

有限要素法と摂動法を用いた流動および拡散計算手法の開発

川原 睦人*・川上 俊雄**・船越 晴世***・長谷川 賢一****

1. ま え が き

海水の流動および汚染拡散を予測するための数値計算手法としては、空間方向および時間方向ともに、差分法による離散化を行うケースが多く見られる。これに対して、構造物の解析などでは、有限要素法による数値計算が現在まで広く行われてきている。これは流動計算における非定常項の処理が有限要素法では困難なため、有限要素法の流動計算への適用をはばんできたためと考えられる。しかし有限要素法は複雑な形状をした対象領域を無理なく表現でき、要素分割を目的に応じて細かくしたり粗くしたりすることができる、といった利点をもっている。

そこで、今回有限要素法による海水の流動および物質と温排水の拡散の数値計算を行うことを試みた。すなわち、流動計算において、空間方向には有限要素法のうち Garelkin 法による離散化を行い、また時間方向には摂動法による解法を試みた。また、拡散計算においては、空間方向には流動計算と同一の手法を用いたが、時間方向には Two Step の Lax-Wendroff 法による離散化を行った。

これらの手法の有効性を確認するため、一層流のシミュレーション・プログラムを作成し、むつ小川原地区をモデルに数値計算を行った。

2. 基礎方程式

流動計算に用いる基礎方程式は、非圧縮性の仮定に基づき浅海長波として

取り扱う。本文で用いる座標系は、図-1のごとく、 x, y 軸を静水面にとり、 z 軸を鉛直上方にとる。また、 $\eta(x, y, t)$ を静水面からの変動

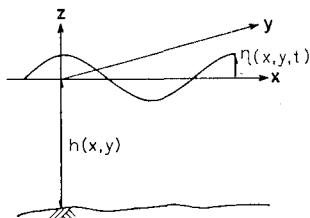


図-1 座標系

量、 $h(x, y)$ を平均水深とする。

浅海長波の基礎方程式は次式のように表わされる¹⁾。

$$\eta_{,i} + \{(\eta + h)u_i\}_{,i} = 0 \quad \dots\dots\dots (1)$$

$$u_{i,i} + u_j u_{i,j} + g\eta_{,i} - \mu u_{i,jj} = 0 \quad \dots\dots\dots (2)$$

ここに、 u_i は平均流速、 μ は動粘性係数、 g は重力の加速度とする。また、 $(\quad)_{,i}$ は i 方向に関する偏微分を意味し、同一項に同じ添字が繰返して現われる場合は、総和規約が適用されるものとする。

境界条件としては、流速あるいは潮位変動量が与えられると考え、次のように仮定する。

$$\left. \begin{aligned} u_i &= \hat{u}_i && (\text{与えられた一定値}) && (\text{境界 } s_1 \text{ 上}) \\ \eta &= \hat{\eta} && (\text{与えられた一定値}) && (\text{境界 } s_2 \text{ 上}) \\ u_n &= 0 && && (\text{陸岸境界上}) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (3)$$

すなわち、与えられた問題は、式 (3) の境界条件のもとに、式 (1), (2) の非線形連立方程式を解く問題に帰着される。

基礎方程式 (1), (2) には、非線形項が含まれているので、有限要素法の解式を得るのに、Garelkin 法による定式化を試みる。値の与えられた境界では 0 であるが、その他の領域では、任意の値をとるような重み関数 η^*, u_i^* を、それぞれ式 (1), (2) にかけて領域 V について積分すると、次のような変分方程式を得る。

$$\int_V \eta^* \eta_{,i} dV + \int_V \eta^* \{(\eta + h)u_i\}_{,i} dV = 0 \quad \dots\dots\dots (4)$$

$$\int_V u_i^* u_{i,i} dV + \int_V u_i^* u_j u_{i,j} dV + g \int_V u_i^* \eta_{,i} dV - \mu \int_V u_i^* u_{i,jj} dV = 0 \quad \dots\dots\dots (5)$$

有限要素法で上式を離散化するに際して、与えられた領域を三角形要素で分割し、三角形領域内部の値を、図-2 に示すように、三角形の頂点および中間節点の値を用いて次のよ

