

表面波の表面運動の粘性効果

浜 田 徳 一*

1. 表面波の表面運動の粘性効果については、自由表面の場合が文献1) pp. 625~627 に示されており、これによると粘性係数一定のとき、表面の境界層の厚さは固定底面によってできる底の境界層の厚さと同様であるが、その渦度は微弱で粘性損失には有効な効果をもたず、流体内部への粘性損失の積分では無視することができる。表面の水平運動が完全に束縛せられた場合は文献2)に示されている。これと似た取扱いとして、表面波の表面に同じ周期のせん断応力が作用した場合については、著者は文献3)式 (10) の誘導その他で計算したが、その時は表面にかかる垂直応力の造波効果にくらべ、ほぼ無視できるものとした。文献4)はこの周期的なせん断応力のみをとりあげ、その効果を検討している。

この研究では表面波の表面での水平方向の水粒子速度が任意に束縛あるいは増幅せられたときの効果について調べる。

文献1)と同様に

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \nabla^2 u, \quad \frac{\partial v}{\partial t} = -g - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} + \nu \nabla^2 v \quad \dots\dots\dots (1)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad \dots\dots\dots (2)$$

$$u = -\frac{\partial \varphi}{\partial x} - \frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad v = -\frac{\partial \varphi}{\partial y} + \frac{\partial \psi}{\partial x} \quad \dots\dots\dots (3)$$

において

$$\frac{p}{\rho} = \frac{\partial \varphi}{\partial t} - g y \quad \dots\dots\dots (4)$$

$$\nabla^2 \varphi = 0, \quad \frac{\partial \psi}{\partial t} = \nu \nabla^2 \psi \quad \dots\dots\dots (5)$$

表面条件は $y=0$ にて

$$v = \frac{\partial \eta}{\partial t} \quad \dots\dots\dots (6)$$

$$p_{yy} = T \frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2} = -p + 2\mu \frac{\partial v}{\partial y} = \rho g \eta - \rho \frac{\partial \varphi}{\partial t} + 2\mu \frac{\partial v}{\partial y} \quad \dots\dots\dots (7)$$

$$u = (-ikKA_0 - mKC_0)e^{i(kx - \alpha t)} \quad \dots\dots\dots (8)$$

ただし、

$$C_0/A_0 = \frac{2\nu k^2}{\alpha r}, \quad -i \frac{k}{\alpha r} A_0 = a_0 \quad \dots\dots\dots (9)$$

$$\eta = a_0 e^{\alpha t} \cos(kx - \alpha r t) \quad \dots\dots\dots (10)$$

表面の振幅 a_0 は実かつ正とする。式 (8) は自由表面の場合の $\tau_{xy}=0$ に代って与えられ、以下 K が正の実数の場合をとる。

水深が十分大きいとき、式 (5) の φ, ψ は

$$\varphi = A e^{ky} e^{i(kx - \alpha t)}, \quad \psi = C e^{my} e^{i(kx - \alpha t)} \quad \dots\dots\dots (11)$$

$R(m), k > 0$ として $m^2 = k^2 - i\alpha/\nu, k \leq 10$ では $(k/m)^2 \rightarrow 0$ として

$$m \simeq \sqrt{\frac{\alpha_0}{\nu}} e^{-i\pi/4} \quad \dots\dots\dots (12)$$

式 (11) に表面条件を用いて、特性式は $(T' = T/\rho)$

$$\begin{aligned} -T'k^4 + T'k^3m &= gk^3 - gkm - K\alpha\alpha_r k + \alpha^2 m \\ &+ i2\nu k^2 m K(\alpha_r + \alpha) - i2\nu k^3 K\alpha_r - 4\nu^2 k^4 m K \\ &+ 4\nu^2 k^3 m^2 K \quad \dots\dots\dots (13) \end{aligned}$$

