

有限振幅波理論の適用範囲について

堀川 清司*・西村 仁嗣**・磯部 雅彦***

1. 緒 論

本研究の目的はストークス波ならびにクノイド波の理論的精度を論じることである。

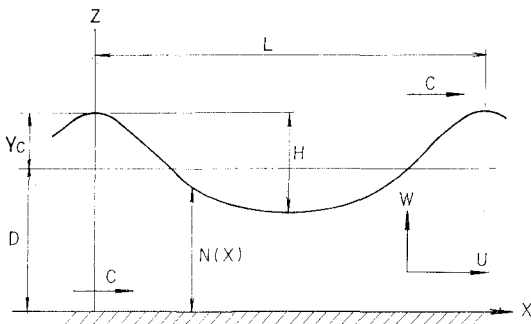
ストークス波理論は Stokes¹⁾ によってその端緒が開かれ、その後 De²⁾, Skjelbreia・Hendrickson³⁾ らによって第5次近似まで進められた。Airy⁴⁾ の微小振幅波理論はその第1次近似解に相当するものである。

一方、クノイド波理論は Korteweg・de Vries⁵⁾ の研究に端を発し、Friedrichs⁶⁾, Keller⁷⁾, Laitone⁸⁾, Chappellear⁹⁾ らの研究を通じて発展を見たもので、その波長を無限大とした極限が孤立波に対応する。孤立波の高次近似解については Fenton¹⁰⁾, Longuet-Higgins・Fenton¹¹⁾ らの研究が注目値する。

本論文においては有限振幅波理論の適用範囲および各近似解の精度の検討に先立ち、各理論の相対的な展開と高次解の計算法が示されるが、これらの詳細については参考文献¹²⁾にゆずることとする。

2. ストークス波とクノイド波の相対的誘導

非粘性、非圧縮性の流体中を伝わる非回転、無変形の周期波動を考える。図—1 に示したように波とともに移動する座標系 (X, Y) を用いて現象を定常化すると、無次元化された諸変数について基礎方程式および境界条



図—1 座 標 系

件は次のように書かれる。

$$d^2 \cdot \phi_{xx} + \phi_{zz} = 0 \dots\dots\dots (1)$$

$$\phi = 0 \quad (z=0) \dots\dots\dots (2)$$

$$\phi = q \quad (z=\eta) \dots\dots\dots (3)$$

$$(\phi_z^2 + d^2 \cdot \phi_x^2)/2 + \eta = p \quad (z=\eta) \dots\dots\dots (4)$$

ここに、 $x=X/L$, $z=Z/D$, $\eta=N/D$, $d=D/L$, また流れ関数 ϕ は $\phi_z = U/\sqrt{gD}$, $\phi_x = -WL/D\sqrt{gD}$ によって定義されている。ただし、 L は波長、 D は平均水深、 N は水底から測った水位、 U , W はそれぞれ水粒子速度の X , Z 軸方向成分、 q および p は定数であり、

$$\int_0^1 \eta \, dx = 1 \dots\dots\dots (5)$$

である。

この場合、式 (3) 中の定数 q は移動座標系から見た定常流の流量に対応するものであり、静止座標系における平均的な質量輸送速度が与えられれば、これから (X, Z) 座標系の移動速度すなわち波速が決定される。

現在問題としている波動を規定するためには水深 D 、波長 L および波高 H という3つの量を与える必要がある。したがって、この現象には2つの無次元量 $d=D/L$ および $h=H/D$ が関係しており、 ϕ および η はこれらもしくは任意の独立な2つの無次元量 $\epsilon(h, d)$ および $\delta(h, d)$ の関数となっている。

いま、 ϕ を z の冪級数に展開すると、これが式 (1) および (2) を満たすために、

$$\phi = \sum_{m=0}^{\infty} (-d^2)^m \frac{z^{2m+1}}{(2m+1)!} \cdot f^{(2m)}(x, \epsilon, \delta) \dots\dots\dots (6)$$