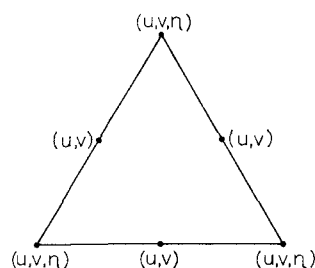


図-2 有限要素

* 正会員 工博 中央大学助教授 理工学部土木工学科
 ** 正会員 前運輸省第二港湾建設局横浜調査設計事務所調査課長
 *** 正会員 運輸省第二港湾建設局横浜調査設計事務所
 **** 正会員 (株) ユニックス 研究開発部

うに内挿補間する。

$$\eta = \phi_\alpha \eta_\alpha, \quad \eta^* = \phi_\alpha \eta_\alpha^* \quad \dots\dots\dots (6)$$

$$u_i = \Psi_\alpha u_{\alpha i}, \quad u_i^* = \Psi_\alpha u_{\alpha i}^* \quad \dots\dots\dots (7)$$

ここに、 ϕ_α および Ψ_α はそれぞれ、一次および二次の形状関数である。式 (4), (5) の積分領域として、一つの三角形要素をとり、式 (6), (7) を代入して整理すると次式を得る。

$$A_{\lambda\mu} \eta_{\mu,t} + B_{\lambda\beta j\mu} u_{\beta j} (\eta_\mu + h_\mu) = 0 \quad \dots\dots\dots (8)$$

$$M_{\alpha\beta} u_{\beta i,t} + K_{\alpha\beta j} u_{\beta j} u_{\gamma i} + S_{\alpha\beta j} u_{\beta i} + H_{\alpha\mu} \eta_\mu = 0 \quad \dots\dots\dots (9)$$

ここで

$$\left. \begin{aligned} A_{\lambda\mu} &= \int_V (\phi_\lambda \phi_\mu) dV \\ B_{\lambda\beta j\mu} &= \int_V \{ \phi_\lambda (\phi_\mu \Psi_{\beta j}) \} dV \\ M_{\alpha\beta} &= \int_V (\Psi_\alpha \Psi_\beta) dV \\ K_{\alpha\beta j} &= \int_V (\Psi_\alpha \Psi_\beta \Psi_{\gamma j}) dV \\ S_{\alpha\beta j} &= -\mu \int_V (\Psi_\alpha \Psi_\beta \Psi_{\gamma j}) dV \\ H_{\alpha\mu} &= g \int_V (\Psi_\alpha \phi_\mu) dV \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots\dots (10)$$

式 (8), (9) により空間方向の離散化がなされたが、これらの方程式は、非定常項を含んでいるため、摂動法による非定常項の近似を試みる²⁾。すなわち、 $\eta_\mu, u_{\alpha i}$ は次のように表わされるものとする。

$$\left. \begin{aligned} \eta_\mu &= \eta_\mu^{(0)} + \varepsilon \eta_\mu^{(1)} + \varepsilon^2 \eta_\mu^{(2)} + \dots \\ u_{\alpha i} &= u_{\alpha i}^{(0)} + \varepsilon u_{\alpha i}^{(1)} + \varepsilon^2 u_{\alpha i}^{(2)} + \dots \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots\dots (11)$$

式 (11) を式 (8), (9) に代入して整理すると、結局オーダーごとに次のように表わされる。

0 次のオーダー：

$$\left. \begin{aligned} B_{\lambda\beta j\mu} u_{\beta j}^{(0)} (\eta_\mu^{(0)} + h_\mu) &= \hat{\Gamma}_\lambda^{(0)} \\ K_{\alpha\beta j} u_{\beta j}^{(0)} u_{\gamma i}^{(0)} + S_{\alpha\beta j} u_{\beta i}^{(0)} + H_{\alpha\mu} \eta_\mu^{(0)} &= \hat{\Sigma}_\alpha^{(0)} \end{aligned} \right\} \quad (12)$$