$k \leq 10$ で式 (13) の右辺末尾の3項は無視できる。

$\alpha_0^2 = gk + T'k^3$ を用い、最大項の $\alpha^2 m \simeq m\alpha_0^2 + 2m\alpha_0\Delta\alpha$, 他の項では $\alpha_0 \simeq \alpha_r \simeq \alpha$ において ($\alpha_0 > 0$ とする)

$$\Delta\alpha = -k\alpha_0(1-K) \frac{1}{2\sqrt{2}} (1+i) \sqrt{\frac{\nu}{\alpha_0}} - i2\nu k^2 \quad \dots\dots\dots (14)$$

$$\alpha_r = \alpha_0 + \frac{k}{2\sqrt{2}} \sqrt{\nu\alpha_0} (K-1) \quad \dots\dots\dots (15)$$

$$\alpha_i = \frac{k}{2\sqrt{2}} \sqrt{\nu\alpha_0} (K-1) - 2\nu k^2 \quad \dots\dots\dots (16)$$

式 (10) から αt は振幅の時間的変化を与えるが、その第1項は表面の水平流速を制御することにより生じた表面付近のうすい境界層内の損失により生じ、第2項は内部粘性により波運動の全域にわたって生じている。この2つの項を $1 > K \geq 0$ の束縛の場合について、模型実験を主とした $10 \geq k \geq 0.05$ を考え、 $\nu = 0.015$, $T' = 74.92$ (C.G.S.) において図示したものが図—1であり、野外を主として $10^{-2} \geq k \geq 10^{-4}$ において、境界層および内部の代表的な動粘性係数を $\nu = 1.00$ (C.G.S.) として図示したものが、図—2である。

また計算の線形性から式 (16) の右辺第1項と第2項に実情に応じて異なる ν を用いることも可能であり、粘

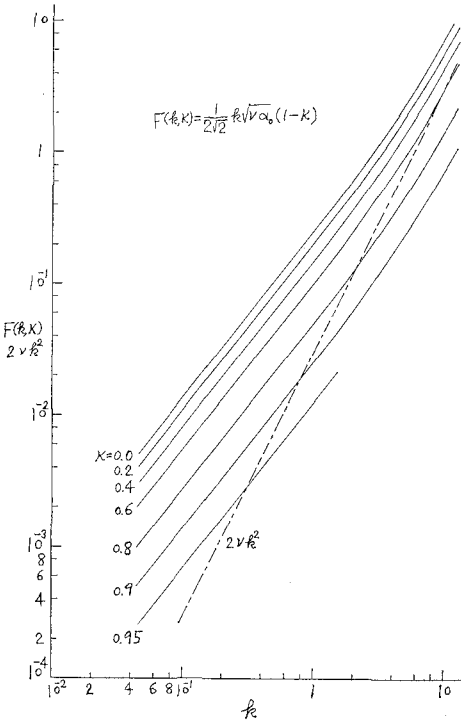


図-1 表面運動による粘性減衰 (その1)

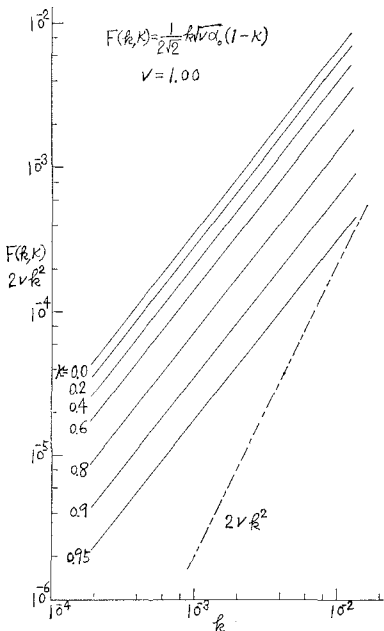


図-2 表面運動による粘性減衰 (その2)

性損失の評価式により、さらにこまかい操作もできる。たとえば図-1の場合、なにかの原因で表面付近の代表的な ν を分子動粘性係数より大きく見積る必要のあるときは、式(15)の α_r は α_0 から有意な変化をする。

図-1によれば ν を分子動粘性係数程度とする普通の模型実験の表面波でも、表面の水平流速の束縛が大きな減衰効果をもつことがわかる。表面張力波といってよい $k=10$ の場合でも、水表面の防塵に十分注意しなければ内部粘性による減衰よりも大きくなり、 $k=0.1$ ないし 0.2 のよく使用せられる程度の波長では通常表面条件では内部粘性による減衰よりはこちらの方が大きいと考えられ、表面条件が悪いときには大きな減衰を生じてしまう。