なる形をとらねばならない。ここに、 f は未知関数で、 $f^{(2m)}$ はその $2m$ 階の導関数を示す。

さらに、 f および η を ϵ の冪級数に展開する。

$$f = \sum_{n=0}^{\infty} \epsilon^n \cdot f_n(x, \delta) \dots\dots\dots (7)$$

$$\eta = \sum_{n=0}^{\infty} \epsilon^n \cdot \eta_n(x, \delta) \dots\dots\dots (8)$$

これらが残る式 (3)~(5) を満たすように未知関数 f_n および η_n を決定するわけであるが、ここでは式 (1)~(5) の明白な特解である一様流からの摂動を行なうこと

* 正会員 工博 東京大学教授 工学部土木工学科

** 正会員 工博 東京大学助教授 工学部土木工学科

*** 学生会員 工修 東京大学大学院 工学系研究科

とし, $\eta_0=1$, $f_0=\text{const.}$, また ε を h の order とする.

まず, δ として d そのものをとった場合を考える.

$$d=\delta \quad \cdots \cdots \cdots (9)$$

式 (6)~(8) を式 (3)~(5) に代入し, ε の各次について未定係数法を適用すれば, 1 次の order の連立方程式から

$$f_0 = -\sqrt{\tanh 2\pi\delta/2\pi\delta} \quad \cdots \cdots \cdots (10)$$

$$f_1 = -(a_1/f_0 \cosh 2\pi\delta) \cos 2\pi x \quad \cdots \cdots \cdots (11)$$

$$\eta_1 = a_1 \cos 2\pi x \quad \cdots \cdots \cdots (12)$$

なるストークス波の第1次近似解が得られる. ただし, a_1 は定数である.

次に δ として Ursell 数の order の無次元量 ε/d^2 をとって見よう.

$$d^2 = \varepsilon/\delta \quad \cdots \cdots \cdots (13)$$

再び式 (3)~(5) の展開式に未定係数法を適用すると, ε の2次の order までの計算から次のように関数形が定まる.

$$f_0 = -1 \quad \cdots \cdots \cdots (14)$$

$$f_1 = a_1 \{ (E/K - \kappa^2)/2\kappa^2 + cn^2(2Kx, \kappa) \} \quad \cdots (15)$$

$$\eta_1 = a_1 \{ (-E/K + 1 - \kappa^2)/\kappa^2 + cn^2(2Kx, \kappa) \} \quad \cdots \cdots \cdots (16)$$

ここに, cn は第1種の楕円関数, κ はその母数, K および E はそれぞれ対応する第1種および第2種の完全楕円積分であり, $\delta = 16K^2\kappa^2/3$ なる関係がある. これらはクノイド波の第1次近似解を与えている.

以上により明らかなように, ストークス波およびクノイド波理論の差異は展開された方程式を各次の方程式に分割する際の項の grouping にある. 両者における解の形は異なるが, 最終的には同一の解の異なる領域を表示するものである.

3. 有限振幅波の高次解と収束範囲

ストークス波に対して

$$\phi = - \sum_{\nu=0}^{\infty} \varepsilon^{2\nu} b_{0\nu} z + \sum_{\mu=1}^{\infty} \sum_{\nu=0}^{\infty} \varepsilon^{\mu+2\nu} b_{\mu\nu} \frac{\sinh 2\pi\mu z}{\sinh 2\pi\mu d} \\ \times \cos 2\pi\mu x$$

$$\eta = 1 + \sum_{\mu=1}^{\infty} \sum_{\nu=0}^{\infty} \varepsilon^{\mu+2\nu} a_{\mu\nu} \cos 2\pi\mu x$$

また, クノイド波に対して,

$$\phi = \sum_{n=0}^{\infty} \left[\frac{(-1)^n}{(2n+1)!} z^{2n+1} \sum_{\mu=0}^{\infty} \sum_{\nu=\mu}^{\infty} \varepsilon^\nu b_{\mu\nu} \right. \\ \left. \cdot \{ cn^{2\mu}(2Kx, \kappa) \}^{(2n)} \right]$$

$$\eta = \sum_{\mu=0}^{\infty} \sum_{\nu=\mu}^{\infty} \varepsilon^\nu a_{\mu\nu} cn^{2\mu}(2Kx, \kappa)$$

のように解の形を仮定し, 表面条件式 (3) および (4) から未定係数法によって係数 $b_{\mu\nu}$ および $a_{\mu\nu}$ を決定する. この場合, ある次数の係数をそれより低次の係数のみで表示する漸化式を求めることができる.