1 次のオーダー：

$$\left. \begin{aligned} A_{\lambda\mu} \eta_{\mu,t}^{(1)} + B_{\lambda\beta j\mu} u_{\beta j}^{(0)} \eta_\mu^{(1)} + B_{\lambda\beta j\mu} u_{\beta j}^{(1)} \eta_\mu^{(0)} &= \hat{\Gamma}_\lambda^{(1)} \\ M_{\alpha\beta} u_{\beta i,t}^{(1)} + K_{\alpha\beta j} u_{\beta j}^{(0)} u_{\gamma i}^{(1)} + K_{\alpha\beta j} u_{\beta j}^{(1)} u_{\gamma i}^{(0)} \\ + S_{\alpha\beta j} u_{\beta i}^{(1)} + H_{\alpha\mu} \eta_\mu^{(1)} &= \hat{\Sigma}_\alpha^{(1)} \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots\dots (13)$$

n 次のオーダー：

$$\left. \begin{aligned} A_{\lambda\mu} \eta_{\mu,t}^{(n)} + B_{\lambda\beta j\mu} u_{\beta j}^{(0)} \eta_\mu^{(n)} + B_{\lambda\beta j\mu} u_{\beta j}^{(n)} \eta_\mu^{(0)} \\ = \Gamma_\lambda^{(n)} - \sum_{r=1}^{n-1} B_{\lambda\beta j\mu} u_{\beta j}^{(r)} \eta_\mu^{(n-r)} \\ M_{\alpha\beta} u_{\beta i,t}^{(n)} + K_{\alpha\beta j} u_{\beta j}^{(0)} u_{\gamma i}^{(n)} + K_{\alpha\beta j} u_{\beta j}^{(n)} u_{\gamma i}^{(0)} \\ + S_{\alpha\beta j} u_{\beta i}^{(n)} + H_{\alpha\mu} \eta_\mu^{(n)} \\ = \Sigma_\alpha^{(n)} - \sum_{r=1}^{n-1} K_{\alpha\beta j} u_{\beta j}^{(r)} u_{\gamma i}^{(n-r)} \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots\dots (14)$$

ここで、与えられた問題が浅海長波の方程式であることを考え、 u, η をそれぞれ Fourier 級数展開し、その未定係数の解析解を求めることを試みる。1 次のオーダーに関する方程式を整理すると次式ようになる。

$$\left. \begin{aligned} A_{\lambda\mu} \eta_{\mu,t} + C_{\lambda\mu} \eta_\mu + D_{\lambda\beta} u_\beta &= \hat{\Gamma}_\lambda \\ M_{\alpha\beta} u_{\beta,t} + N_{\alpha\beta} u_\beta + H_{\alpha\mu} \eta_\mu &= \hat{\Sigma}_\alpha \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots\dots (15)$$

ここで

$$\left. \begin{aligned} C_{\lambda\mu} &= B_{\lambda\beta j\mu} u_{\beta j}^{(0)} \\ D_{\lambda\beta} &= B_{\lambda\beta j\mu} \eta_\mu^{(0)} \\ N_{\alpha\beta} &= K_{\alpha\beta j} u_{\gamma i}^{(0)} + K_{\alpha\gamma j} u_{\beta i}^{(0)} + S_{\alpha\beta} \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots\dots (16)$$

ここで、 $\hat{\Gamma}_\lambda, \hat{\Sigma}_\alpha, \eta_\mu, u_\beta$ などを ω を角振動数として、次のように仮定する。

$$\left. \begin{aligned} \hat{\Gamma}_\lambda &= \hat{\Gamma}_{\lambda s} \sin \omega t + \hat{\Gamma}_{\lambda c} \cos \omega t \\ \hat{\Sigma}_\alpha &= \hat{\Sigma}_{\alpha s} \sin \omega t + \hat{\Sigma}_{\alpha c} \cos \omega t \\ \eta_\mu &= a_\mu \sin \omega t + b_\mu \cos \omega t \\ u_\beta &= c_\beta \sin \omega t + d_\beta \cos \omega t \\ \eta_{\mu,t} &= \omega a_\mu \cos \omega t - \omega b_\mu \sin \omega t \\ u_{\beta,t} &= \omega c_\beta \cos \omega t - \omega d_\beta \sin \omega t \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots\dots (17)$$

