

船舶の接岸時付加質量 (2)

高 隆 二*

1. 緒 言

船舶の接岸時付加質量の根源を船側から伝播する正負段波とし、通水性けい船岸¹⁾に引き続き、従来理論的に全く解明されていない遮水性けい船岸の付加質量を算定する。

2. 船舶背面の流れ

複素半平面上で、中心位置 $-ia$ ($a>1$), y の正方向に速度 V_* で進む閉曲線が単位になった瞬間の流れは、鏡像を用いて複素ポテンシャル

$$F(z) = \frac{iV_0}{z-ia} - \frac{iV_0}{z+ia} = -\frac{2V_0a}{z^2+a^2} \quad \dots\dots\dots (1)$$

$$V_0 = \left(1 - \frac{1}{4a^2}\right)^2 \left/\left(1 + \frac{3}{4a^2}\right)^{-1}\right. V_*$$

で表わされる²⁾。

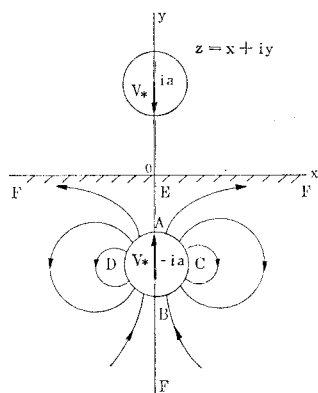


図-1 単位円周辺の流れ

x 軸以下, z の半平面を ζ 面の単位円に写像するため

$$\zeta = e^{-i\lambda} \frac{z-p}{z-\bar{p}} \quad \dots\dots\dots (2)$$

とおく³⁾ (λ, p : 未知数)。

$$E: z=0 \quad \zeta=1$$

$$\therefore \bar{p} = e^{-i\lambda} p \quad \dots\dots\dots (3)$$

$$F: z=\infty \quad \zeta=-1$$

$$\therefore \lambda = \pi \quad \dots\dots\dots (4)$$

$p = a_1 + ib_1$ とおき, 式 (3), (4) から

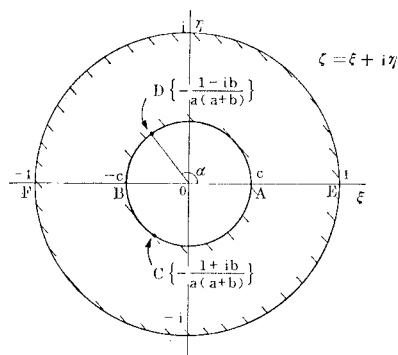


図-2 ζ 面への写像

$$a_1 - ib_1 = e^{-i\pi}(a_1 + ib_1) = -a_1 - ib_1$$

$$\therefore a_1 = 0 \quad \dots\dots\dots (5)$$

すなわち p は虚数であり, 式 (2) は,

$$\zeta = -\frac{z-ib_1}{z+ib_1} \quad \dots\dots\dots (6)$$

となる。 $\zeta=0$ に対応する $z=ib_1$ は z の下半平面に含まれるから, $b_1 = -b < 0$ として

$$\zeta = -\frac{z+ib}{z-ib} \quad \dots\dots\dots (6)$$

書ける。

z 面の単位円を ζ 面上半径 c (実数) の同心円に写像するには,

$$A: z = -ia + i \quad \zeta = c$$

$$\therefore c = -\frac{-ia+i+ib}{-ia+i-ib} = -\frac{a-1-b}{a-1+b} \quad \dots\dots\dots (7)$$

とし, $c>0$ であるためには,

$$b > a-1 \quad \dots\dots\dots (8)$$

$$B: z = -ia - i \quad \zeta = -c$$

$$\therefore -c = -\frac{-ia-i+ib}{-ia-i-ib} = -\frac{a+1-b}{a+1+b} \quad \dots\dots\dots (9)$$