それぞれの理論について変数の無次元化の方法を変えることにより計算式はいく分簡単化されるが, いずれにしても実際の計算は相当煩雑となるので計算機によらねばならない. したがって, 求め得る解の最大次数は計算機の演算時間と記憶容量によって制限されることになる. 著者らはある相対水深についてストークス波の第51次近似解, ある楕円関数の母数についてクノイド波の第24次近似解を求めるプログラムを作成し, これらの計算結果にもとづいてそれぞれの解の収束範囲を調べた. 波形勾配および水粒子速度等に関する級数表示式の収束半径(級数を収束させるような摂動核)の最大値を帰納的に推算したわけであるが, 当然のことながらこれは対象とする物理量に依存しないことが確認された.

ストークス波の場合, とくに深海域では次数による係数値の変化が規則的で, 収束半径は Domb・Sykes plot¹³⁾ によって容易に得られる. この推定の結果として得られた収束範囲を相対波高一相対水深平面内に示したのが図-2である. 図中, A_1 は η の展開における $\cos 2\pi x$ の項の係数であり, また $\alpha = 2KD/L$ である. 浅海域では ε 平面の虚軸上に存在する特異点のために収束半径が著しく小さくなっている. また, 収束範囲が ε の定義によって異なる点は注意を要する. 図中には比較のために Yamada・Shiotani¹⁴⁾ による保存波の存在限界線をも同時に示した.

一方, クノイド波の場合, Longuet-Higgins¹⁵⁾ が孤立波について指摘したように10次前後の項で係数値の推移に不規則性が見られる. Domb・Sykes plot によれば極めて小さな収束半径が得られるが, これは ε 平面の実軸上負の領域に存在する特異点に起因するものである. そこで

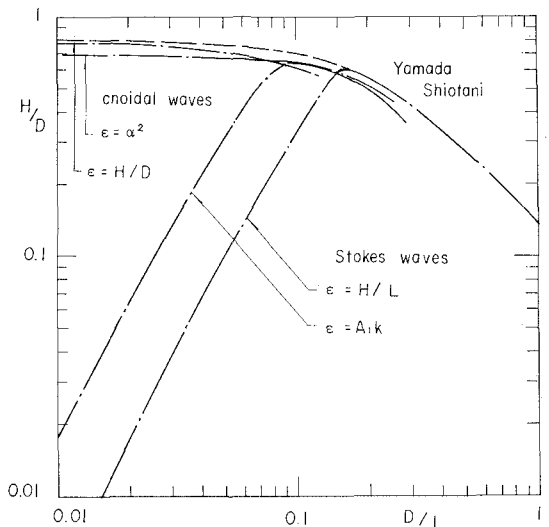


図-2 波動解の収束範囲

$$\epsilon' = \epsilon / (1 + \epsilon/\epsilon_0)$$

なる新たな摂動核 ϵ' を導入し、定数 ϵ_0 を十分小さくすると、この核に関する級数の収束は正領域の特異点によって制限されるようになる。 ϵ の拡張された領域における級数の和を得るためには Padé approximant¹⁶⁾ を適用する必要がある。こうして同じく図-2 に示したような解の収束範囲が得られるが、ここでも ϵ の定義によって差異が生じている。

4. 解の精度

摂動法による近似解の精度について2通りの考え方がある。一つは非線形の境界条件(3)および(4)に対する残差を評価する方法であり^{17), 18)}、いま一つは、近似解によって表わされた諸物理量の誤差を論ずる方法である。前者は近似解が与えられれば厳密解とは無関係に議論することができるが、近似解を使って表わされる諸物理量について、間接的な誤差の評価をすることになる。一方、後者においては、波力の計算などに用いられる水粒子速度および波形の誤差そのものが議論される。