図-2では野外の波を考え、表面近傍の流れや気流の影響(それらの Reynolds 数が大きい)を考慮して概観的に $\nu=1.00$ を用いている。傾向としては図-1と全く同様であり、通常表面条件では表面流速の束縛効果が大きく、束縛が強い場合には大きな減衰を生ずる。例として $k=10^{-3}$ (波長 62.8m)、 $K=0.6$ (40%の束縛)で、同一の減衰率に要する所要時間は内部粘性によるものの $1/70$ である。

2. 表面条件の一つとして式(8)が加えられたため、表面にはたらくせん断力が現われる。 ν を分子動粘性係数、あるいは $y=0$ から水深方向に一定として計算すると、式(10)に対応する表現として

$$(\tau_{xy})_{y=0} = \rho \nu \alpha_0 e^{\alpha_0 y} \sqrt{\frac{\alpha_0}{\nu}} \alpha_0 (K-1) \cos \left(kx - \alpha_0 t - \frac{\pi}{4} \right) \dots \dots \dots (17)$$

すなわち表面の境界層の下側の流速との間に $\pi/4$ の位相差を生じ、これは $K=1$ の自由表面の場合を除いて $K=0$ から $K>1$ まで同一表現である。底の境界層の性質から考えれば、表面の境界層でも ν を y 方向に変化させれば、この位相差は変化すると思われる。

また文献3)式(10)に式(17)を用い

$$\left. \begin{aligned} N_1 &= N_{11} + iN_{12} = \rho \nu \sqrt{\frac{\alpha_0}{\nu}} \alpha_0 (K-1) e^{-i\pi/4} \\ M_1 &= M_{11} + iM_{12} = 0 \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (18)$$

とおき、計算すれば式(15)、(16)と同じ結果が得られる。分子動粘性係数の場合に限定すれば、同一の問題をとりあつかっていることとなるが、表面がゴミ等で汚染された場合は現在の取扱いの方が理解しやすい。

次に表面近傍の渦度 $\zeta = \partial v / \partial x - \partial u / \partial y$ を計算すると、 $K \neq 1$ のとき

$$\zeta = \alpha_0 e^{\alpha_0 y} \cos \left(kx - \alpha_0 t - \frac{\pi}{4} - \sqrt{\frac{\alpha_0}{2\nu}} y \right) \cdot e^{\sqrt{\frac{\alpha_0}{2\nu}} y} \cdot \alpha_0 \sqrt{\frac{\alpha_0}{\nu}} \cdot (1-K) \dots \dots \dots (19)$$

$K=1$ の自由表面の場合は

$$\zeta = \alpha_0 e^{-2\nu k^2 t} \cos \left(kx - \alpha_0 t - \sqrt{\frac{\alpha_0}{2\nu}} y \right) \cdot e^{\sqrt{\frac{\alpha_0}{2\nu}} y} \cdot 2\alpha_0 k \dots \dots \dots (20)$$

式 (19) が底が固定界面のときの底近傍の境界層と同形の渦度であることは明らかであるが、式 (20) は著者が文献5)で計算した可動床の場合の極めて動きやすい極限のときの底の近傍の渦度と同形である。

滑かな固定界面あるいはそれに近い底面の場合には、波による振動性の層流境界層の Reynolds 数がある値に達すると、その境界層が不安定となり、乱流境界層への遷移が生ずることが明らかになっているが、式 (19) の渦度からはこの表面の境界層でも同様のことがいえるのではないと思われる。束縛の程度、臨界数等今後の問題であるが、境界層 Reynolds 数としては

$$\frac{\sqrt{\frac{2\nu}{\alpha_0}} a_0 \alpha_0}{\nu} (1-K) = a_0 \sqrt{\frac{2\alpha_0}{\nu}} (1-K),$$

ν : 分子動粘性係数(21)

