

2段階ラックス・ウエンドロフ有限要素法による潮汐流解析

川原 陸人*・竹内 則雄**・首藤 伸夫***

1. はじめに

浅海域における海水の流動を把握することは、工學上非常に重要な問題である。ここでは、潮汐流の解析の第一歩として、2次的に作用する外力を無視し、慣性による非線形性のみを考慮した浅海長波の式¹⁾を用いて、有限要素法により潮流の解析を試みた。

従来、潮流の解析には差分法が広く用いられてきた。この差分法は微分係数を差分商で置き変えるもので、規則的に配置された格子点を基礎として解析を行う方法である。堀口²⁾は大阪湾における高潮の計算を差分法により計算しており、加藤ら³⁾は、有明海および松川浦の潮流を前方差分を用いて計算している。またVliegenthart⁴⁾は浅海長波の方程式をLax法⁵⁾、Lax-Wendroff法⁶⁾、Two-Step Lax-Wendroff法⁷⁾を用いて解析した場合について比較検討している。一方、有限要素法⁸⁾は重み付き残差を零にするという方法に基づいており、解析領域を任意の形状で考えることができ、境界条件もより多くの種類の条件を前提とした解析である。

有限要素法により潮流の解析を行う方法として種々の方法が検討されている。Grotkop⁹⁾は空間方向とともに時間方向に対しても有限要素法を用いて北海の潮流計算を行っており、TaylorとDavis¹⁰⁾は同じ北海を時間に関して、4次のRunge-Kutta法を用い、さらに空間に関してアイソパラメトリック要素を用いた有限要素法により計算している。一方、Cullen¹¹⁾は時間に関してLeap-frog法を用いた場合と差分法とを比較検討している。著者ら¹²⁾は、有限要素法により、Navier-Stokes方程式の解析を行ってきた。この方法は、いわゆる連立方程式を解いて解を求める陰的な解法である。一般に、陰的な解法は精度や安定性の面で有利であるといわれている。しかし、大きな行列を解く必要が生ずるので、計算時間を多く必要とする。一方、ここで扱う潮流を表わす方程式は双曲型の偏微分方程式である。双曲型の問題に対しては計算時間などの面からみて、陽的な解法^{13),14)}の方がむしろ適していることが指摘されている。差分法に関する

陽的なスキームとしては、Lax法⁵⁾、Lax-Wendroff法⁶⁾、Two-Step Lax-Wendroff法⁷⁾などがその代表的なものである。

ここでは、時間に関して、差分法におけるTwo-Step Lax-Wendroff法と同じ概念にのっとり方法で、かつ空間に対しては、有限要素法を用いる方法¹⁵⁾を提案する。

2. 基礎方程式

オイラーの運動の方程式ならびに連続の方程式を海底から水面まで積分し、次の浅海長波の式を得る。

$$\ddot{u}_i + u_j u_{i,j} + g\eta, i = 0 \quad \dots\dots\dots (2.1)$$

$$\eta + (Hu_j), j = 0 \quad \dots\dots\dots (2.2)$$

ここで、 $H = h + \eta$ であり、 h は平均水深、 η は潮位を表わし、 u_i は平均流速を表わす。下付きの添字は、それが1のとき x 方向、2のとき y 方向、3のとき z 方向の成分を表わすものとする。 $(\cdot)_{,j}$ は $\partial(\cdot)/\partial x_j$ を表わし、上付きの $\cdot$ は時間による微分を表わす。また、同一項に同じ添字が繰返して現われる場合、総和規約に従いその最大個まで加え合わせるものとする。

次に、境界条件として、流速あるいは潮位が与えられる場合を考える。なお沿岸上ではその沿岸への法線方向の流速を零とする。ただし、流れがよどむと思われる地点については、流速 u, v とも零になるものとする。

時間に関して離散化するために、次のようなアルゴリズムを考える。今、ある関数 $W(x, y; t)$ が与えられたとする。この項を時間に関してテーラー展開し、2次項まで考慮すると次の関係を得る。

$$W^{n+1} = W^n + \Delta t \dot{W}^n + \frac{\Delta t^2}{2} \ddot{W}^n \quad \dots\dots\dots (2.3)$$

ここで、右上の (n) 、 $(n+1)$ は時間に関して、それぞれ、 (n) 番目、 $(n+1)$ 番目の値を表わし、 Δt は微小増分時間を表わすものとする。一方、次のような2段階に分けたアルゴリズムを考える。

$$W^{n+1/2} = W^n + \alpha \dot{W}^n \quad \dots\dots\dots (2.4)$$

$$W^{n+1} = W^n + \beta \dot{W}^{n+1/2} \quad \dots\dots\dots (2.5)$$

このとき、式(2.4)を式(2.5)に代入し整理すると次の関係が得られる。

$$W^{n+1} = W^n + \beta \dot{W}^n + \alpha \beta \ddot{W}^n \quad \dots\dots\dots (2.6)$$