式 (17) を式 (15) に代入し、マトリックス表示すると、次のような線形一次方程式で表わされる。

$$\begin{pmatrix} \omega A_{\lambda\mu} & C_{\lambda\mu} & D_{\lambda\beta} \\ C_{\lambda\mu} & -\omega A_{\lambda\mu} & D_{\lambda\beta} \\ H_{\alpha\mu} & N_{\alpha\beta} & -\omega M_{\alpha\beta} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_\mu \\ b_\mu \\ c_\beta \\ d_\beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \hat{\Sigma}_{\lambda c} \\ \hat{\Gamma}_{\lambda s} \\ \hat{\Sigma}_{\alpha c} \end{pmatrix} \quad \dots\dots\dots (18)$$

以上より明らかなように、0 次オーダーの方程式は定常流の有限要素方程式であり、この非線形方程式については、すでにいくつかの計算方法が提案されている。0 次オーダーの解が得られると、1 次オーダー以下の解を求めることが可能となる。このように、Fourier 級数展開によって非定常項の仮定を行えば、任意時刻での流れの場を短い計算時間で容易に求めることができる。

拡散現象の基礎方程式には、非保存系の物質拡散方程式および温度拡散方程式を用いた。すなわち、物質拡散方程式には次式を用いた³⁾。

$$\begin{aligned} (HS)_{,t} &= -(Hu_j S)_{,j} + (kHS)_{,j,j} \\ &\quad - (k_1 + k_3)HS + HS_a \quad \dots\dots\dots (19) \end{aligned}$$

ここに

- S : 汚染物質濃度
- k : 拡散係数
- k_1 : 自己減衰係数
- k_3 : 沈澱・吸着等により汚染物質が海水から除去される割合
- S_a : 汚染物質の負荷量
- H : 水深 ($\eta + h$)

とする。

また、温度拡散方程式としては次式を用いた⁴⁾。

$$T_{i,j} = -u_j T_{j,j} + \frac{k}{\rho CH} (HT_{i,j})_{j,j} + \frac{Q_0}{\rho CH} \dots\dots (20)$$

ここに、

T : 水温

k : 熱伝導係数

C : 水の比熱

Q_0 : 表面における熱交換量

とする。

拡散現象のこれらの基礎方程式の離散化は、空間方向には、流動計算と同様に有限要素法の Garelkin 法を適用し、一次の形状関数を用いて行った。また時間方向には、差分法における Two-Step の Lax-Wendroff 法を用いて行った。

3. 計算例

以上述べた方法を用いて、一層流のシミュレーションプログラムを作成し、むつ小川原地区を対象に数値計算を行った。

当地区は、下北半島の南東部に位置し、陸岸に平行な南向きの恒流が卓越した海域で、観測値をみると、恒流成分としては、夏期 5~40 cm/sec⁵⁾、冬期 5~10 cm/sec⁶⁾ の平均流が観測されている。

計算は夏期について行った。計算に用いた平面形状は、机上計算のみを目的として、当地区に沼地を利用した掘込港湾と防波堤を設けた場合を想定した。対象領域を要素分割したものを 図-3 に示す。水深は湾内で 5~

24 m、港外で最大 50 m である。

流動計算を行うにあたって、0 次オーダーの非線形方程式の計算は Newton-Raphson 法を用いて行った⁷⁾。境界条件としては、恒流成分を表わす 0 次オーダーは流速と潮位で与え、1 次オーダーは 12 時間周期の潮位振幅を正弦波で与えた。また、防波堤の境界条件は陸岸と同一とし、法線に直交する流速を 0 とした。計算結果を 図-4 に示す。図は漲潮時の流れであるが、防波堤の外側では恒