$c>0$ であるから

$$b < a+1 \quad \dots\dots\dots (10)$$

式 (8) とあわせて

$$a-1 < b < a+1 \quad \dots\dots\dots (11)$$

式 (7), (9) より

$$\left. \begin{aligned} b &= \sqrt{a^2-1} \\ c &= a-b \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots\dots (12)$$

であり

$$C: z = 1 - ia \quad \zeta = -(1 + ib)/a(a + b)$$

$$D: z = -1 - ia \quad \zeta = -(1 - ib)/a(a + b)$$

となる。

ζ 面の円環を

$$w = \log \zeta \dots (13)$$

により w 面の矩形に写像

する。外円 $\zeta = e^{i\theta}$ は $w = i\theta$

に写され、

$$E: \theta = 0 \quad w = 0$$

$$F: \theta = \pi \quad w = i\pi$$

内円 $\zeta = ce^{i\theta}$ は $w = \log c + i\theta$

$$A: \theta = 0 \quad w = \log c$$

$$B: \theta = \pi \quad w = \log c + i\pi$$

$$D: \theta = -\tan^{-1} b \equiv \alpha \dots (14)$$

$$w = \log c + i\alpha \quad \left(\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi \right)$$

に写像される。

w 面の矩形 $EAA'E'$ を Z 面の上半面に写像するために Schwarz-Christoffel の写像

$$w = kA \int_0^Z \frac{dZ}{\sqrt{(1-Z^2)(1-k^2Z^2)}} + B \dots (15)$$

を用いる (A, B : 定数)。

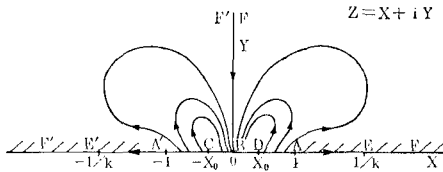


図-4 Z 面への写像

$$B: w = \log c + i\pi \quad Z = 0$$

$$\therefore B = \log c + i\pi \dots (16)$$

$$A: w = \log c \quad Z = 1$$

$$\log c = kA \int_0^1 f(Z) dZ + \log c + i\pi$$

$$\int_0^1 \frac{dZ}{\sqrt{(1-Z^2)(1-k^2Z^2)}} = \int_0^1 f(Z) dZ = K \dots (17)$$

の第1種完全楕円積分となる⁴⁾。

$$\therefore A = -\frac{\pi}{kK} i \dots (18)$$

$$A': w = \log c + 2\pi i \quad Z = -1$$

$$\log c + 2\pi i = kA \int_0^{-1} f(Z) dZ + \log c + \pi i$$

$$\int_0^{-1} f(X) dX = -\int_0^1 f(X) dX = -K \dots (19)$$

であり、上と同じ結果を得る。

$$D: w = \log c + i\alpha \quad Z = X_0 > 0 \text{ とする。}$$

$$\log c + i\alpha = kA \int_0^{X_0} f(X) dX + \log c + i\pi$$

$$\left. \begin{aligned} \int_0^{X_0} f(X) dX &= K \left(1 - \frac{\alpha}{\pi} \right) \\ \text{あるいは Jacobi の楕円関数} & \dots (20) \\ X_0 &= \operatorname{sn} \left\{ K \left(1 - \frac{\alpha}{\pi} \right) \right\} \end{aligned} \right\}$$

で表わされる。

$$C: w = \log c + i(2\pi - \alpha) \quad Z = -X_0$$

$$\log c + i(2\pi - \alpha) = kA \int_0^{-X_0} f(X) dX + \log c + i\pi$$

式 (20) と同じである。

$$E: w = 0 \quad Z = 1/k$$

$$0 = kA \int_0^{1/k} f(Z) dZ + \log c + i\pi$$

$$\int_0^{1/k} f(Z) dZ = \int_0^1 f(Z) dZ + \int_1^{1/k} f(Z) dZ = K + iK' \dots (21)$$