まず式(3)および(4)の残差を表示するために、堀川・西村¹⁹⁾と全く同様に、それぞれ

$$E_K = \frac{\left| \frac{W(X, N) - U(X, N) \cdot N_X}{\sqrt{1 + N_X^2}} \right|_{\max}}{\frac{C_0 \pi H / L}{\sqrt{1 + (\pi H / L)^2}}}$$

$$E_D = \Delta P_0 / \rho g H$$

なるパラメータを定義する。ここに、 $C_0 = \sqrt{g \tanh kD/k}$ 、 $k = 2\pi/L$ 、 g は重力加速度、 ρ は流体の密度、 ΔP_0 は自由表面における圧力の変動量である。計算結果の一例として、 $E_D = 0.01$ に対応する各近似解の等残差線を図-4 および 図-5 に示した。図中の数字は解の次数を表わしている。また、解の収束限界および Yamada・Shiotani による保存波の存在限界を、それぞれ一点鎖線および点線で示した。両者を比較すれば、ストークス波が深海で、クノイド波が浅海で高い精度を示すことがわかる。クノイド波の場合、ここでは摂動核の変換による収束範囲の拡張が行なわれていないため、第10次以上ではかえって精度が低下している。低次近似解に関する残差が堀川・西村の算定結果と多少異なるのは、展開の方法の差異によるものである。

次にある相対水深 D/L および相対波高 H/D について、近似解によって表わされる諸物理量とその厳密解に対して有する相対誤差によって解の精度を考える。残差の場合には評価の対象が2つの境界条件に限られるが、誤差の場合には比較すべき物理量が、水粒子速度、波速、波形のひずみ等、無数に考えられる。本論文では工学的

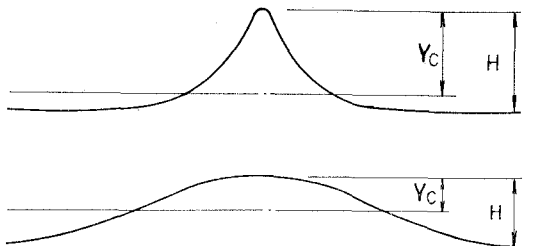


図-3 平均水位と波峯水位

に重要な意味をもつ典型的な物理量として、波形および水粒子速度を代表する2つの量を考える。すなわち静水面から波峯までの高さや波高との比 Y_c/H 、および波峯における水粒子速度 U_c' である。前者は図-3 に示すように、振幅の有限性によって生ずる波形のひずみの程度を示すものであり、微小振幅波理論では0.5、有限振幅波理論ではそれより大きな値となる。後者は波速を明確に定義することによって定まるが、本論文では固定座標系における質量輸送速度を0とする Stokes の第2定義に従った。ただし、誤差のオーダーを議論する場合、波速の定義によって結果が大きく異なることはないものと思われる。

摂動核 ϵ がきわめて小さい領域では高次近似解をそのまま厳密解として用いても十分な精度が得られる。しかし、 ϵ が大きくなると打ち切り誤差も増大するので、厳密解を高精度で外挿する手法が必要となる。このためにいくつかの方法が考えられるが、その第1は、Domb・Sykes plot、すなわち冪級数の隣り合う次数の係数の比を次数の逆数に対してプロットすることにより、計算範囲外の高次の係数比を推定して無限級数の和を求めるものである。

また、Padé の非線形変換 (Padé approximant) を適用することも可能である。これは冪級数の係数を $s_n (n = 0, 1, \dots)$ とするとき、その部分和の列 $\{A_n\}, (n = 1, 2, \dots)$ を

$$B_n = [l, n](\epsilon) = \frac{\begin{vmatrix} s_{n-l+1}, & \dots, & s_{n+1} \\ \vdots & & \vdots \\ s_n & , & \dots, & s_{n+l} \\ \epsilon^l A_{n-l}, & \dots, & A_n \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} s_{n-l+1}, & \dots, & s_{n+1} \\ \vdots & & \vdots \\ s_n & , & \dots, & s_{n+l} \\ \epsilon^l & , & \dots, & 1 \end{vmatrix}}$$