を用いてよいであろう。また粗な底面に相当するものとしては、表面の碎波による強制的な乱れや高周波のステーパー波が考えられる。ただし風の吹送による吹送流の存在等乱れたせん断流が考えられる場合を除く。

次に表面波の質量輸送にもとづく水面の定常せん断力 $(\bar{\tau})_{y=0}$ については、表面の水平運動の束縛あるいは増幅によって生ずるものは、これまでの計算から底の境界層の場合と同性質となることがわかる。内部粘性損失に関係する弱い渦度の項については考慮しない。文献5)において $\bar{u}^{(1)}$, $\bar{u}^{(2)}$, $\bar{u}^{(3)}$ の3つの質量輸送速度が示されているが、底の境界層では $(\partial \bar{u}^{(1)}/\partial y)_{y=0}=0$, $(\partial \bar{u}^{(2)}/\partial y)_{y=0}=0$ であるから、 $\bar{u}^{(3)}$ についてのみ計算する。

$$u \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + v \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} = \nu \frac{\partial^2 \bar{u}^{(3)}}{\partial y^2} \text{(22)}$$

を用い、積分に際して $y \rightarrow -\infty$ で $\nu \partial \bar{u}^{(3)}/\partial y = 0$ の条件を使用して計算すると、

$$\left(\nu \frac{\partial \bar{u}^{(3)}}{\partial y} \right)_{y=0} = \frac{1}{2} \nu a_0^2 e^{-(1-K)\sqrt{\frac{\alpha_0 \nu}{2}} kt} \times \alpha_0 k \left(\frac{\alpha_0}{2\nu} \right)^{1/2} (K-1) = \bar{\tau}_{y=0}/\rho \text{(23)}$$

が得られる。式 (10) からこの波の力学的エネルギーは

$$\left. \begin{aligned} E &= \frac{1}{2} \rho g a^2 = \frac{1}{2} \rho g a_0^2 e^{-(1-K)\sqrt{\frac{\alpha_0 \nu}{2}} kt} \\ \frac{\partial E}{\partial t} &= \frac{1}{2} \rho g a_0^2 (K-1) \sqrt{\frac{\alpha_0 \nu}{2}} k e^{-(1-K)\sqrt{\frac{\alpha_0 \nu}{2}} kt} \end{aligned} \right\} \text{(24)}$$

であるから、

$$\alpha_0^2 = gk, \quad \alpha_0 = kc \text{(25)}$$

を用いれば、表面波のエネルギーと運動量との関係 $E = cM$ を満足する。

$$\frac{\partial E}{\partial t} = c \bar{\tau}_{y=0} \text{(26)}$$

が得られる。

3. 次に表面波の上を風が吹送する場合を考える。有限振幅の進行波としては、同方向の風の吹送による水面に働くせん断力は波の頂き付近で大きく、谷の付近で小となることが実験 [文献6) Fig. 6, Fig. 9 等] および理論的な解析 [文献7) 本文および Fig. 5 等] により示されている。

これと波による水粒子運動の方向とをあわせ考えれば波運動のみについては $K > 1$ の場合となる。簡単な例として、

$$u = F(t) \cos t, \quad F(t) = 1 + F_1(t) \text{(27)}$$

とおき

$$\left. \begin{aligned} F_1(t) &= a, \quad -\frac{\pi}{2} \pm 2n\pi \leq t \leq \frac{\pi}{2} \pm 2n\pi \\ &= 0, \quad \frac{\pi}{2} \pm 2n\pi \leq t \leq \frac{3}{2} \pi \pm 2n\pi \end{aligned} \right\} \text{(28)}$$

とすれば

$$\begin{aligned} u &= F(t) \cos t = \frac{a}{\pi} + \left(1 + \frac{a}{2}\right) \cos t + \frac{2}{3} \frac{a}{\pi} \cos \times \\ &2t - \frac{2}{15} \frac{a}{\pi} \cos 4t + \dots \text{(29)} \end{aligned}$$