となる (K' : 第1種補完全楕円積分)。

$$0 = -\frac{\pi}{K} i(K + iK') + \log c + i\pi$$

$$\therefore \frac{K'}{K} = -\frac{1}{\pi} \log c \dots (22)$$

これから母数 k は定まる。

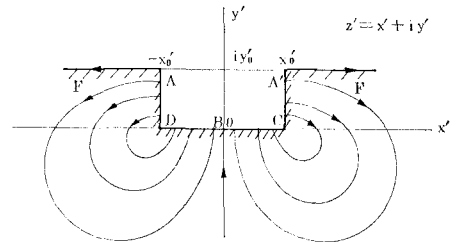


図-5 z' 面への写像

Z 面の上半面を z' 面に写像するために再び Schwarz-Christoffel の写像を利用する。 z' は

$$z' = C \int_0^Z \frac{dZ}{\sqrt{(Z+X_0)^{-1/2}(Z-X_0)^{-1/2}(Z+1)^{1/2}(Z-1)^{1/2}}} + D = \frac{C}{k_0} \int_0^Z \sqrt{\frac{1-k_0^2Z^2}{1-Z^2}} dZ + D \dots (23)$$

の第2種楕円積分で表わされる (C, D : 定数, $k_0 = 1/X_0$)。ここで母数 $k_0 > 1$ を通常の表示 $k_1 < 1$ に書き直すために

$$k_0 = \frac{1}{X_0} = \frac{1}{k_1}, \quad k_0 Z = X \dots (24)$$

と変数を変換する。

$$\begin{aligned} \int_0^Z \sqrt{\frac{1-k_0^2Z^2}{1-Z^2}} dZ &= -\frac{1-k_1}{k_1} \int_0^X \frac{dX}{\sqrt{(1-X^2)(1-k_1X^2)}} \\ &+ \frac{1}{k_1} \int_0^X \sqrt{\frac{1-k_1X^2}{1-X^2}} dX \dots (25) \end{aligned}$$

と第2種および第1種楕円積分で表わさる⁵⁾。

$$g(X) = \sqrt{\frac{1-k_1 X^2}{1-X^2}} \dots\dots\dots (26)$$

とおき、式(23)の定数は

$$B: Z=0 \quad X=0 \quad \text{で} \quad z'=0 \quad \therefore D=0 \dots\dots\dots (27)$$

$$D: Z=X_0 \quad X=1 \quad \text{で} \quad z'=-x'_0$$

$$\therefore C = \frac{x'_0}{(1-k_1)K-E} \dots\dots\dots (28)$$

と定まる(E : 第2種完全楕円積分)。図-5を参照し、偏角の変化を考慮して

$$A: Z=1 \quad X=1/k_1 \quad \text{で} \quad z'=-x'_0+iy'_0$$

$$-x'_0+iy'_0 = \frac{x'_0}{(1-k_1)K-E} \{ -(1-k_1)(K-iK') + E-iE' \}$$

$$\therefore \frac{y'_0}{x'_0} = \frac{(1-k_1)K'-E'}{(1-k_1)K-E} \dots\dots\dots (29)$$

となる(E' : 第2種補完全楕円積分)。

最後に、対象とする物理面、すなわち無限長遮水性繋船岸(以下、岸壁と呼称)に適用する(接岸距離 c_0 、船長 l)。

$$x'_0 = \frac{l}{2}, \quad y'_0 = c_0 \dots\dots\dots (30)$$

とし、式(29)から母数 k_1 、式(24)で $k_0=1/X_0$ を求め、式(20)、(22)で K, K' は k {式(24)とは別}の関数、 c は式(12)で a の関数となるから、連立させて k, a を定める。式(1)で表わされる複素ポテンシャルから出発し、 $V_B = i(dF/dz)_{z=-i(a+1)} \left(= \frac{1-(3/4a^2)+(1/4a^3)}{(1-(1/4a^2))^2} V_0 \right)$ を $v_B = i(dF/dz')_{z'=0}$ より決定し

$$\frac{dF}{dz'} = \frac{dF}{dz} \frac{dz}{d\zeta} \frac{d\zeta}{dw} \frac{dw}{dZ} \frac{dZ}{dz'} = Ve^{-i\theta} \dots\dots (31)$$

