値計算の比較の例(1)

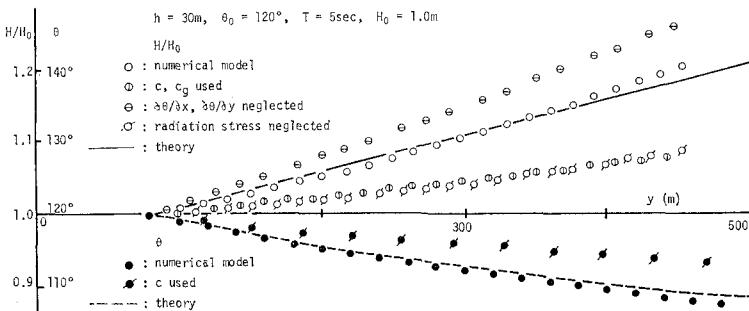
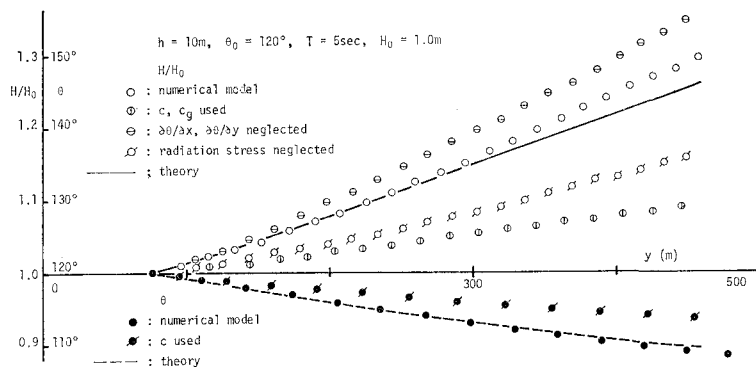


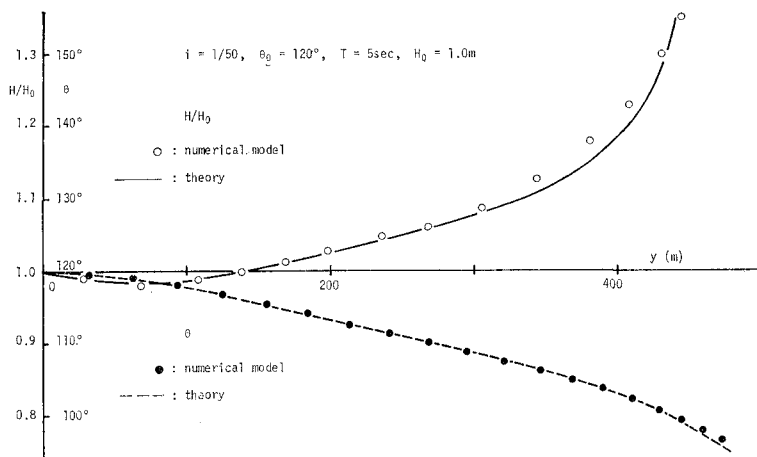
図-7 理論と数値計算の比較の例(2)

この場合も両者はほぼ一致しており、波向は次第に流れに直交するようになり波高は増加する。図-8は、図-7の場合の水深を10mとした場合である。図-7の場合と同様、両者はほぼ一致しているが、 $h=30$ mの場合にくらべて、波高の計算値と理論値の差がやや大きい。図-9は、1/50の一様勾配海岸の場合で、 $\theta_0=120^\circ$ である。この場合も両者はほぼ一致している。

式(17)からわかるように、流れが存在する場合の波長 L^* は微小振幅波の波長とは異なる。したがって、 c^* , c_{g^*} も微小振幅波の c , c_g とは異なる。図-7, 8には、数値計算において



図—8 理論と数値計算の比較の例 (3)



図—9 理論と数値計算の比較の例 (4)

c^* , c_{g^*} の代わりに c , c_g を用いた結果も示されている。 c を用いて計算された波向は、 c^* を用いて計算されたものの約半分であり、 c , c_g を用いた波高は c^* , c_{g^*} を用いたものの 30~40% である。 このように、流れによる屈折計算においては、流れによって変化した波速、群速度を微小振幅波の波速、群速度で代用することはできない。 同じく図—7,8 には、式 (19) の $\partial\theta/\partial x$, $\partial\theta/\partial y$ の項あるいは radiation stress の項 (式 (19) 右辺第 6~8 項) を無視した場合の波高の数値計算結果も示されている。 これらの図から、流れによる波の屈折にともなう波高変化の計算において、波向の空間微分の項および radiation stress の項は無視しえないことがわかる。

参考文献

- 1) Longuet-Higgins, M. S. and R. W. Stewart: The changes in amplitude of short gravity waves on steady non-uniform currents, Jour. Fluid Mech., Vol. 10, pp. 529~549, 1961.
- 2) Noda, E. K., C.J. Sonu, V. C. Rupert and J. I. Collins: Nearshore circulations under sea breeze conditions and wave-current interactions in the surf zone, Tetra Tech. Rep. TC-P-72-149-4, 1974.
- 3) Skovgaard, O. and I.G. Jonsson: Current depth refraction using finite elements, Proc. 15th Conf. Coastal Eng., 1976.
- 4) 岩垣雄一・酒井哲郎・津田俊雄: 水深変化と流れが同時に存在する場合の波の屈折計算, 土木学会年次学術講演会講演概要集第2部, pp. 7~9, 1975.
- 5) 酒井哲郎: 沿岸の波の変形, 1976年度(第12回)水工学に関する夏期研修会講義集Bコース, 土木学会水理委員会, pp. B-2-1~25, 1976.
- 6) Phillips, O. M.: The Dynamics of the Upper Ocean, Cambridge University Press, pp. 43~44, 1966.
- 7) 岩垣雄一: 波とその変形, 水工水理学 (石原藤次郎編), 11, 丸善, pp. 482~483, 1972.
- 8) Arthur, R. S.: Refraction of shallow water waves: The combined effect of currents and underwater topography, Trans. Amer. Geophys. Union, Vol. 31, No. 4, pp. 549~552, 1950.