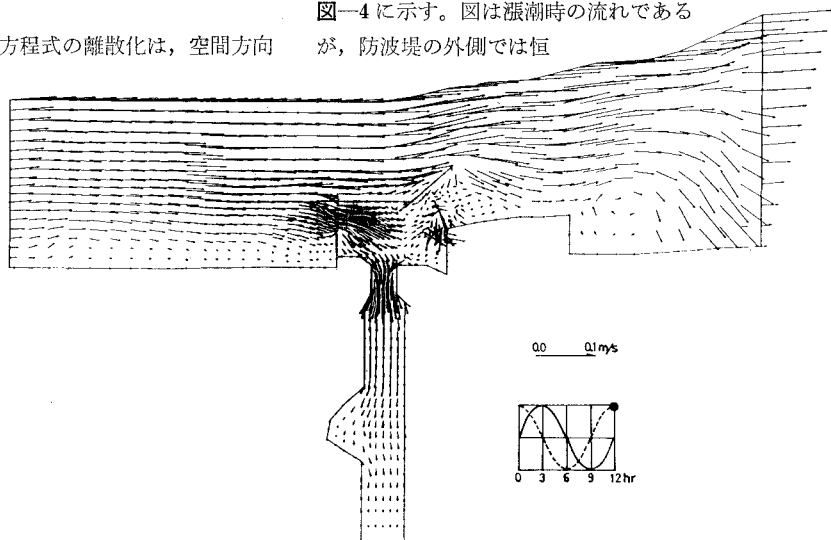


図-4 流動計算結果 (漲潮時)

流成分が卓越している。港内では潮流成分が支配的で、5~6 cm/sec の最大流速が現われる。流動計算の結果を、現地での観測結果と直接比べることは、法線形が違うためにできない。ただ著者らが時間方向に差分法を用いて実施した計算結果⁸⁾と、今回の摂動法による計算結果は、ほぼ一致している。

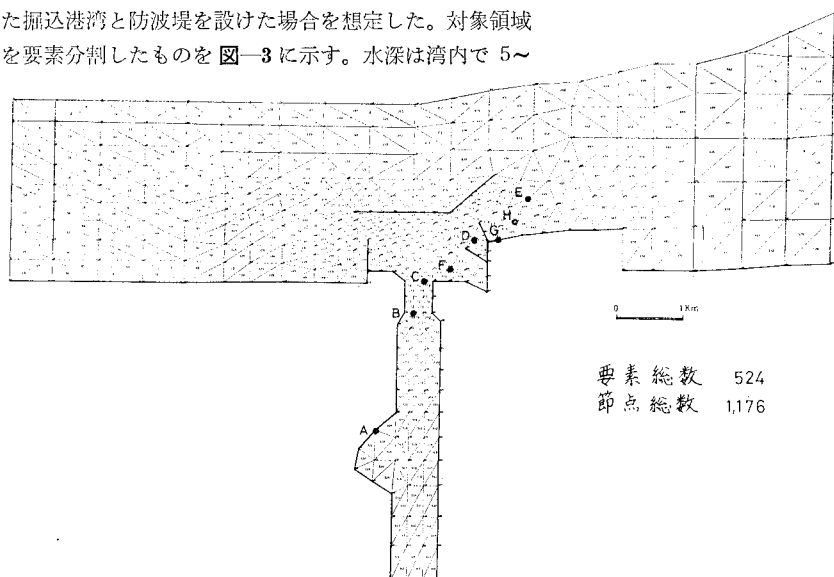


図-3 要素分割

流動計算で得られた流れの場を移流項の流速として用い、物質 (COD) および温排水の拡散計算を行った。物質拡散計算にあたっては、初期濃度として、外海濃度の 0.5 ppm を一様に与え、排出点では負荷量を連続的に投入し、30 潮汐にわたって計算した。計算結果を 図-5 に示す。港内の代表点での濃度の経時変化を見ると、図-6 のようになる。図より明らかなように、濃度はまだ若干の増加傾向を残すが、ほぼ安定してきていると考

えられる。

温排水の拡散計算にあたっては、境界条件として排出点および開境界で温度を与えた。初期水温は、夏場の平均水温 22°C を用いた。また、外気温も 22°C とした。計算結果は、図-7 に示す通りである。また、代表点での経時変化を図-8 に示す。結果は比較的早く定常状態に達している。これは排出点の温度として定常状態に達した場合を想定した温度を与えたためと考えられる。