により、 z' 面の速度 $Ve^{i\theta}$ (V : 流速、 θ : 偏角)は算定される。

なお、 $x \geq 1/k$ の範囲では

$$\left. \begin{aligned} \int_{1/k}^x f(x)dx &= K - F\left(k, \frac{1}{kx}\right) \\ \int_{1/k}^x g(x)dx &= i \left[F\left(k', \frac{1}{k'} \sqrt{1-\frac{1}{x^2}}\right) - F(k', 1) \right. \\ &\quad \left. + \left(\frac{k}{k'}\right)^2 \left\{ \Pi\left(k', \frac{1}{k'} \sqrt{1-\frac{1}{x^2}}, \frac{1}{k'}\right) - \Pi\left(k', 1, \frac{1}{k'}\right) \right\} \right] \end{aligned} \right\}$$

と第2種および第3種楕円積分

$$\left. \begin{aligned} F(k, x) &= \int_0^x f(x)dx \\ \Pi(k, x, a) &= \int_0^x \frac{f(x)dx}{x^2-a^2} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (33)$$

で表示される。

3. 船舶前面の流れ

船舶前面に発生する負段波が岸壁に達する時間は、接

岸に要する時間に比してきわめて短いので、岸壁・船側間の水位は一樣に低下し始める。

接岸速度 v_* 、接岸時に岸壁と船岸との距離 c_0 、防衝工により減速中の速度及び距離 v, c を用いて、図-6の微小区域ABCDに関する連続方程式は

$$v_* dx = c_0 du_0$$

$$\therefore u_0(x) = \frac{v_*}{c_0} x \dots\dots\dots (34)$$

と表わされ、 u_0 は岸壁と平行な接岸時流速である。慣性運動を続けければ、接岸時 x_0 に位置した粒子は時刻 t で x に達し、船側沿いの流速 $u(x, t)$ も定まる。

$$t = \int_{x_0}^x \frac{dx}{u_0(x)} \quad \therefore x_0 = x e^{-(v_*/c_0)t} \dots\dots\dots (35)$$

$$u(x, t) = u_0(x_0) = \frac{v_*}{c_0} x e^{-(v_*/c_0)t} \dots\dots\dots (36)$$

連続条件より導かれた水位低下は一樣になる。

$$-cdx \cdot dz = h \left(v dx - c \frac{\partial u}{\partial x} dx \right) dt$$

$$\therefore z(t) = h \left\{ 1 - e^{-(v/c_0)t} + \log \frac{c(t)}{c_0} \right\} \dots\dots (37)$$

船首尾で誘発される段波は、船側中央に向い図-7のI IIからI' II'へ速さ $\omega - u(X)$ で進行し、低下水面を埋めて行く(ω : 静水中の段波波速)。船舶前面の圧力は、

$$P_i(t) = \rho g h z(t) X(t) \dots\dots\dots (38)$$

となる。 $u\left(\frac{l}{2}, t_0\right) = \omega = \sqrt{gh} \left(t_0 = \frac{c_0}{v_*} \log \frac{v_* l}{2\omega c_0} \geq 0 \right)$ とすると

$$\begin{aligned} X(t) &= l - 2 \int_{t_0}^t \left\{ \omega - u\left(\frac{X}{2}\right) \right\} dt \\ &= l - 2\omega(t-t_0) + \frac{v_*}{c_0} \int_{t_0}^t X(t) e^{-(v_*/c_0)t} dt \end{aligned}$$

微分して初期条件 $X(t_0)=l$ を満たす解

$$X(t) = l e^{-\tau} [e^{\tau_0} + \tau_0 \{ E_i(-\tau) - E_i(-\tau_0) \}] \dots\dots (39)$$