* 正会員 工博 中央大学助教授 理工学部土木工学科

** 学生会員 中央大学大学院

*** 正会員 工博 中央大学教授 理工学部土木工学科

これと式 (2.3) と比較すれば $\alpha = \Delta t/2$, $\beta = \Delta t$ なる関係を得る。したがって次のようなアルゴリズムを作成することができる。

$$W^{n+1/2} = W^n + \frac{\Delta t}{2} \dot{W}^n \quad (2.7)$$

$$W^{n+1} = W^n + \Delta t \dot{W}^{n+1/2} \quad (2.8)$$

このアルゴリズムは、式 (2.6) に対し、時間による 2 階微分が含まれておらず、非常に簡単な解式を得ることになる。式 (2.7), (2.8) の関係を式 (2.1), (2.2) に用い、時間に関して離散化することにより有限要素法の解式を得ることができる。

3. 有限要素法

式 (2.1), (2.2) を時間に関して離散化する前に、空間方向に有限要素法を適用する。まず初めに、ガレルキン法により変分方程式を誘導する。ガレルキン法は重み付き残差法の一つで、重みの形状関数を未知数の形状関数と同じにとる。この重み関数は境界上で零、その他では任意の値をとりうるものとする。この重み関数を式 (2.1), (2.2) に掛けて任意の領域 Ω について積分し加え合わせる。このとき、次のような半離散化方程式を得る。

$$\int_{\Omega} (u_i^* \dot{u}_i) dv + \int_{\Omega} (u_i^* u_{j,i,j}) dv + g \int_{\Omega} (u_i^* \eta_i) dv = 0 \quad (3.1)$$

$$\int_{\Omega} (\eta^* \dot{\eta}) dv + \int_{\Omega} \{\eta^* (Hu_{j,j})\} dv = 0 \quad (3.2)$$

有限要素法の適用にあたり、流れの場を有限個の部分領域に分割する。この領域の形状としては種々のものが考えられているが、ここでは、一般的に良く用いられている三角形要素を用いる。この三角形に分割された要素内において、流速あるいは潮位を近似する。流速潮位とも 3 節点三角形要素を用いる。有限要素内の任意の位置における未知数の値は、三角形の頂点の値を用いて次のように内挿補間される。

$$u_i = \Phi_{\alpha} u_{\alpha i}, \quad \eta = \Phi_{\alpha} \eta_{\alpha} \quad (3.3)$$

この内挿補間を用いる Φ_{α} は流速や潮位の分布状態を各要素内で近似する関数であり、形状関数と呼ばれる。ここでは、この形状関数に次のような一次多項式を仮定した。

$$\Phi_{\alpha} = \frac{1}{2A} (a_{\alpha} + b_{\alpha} x + c_{\alpha} y) \quad (3.4)$$

ここで、 A は三角形の面積であり、係数 a_{α} b_{α} c_{α} はそれぞれ頂点の座標を用いて次のように表わされる。

$$\begin{aligned} a_{\alpha} &= x_{\beta} x_{\gamma} - x_{\gamma} x_{\beta} \\ b_{\alpha} &= y_{\beta} - y_{\gamma} \\ c_{\alpha} &= x_{\gamma} - x_{\beta} \end{aligned} \quad \begin{pmatrix} \alpha=1 & \beta=2 & \gamma=3 \\ \alpha=2 & \beta=3 & \gamma=1 \\ \alpha=3 & \beta=1 & \gamma=2 \end{pmatrix}$$

重み関数についても同じ形状関数を用いて、式 (3.1), (3.2) に代入する。このとき、次式が得られる。

$$\begin{aligned} u_{\alpha i}^* \int_{\Omega} (\Phi_{\alpha} \Phi_{\beta}) dv \cdot \dot{u}_{\beta i} + u_{\alpha i}^* \int_{\Omega} (\Phi_{\alpha} \Phi_{\beta} \Phi_{\gamma,j}) dv \cdot u_{\beta j} u_{\gamma i} \\ + u_{\alpha i}^* \int_{\Omega} (\Phi_{\alpha} \Phi_{\beta,i}) dv \cdot \eta_{\beta} = 0 \quad (3.5) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \eta_{\alpha}^* \int_{\Omega} (\Phi_{\alpha} \Phi_{\beta}) dv \cdot \dot{\eta}_{\beta} + \eta_{\alpha}^* \int_{\Omega} (\Phi_{\alpha} \Phi_{\beta} \Phi_{\gamma,j}) dv \cdot u_{\beta j} H_{\gamma} \\ + \eta_{\alpha}^* \int_{\Omega} (\Phi_{\alpha} \Phi_{\beta} \Phi_{\gamma,j}) dv \cdot u_{\beta j} H_{\gamma} = 0 \quad (3.6) \end{aligned}$$