によって数列 $\{B_n\}$ に変換し、収束性を改良するものである。上式において l は変換の次数である。

上述の2つの方法により、ストークス波について H/L の厳密解を推定すると表-1 に示したような結果を得る。いずれの方法によってもほぼ同一の推定値に到達す

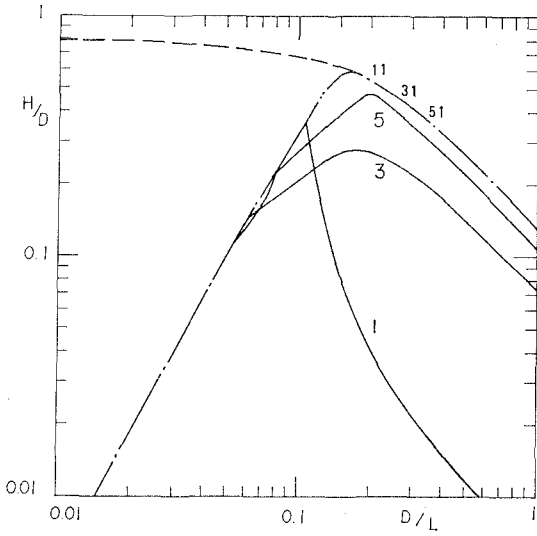


図-4 等残差線 (ストークス波, $\varepsilon=H/L$, $E_D=1\%$)

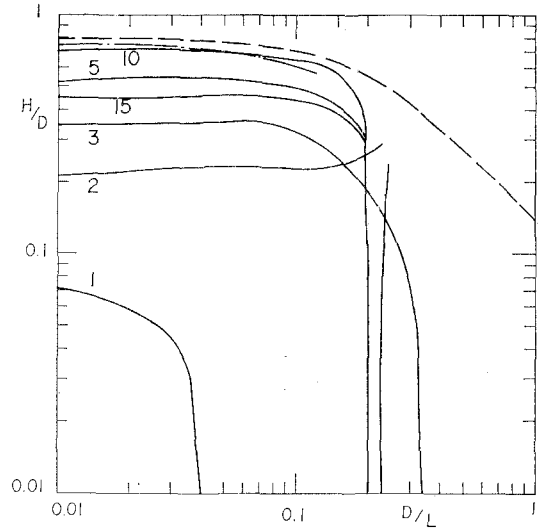


図-5 等残差線 (クノイド波, $\varepsilon=H/D$, $E_D=1\%$)

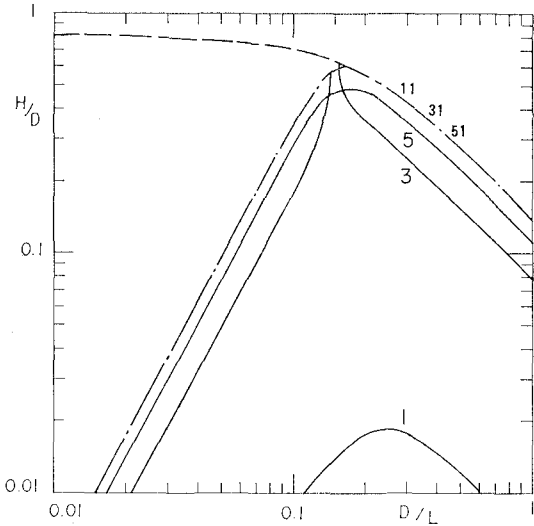


図-6 等誤差線 (ストークス波, $\varepsilon=H/L$, Y_c/H の相対誤差 1%)