を得る(積分指数: $E_i(-x) = -\int_x^\infty \frac{e^{-t}}{t} dt$, $\tau = e^{-(v_*/c_0)t}$, $\tau_0 = \tau(t_0)$)。

4. 船舶の運動

栈橋と同様、船舶の運動方程式は、変位 s に関し

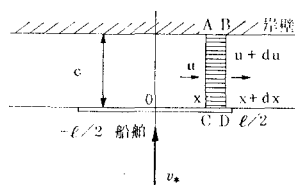


図-6 船舶・岸壁間の流れ

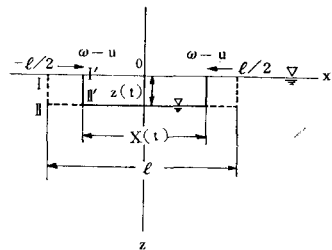


図-7 船首尾からの段波

$$m \frac{d^2 s(t)}{dt^2} - P(t) + K(s)s(t) = 0 \quad (40)$$

で表現される¹⁾ (m : 船舶の質量, $K(s)$: 防衛工のばね定数)。圧力 $P(t) = P_0(t) - P_i(t)$ は, 船舶背面の圧力と平均流速

$$\left. \begin{aligned} P_0(t) &= \frac{\rho g h l \{h(v_0 - v) - q_0\}}{\omega} = \frac{\rho g h^2 l (v_0 - v)}{\omega} \\ v_0(y') &= -\frac{1}{l} \int_{-l/2}^{l/2} I \left(\frac{dF}{dz'} \right) dx' \quad (I: \text{虚数部}) \end{aligned} \right\} \quad (41)$$

及び式 (37) から算出する。ただし, 変数 y' を時刻

$$t = \int_0^{y'} \frac{dy'}{v_0(y')} \quad (42)$$

で置き換える。式 (39) は, $s(t) = c_0 - c(t)$ とし非線形方程式

$$\begin{aligned} m \frac{d^2 c(t)}{dt^2} + \frac{\rho g h^2 l}{\omega} \frac{dc(t)}{dt} - \rho g h^2 l e^{-\tau} [e^{\tau_0} \\ + \tau_0 \{E_i(-\tau) - E_i(-\tau_0)\}] \log c(t) + \{c_0 \\ - c(t)\} K(c_0 - c) = \rho g h^2 l \left\{ e^{-\tau} [e^{\tau_0} + \tau_0 \{E_i(-\tau) \right. \\ \left. - E_i(-\tau_0)\}] (1 - \tau - \log c_0) - \frac{v_0}{\omega} \right\} \quad (43) \end{aligned}$$

で与えられ, 初期条件

$$t=0 \text{ で } c=c_0, v=v_*, s=0 \quad (44)$$

の下に解く。最大変位を $s_{\max}$ とすると, 付加質量係数は

$$C_M = \frac{2}{mv_*^2} \int_0^{s_{\max}} K(s)s ds - 1 \quad (45)$$

で算定される。

5. 結 言

一般に棧橋より高い付加質量を有する岸壁に対し, 付加質量係数を近似的に算出した。棧橋との相違は, 主に船舶・岸壁間の急激な一様水位低下に起因すると推察される。棧橋において理論と実測の不一致は余裕水深の影響と見られ, 岸壁も含め今後の課題としたい。

参 考 文 献

- 1) 高 隆二・田川昌宏: 船舶の接岸時付加質量, 第22回海岸工学講演会論文集, 1975.
- 2) 藤本武助: 流体力学, 養賢堂, 1957.
- 3) 鬼頭史城: 等写像とその応用, オーム社, 1965.
- 4) 寺沢寛一: 数学概論, 岩波書店, 1960.
- 5) 石津武彦・斎藤 修: 関数論とその応用, コロナ社, 1958.