文献6) Fig. 6 を参照すれば現実の海面でも $a/2 = 0.1$ すなわち $K = 1.1$ 程度の場合が十分考えられる。

文献8)式 (101) を参照し、いま考えられる造波機構と J. W. Miles の β 要素による造波機構との比は

$$(K-1)\nu^{1/2} \frac{1}{\sqrt{2}} g^{1/2} c^{1/2} / \frac{\rho_a}{\rho_w} \left(\frac{U_1}{c} \right)^2 c^2 \beta \dots \text{ (30)}$$

により与えられる。波長 100 cm, 5 000 cm, $\nu = 1, 0.01$ (C.G.S.) $K = 1.1$, $U_1 = 150$ cm/sec., 300 cm/sec. の場合を数値計算すると表-1 の結果となる。 β の値は文献9)によるものを使用した。

表-1 ($\rho_a/\rho_w = 0.00126$)

	模 型		現 地	
L cm	100	100	5 000	5 000
U_1 cm/sec.	150	300	150	300
G cm/sec.	124.9	124.9	883.1	883.1
β	3.6	3.8	1.5	2.9
式(30), $\nu = 1$	0.241	0.0572	1.542	0.199
" , $\nu = 0.01$	0.0241	0.00572	0.154	0.0199

波長 5 000 cm の実海面の場合、上記の U_1 からすれば表面境界層の波運動に対する代表的な ν は 1 あるいはそれより大きいかも知れない。したがって Miles の理論と同じ位数の造波力が現在の計算によって考えられる。普通の模型実験では ν は 1 より小で、むしろ分子動粘性係数に近いとすれば、この計算による造波力は無視できる。

逆風による減衰効果 ($0 \leq K \leq 1$)、あるいは模型実験

の際の水面の汚れによる造波にたいする抑制効果も同様に計算できる。

以上現象としてまだ明確になっていない表面の乱流境界層の条件を含むため試論として発表する。

記号表 (単位 C.G.S.)

- x : 静水面で波の進行方向にとられた水平軸
- y : 静水面を原点とする垂直軸
- u : 波による x 方向速度
- v : 波による y 方向速度
- η : 波による表面水位
- μ : 粘性係数
- ν : 動粘性係数
- a_0 : 水面における初期半振幅
- α_0 : 非粘性の実周波数
- k : 波数
- E : 単位面積あたりの波のエネルギー
- U_1 : $U_*/0.4$ (文献9)その他, 0.4はKármán定数)
- β : J. W. Miles により与えられた水面にはたらく垂直圧力による造波要素 (文献10) およびその参考文献)

参 考 文 献

- 1) Lamb, H: Hydrodynamics, Cambridge University Press, sixth edition, 1932.
- 2) Van Dorn, W. G.: Boundary dissipation of oscillatory waves, J. Fluid Mech. Vol. 24, part 4, pp. 769~779, 1966.
- 3) Hamada, T., A. Shibayama and H. Kato: An experimental study of development of wind waves, Report of Port and Harbour Tech. Res. Inst., No. 2, 1963.
- 4) Longuet-Higgins, M. S.: Action of a variable stress at the surface of water waves, The Physics of Fluids, Vol. 12, No. 4, pp. 737~740, 1969.
- 5) 浜田徳一: 表面波の質量輸送について, 第17回海岸工学講演会論文集, pp. 53~57, 1970.
- 6) Schooley, A. H.: Simple tools for measuring wind fields above wind-generated water waves, J. Geophysical Res., Vol. 68, No. 19, pp. 5497~5504, 1963.
- 7) Gent, P. R. and P. A. Taylor: A numerical model of the air flow above water waves, J. Fluid Mech., Vol. 77, Part 1, pp. 105~128, 1976.
- 8) 浜田徳一: 水波上の風の性質について, 港湾技術研究所報告, 第7巻第4号, pp. 3~22, 1968.
- 9) Conte, S. D. and J. W. Miles: On the numerical integration of the Orr-Sommerfeld equation, J. Soc. Indust. Appl. Math., Vol. 7, No. 4, pp. 361~366, 1959.
- 10) Valenzuela, G. R.: The growth of gravity-capillary waves in a coupled shear flow, J. Fluid Mech., Vol. 76, Part 2, pp. 229~250, 1976.