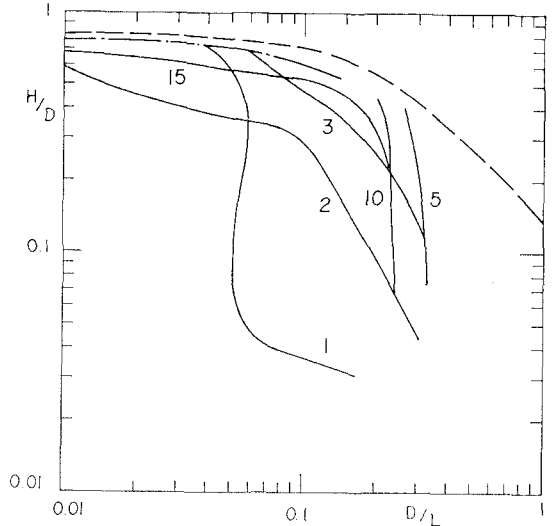


図-7 等誤差線 (クノイド波, $\varepsilon=H/D$, Y_c/H の相対誤差 1%)

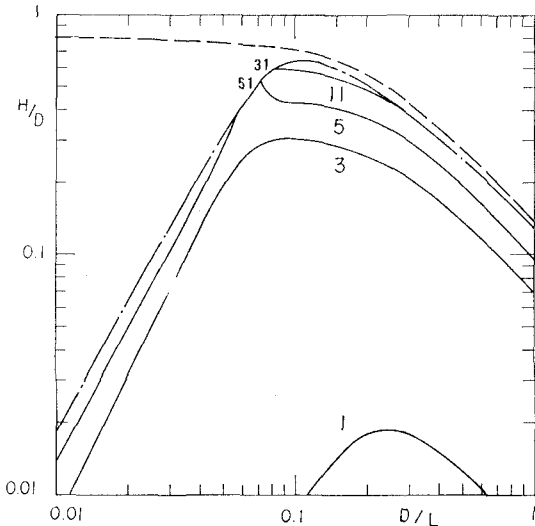


図-8 等誤差線 (ストークス波, $\varepsilon=A_1k$, Y_c/H の相対誤差 1%)

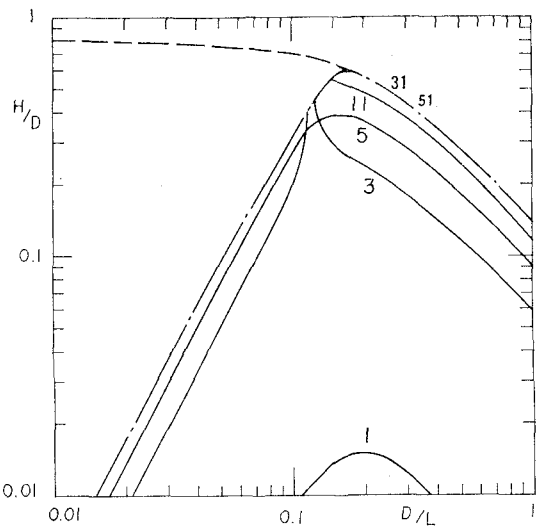


図-9 等誤差線 (ストークス波, $\varepsilon=H/L$, U_c' の相対誤差 1%)

ることがわかるが、ここではストークス波に対して3次の Padé approximant [3,45](ϵ), またクノイド波に対しては [6,9](ϵ) を用いることとした。この不統一は両者の近似解の計算に要した語長の差異にもとづくものである。

表—1 波形勾配の推定厳密解
(深海波, $\epsilon=A_1k$, $\epsilon_{\max}=0.360$)

ϵ	H/L		
	第51次近似解	Domb-Sykes plot による方法	Padé approximant による方法
$\epsilon_{\max}$	0.1311	0.1360	0.1332
$0.99 \cdot \epsilon_{\max}$	0.1284	0.1293	0.1292
$0.9 \cdot \epsilon_{\max}$	0.1109	0.1109	0.1109

図—6 および 7 は誤差計算の結果の例として、それぞれストークス波およびクノイド波について Y_c/H の相対誤差 1% に対応する等誤差線を示したものである。前述のごとく摂動核 ϵ はある程度の任意性を有するが、ちなみにストークス波の誘導において $\epsilon=A_1k$ とすると全く同様に図—8 の結果を得る。 ϵ の定義によって誤差が大きく変化することはないようである。さらに U_c' に関する相対誤差 1% の等誤差線を図—9 に例示する。これから誤差はその評価の対象とする物理量によらず同様の傾向を示すことがわかる。いずれの場合にもその結論は残差による精度の議論とはば一致している。