これらの拡散計算において、時間間隔 Δt は、物質拡散計算では 120 秒、温度拡散計算では 60 秒とした。

また、今回の計算においては、拡散係数は全海域で一定としたこと、開境界において濃度を固定したことなどのために、計算結果からただちに汚染の予測を行うのは

問題であると考え。

4. あとがき

今回、摂動法を利用した有限要素法による、流動計算と拡散計算の手法の確立とシミュレーションプログラムの開発を行った。その結果、複雑な形状を無理なくモデル化し、合せて非定常項の計算にも実用上有利な方法が確立され、一応の成果を取めるに至った。今回の計算例では、流動計算に要した計算時間は FACOM 230-70 で約 3 分であった。今後、この考えをさらに拡張し、2 次以上の高次オーダーの計算もプログラム化し、計算精度の向上をはかることを予定している。また、2 層流モデルについても、この手法が十分使えると考えられるので

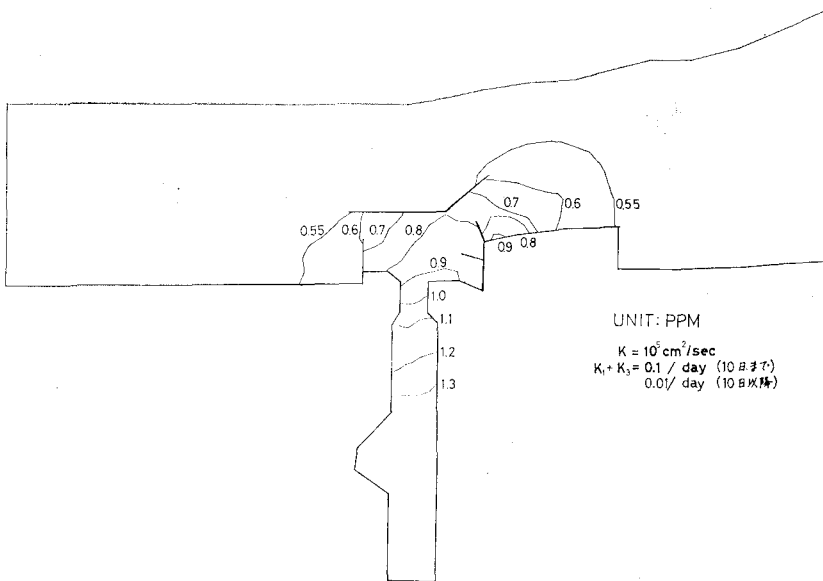


図-5 COD 濃度分布

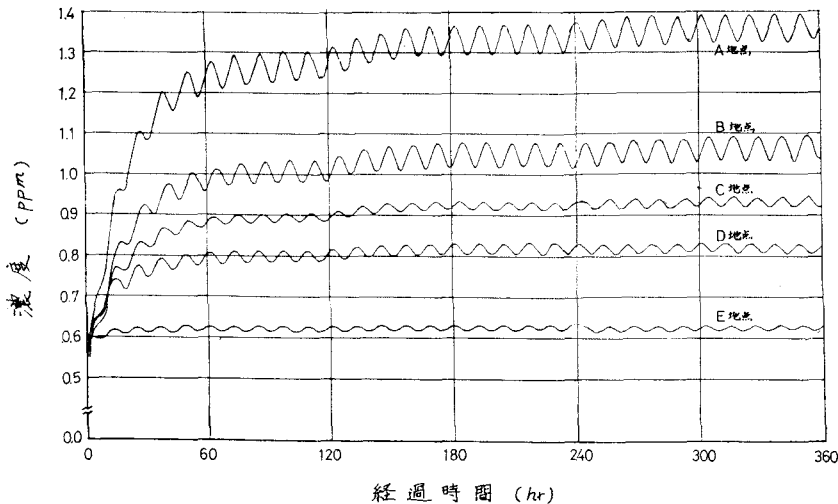


図-6 COD 濃度の経時変化

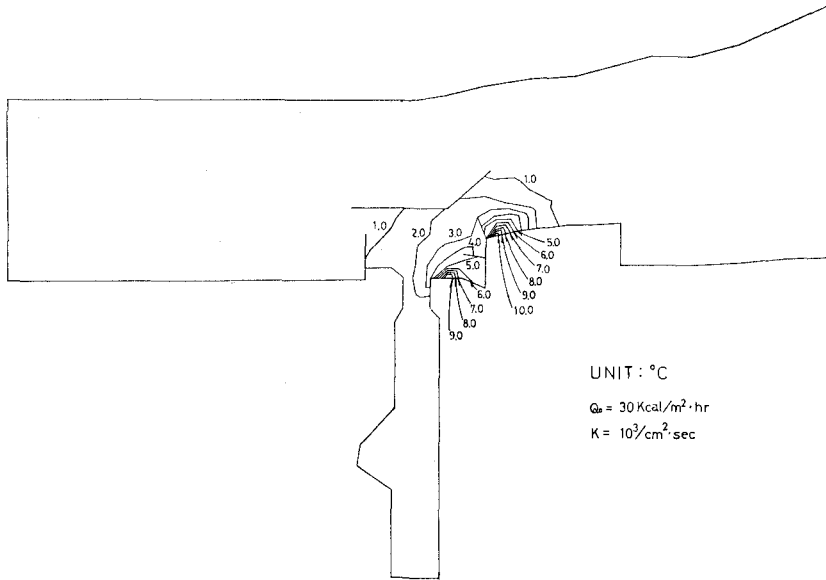


図-7 温度上昇分布

現在パイロット・プログラムを作成して検討を加えている。