5. 結 論

ストークス波とクノイド波の理論展開上の差異を論じ、高次解の計算法および解の収束範囲 (図—2) について略述した。

両理論における近似解の精度を2つの方法で論じた。まず、完全には満たすことのできない非線形の表面条件について残差を求め、間接的に誤差を調べた。相対波高一相対水深平面内に等残差線を図示したものが、図—4 および 5 である。

さらに上述の高次近似解から外挿によって厳密解における諸物理量を推算し、これにもとづいて近似解の誤差を求めた。図—6~9 は同様に等誤差線を例示したものである。

なお、本研究の数値計算は東京大学大型計算機センターの HITAC-8700/8800 システムによって行われたことを付記する。

参 考 文 献

- 1) Stokes, G. G.: On the theory of oscillatory waves, Trans. Camb. Phil. Soc., Vol. 8, p. 441, 1847.

- 2) De, S. C.: Contributions to the theory of Stokes waves, Proc. Camb. Phil. Soc., Vol. 51, pp. 713~736, 1955.
- 3) Skjelbreia, L. and J. Hendrickson: Fifth order gravity wave theory, Proc. 7th Conf. Coastal Eng., Vol. 1, pp. 184~196, 1960.
- 4) Airy, G. B.: On tides and waves, Encyc. Metrop., 192, pp. 241~396, 1845.
- 5) Korteweg, D. J. and G. de Vries: On the change of form of long waves advancing in a rectangular canal and on a new type of long stationary waves, Phil. Mag., Ser. 5, Vol. 39, pp. 422~443, 1895.
- 6) Friedrichs, K. O.: Appendix. On the derivation of the shallow water theory, Commun. Pure Appl. Math., Vol. 1, pp. 81~85, 1948.
- 7) Keller, J. B.: The solitary wave and periodic waves in shallow water, Commun. Pure Appl. Math., Vol. 1, pp. 323~339, 1948.
- 8) Laitone, E. V.: The second approximation to cnoidal and solitary waves, Jour. Fluid Mech., Vol. 9, pp. 430~444, 1960.
- 9) Chappellear, J. E.: Shallow water waves, Jour. Geophys. Res., Vol. 67, pp. 4693~4704, 1962.
- 10) Fenton, J. D.: A ninth-order solution for the solitary wave, Jour. Fluid Mech., Vol. 53, pp. 257~271, 1972.
- 11) Longuet-Higgins, M. S. and J. D. Fenton: On the mass, momentum, energy and circulation of a solitary wave II, Proc. Roy. Soc. Lond., Ser. A, Vol. 340, pp. 471~493, 1974.
- 12) Nishimura, H., M. Isobe and K. Horikawa: Higher order solutions of the Stokes and the cnoidal waves, Jour. Fac. Eng. Univ. Tokyo, Ser. B, Vol. 34, No. 2, pp. 263~293, 1977.
- 13) Domb, C. and M. F. Sykes: On the susceptibility of a ferromagnetic above the Curie point, Proc. Roy. Soc. Lond., Ser. A, Vol. 240, pp. 214~228, 1957.
- 14) Yamada, H. and T. Shiotani: On the highest water waves of permanent type, Bull. Disas. Prev. Res. Inst. Kyoto Univ., Vol. 18, Part 2, No. 135, pp. 1~22, 1968.
- 15) 前出 11)
- 16) Baker, G. A.: The theory and application of the Padé approximant method, Adv. Theor. Phys., Vol. 1, pp. 1~58, 1965.
- 17) Dean, R. G.: Relative validities of water wave theories, Proc. ASCE, Speciality Conf. of Civil Eng. in the Ocean, pp. 1~30, 1968.
- 18) 堀川清司・西村仁嗣: ストークス波とクノイド波の比較研究, 第23回海岸工学講演会論文集, pp. 371~375, 1976.
- 19) 前出 18)