拡散計算の非定常項の処理には、差分法における Two-Step の Lax-Wendroff 法を用いて、十分安定した計算を行うことができたが、計算結果をみると、濃度の経時変化から明らかなように、拡散方程式にも、摂動法の適用が可能なことを示唆しているようである。このことから著者らは、拡散方程式の非定常項の処理方法についても今後検討を重ね、有限要素の利点を生かして、実用的なプログラムの開発と解析を進めていく所存である。

参考文献

- 1) 堀川清司: 海岸工学, 東京大学出版会, 317 p., 1973.
- 2) Kawahara, M., N. Yoshimura and N. Nakagawa: Analysis of Steady Incompressible Viscous Flow, Finite Element Methods in Flow Problem, pp. 107~120, 1947.
- 3) 堀口孝男: 非保存系物質拡散の数値解法について, 第19回海講論文集, pp. 271~275, 1972.
- 4) 和田 明: 二成層潮汐モデルによる工業用水取排水問題の展開, 第16回海講論文集, pp. 203~208, 1969.
- 5) 運輸省第二港湾建設局・八戸港工事事務所: 小川原地区潮流調査報告書, 178 p., 1975.
- 6) 運輸省第二港湾建設局・八戸港工事事務所: 小川

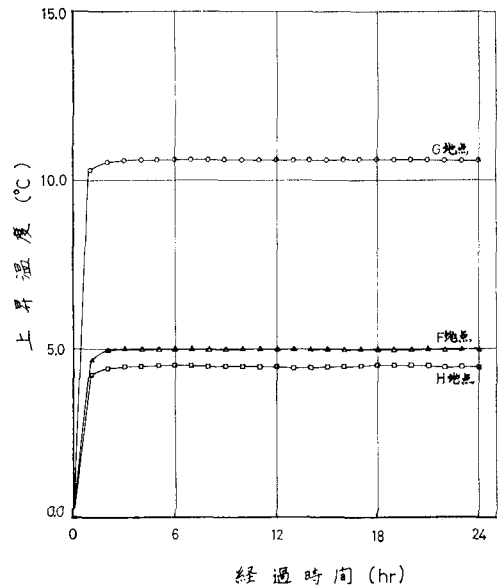


図-8 温度上昇の経時変化

原地区潮流調査報告書, 145 p., 1974.

- 7) 前出 2)
- 8) 運輸省第二港湾建設局・横浜調査設計事務所: 大規模工業港汚染計算報告書, 1976.