$u_{\alpha i}^*$, η_{α}^* が任意であることより、次の有限要素法の解式が得られる。

$$M_{\alpha\beta} \dot{u}_{\beta i} + K_{\alpha\beta\gamma j} u_{\beta j} u_{\gamma i} + N_{\alpha\beta} \eta_{\beta} = 0 \quad (3.7)$$

$$M_{\alpha\beta} \dot{\eta}_{\beta} + K_{\alpha\beta\gamma j} u_{\beta j} H_{\gamma} + K_{\alpha\gamma\beta j} u_{\beta j} H_{\gamma} = 0 \quad (3.8)$$

ここで、式 (3.7), (3.8) に表われる係数は次のごとくである。

$$M_{\alpha\beta} = \int_{\Omega} (\Phi_{\alpha} \Phi_{\beta}) dv, \quad N_{\alpha\beta} = \int_{\Omega} (\Phi_{\alpha} \Phi_{\beta,j}) dv$$

$$K_{\alpha\beta\gamma j} = \int_{\Omega} (\Phi_{\alpha} \Phi_{\beta} \Phi_{\gamma,j}) dv$$

式 (3.7), (3.8) のごとく、空間方向に有限要素法を適用することにより、半離散化された方程式を得た。この式を完全に離散化するために、2. で述べたアルゴリズム式 (2.7), (2.8) を適用する。このとき、次の関係を得る。

$$\begin{aligned} M_{\alpha\beta} u_{\beta i}^{n+1/2} = M_{\alpha\beta} u_{\beta i}^n - \frac{\Delta t}{2} (K_{\alpha\beta\gamma j} u_{\beta j}^n u_{\gamma i}^n \\ + N_{\alpha\beta} \eta_{\beta}^n) \quad (3.9) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} M_{\alpha\beta} \eta_{\beta}^{n+1/2} = M_{\alpha\beta} \eta_{\beta}^n - \frac{\Delta t}{2} (K_{\alpha\beta\gamma j} u_{\beta j}^n H_{\gamma}^n \\ + K_{\alpha\gamma\beta j} u_{\beta j}^n H_{\gamma}^n) \quad (3.10) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} M_{\alpha\beta} u_{\beta i}^{n+1} = M_{\alpha\beta} u_{\beta i}^n - \Delta t (K_{\alpha\beta\gamma j} u_{\beta j}^{n+1/2} u_{\gamma i}^{n+1/2} \\ + N_{\alpha\beta} \eta_{\beta}^{n+1/2}) \quad (3.11) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} M_{\alpha\beta} \eta_{\beta}^{n+1} = M_{\alpha\beta} \eta_{\beta}^n - \Delta t (K_{\alpha\beta\gamma j} u_{\beta j}^{n+1/2} H_{\gamma}^{n+1/2} \\ + K_{\alpha\gamma\beta j} u_{\beta j}^{n+1/2} H_{\gamma}^{n+1/2}) \quad (3.12) \end{aligned}$$

式 (3.9) ~ (3.12) によるアルゴリズムは陽的な解法になっており、次の時点の値をすでに求めた値を用いて計算することができる。しかしながら、左辺の係数行列の逆行列をとらなければならず、完全に陽的なスキームとなっていないばかりか、計算スキーム自体の安定性に問題が残されている。そこで、このような問題に対処するため、式 (3.9) ~ (3.12) の左辺の係数行列を集中行列に置きかえる方法を用いることにする。この集中行列は、非対角成分を対角項に集中させて作ったもので、非対角項を零、対角項を非対角項と対角項との和によるものとする。

このようにして左辺の係数行列に集中行列を用いた有限要素法の解式を流れの場におけるすべての要素についてたて、流れの場全体について重ね合わせる。これに、流れの場全体の境界条件を課して計算を行えば、各節点での潮位ならびに流速を得ることができる。

4. 数値計算例

有限要素法の解式(3・9)~(3・12)を用いて東京湾における潮流解析を行った。まず、東京湾を図-1のごとく三角形要素に分割した。総要素数を576要素、総節点数を345節点とした。なお、要素間隔は平均2kmとした。初期条件としては、海域内のすべての節点における流速を零とし、また全節点に平均水深を与え、海面はまったく変動のない静かなものとした。一方、境界条件として、沿岸上では、その沿岸における法線方向の流速を零とし、また、1~8節点を湾口と考え、その湾口に図-2の左上に示されるような潮位を与え、増分時間を120秒とした。なお、この入力に用いた潮位は久里浜で実測されたものを正弦曲線で近似したもので、周期12時間、最大振幅136cmである。

図-2は、湾内における横須賀、木更津、横浜、川崎、東京の5か

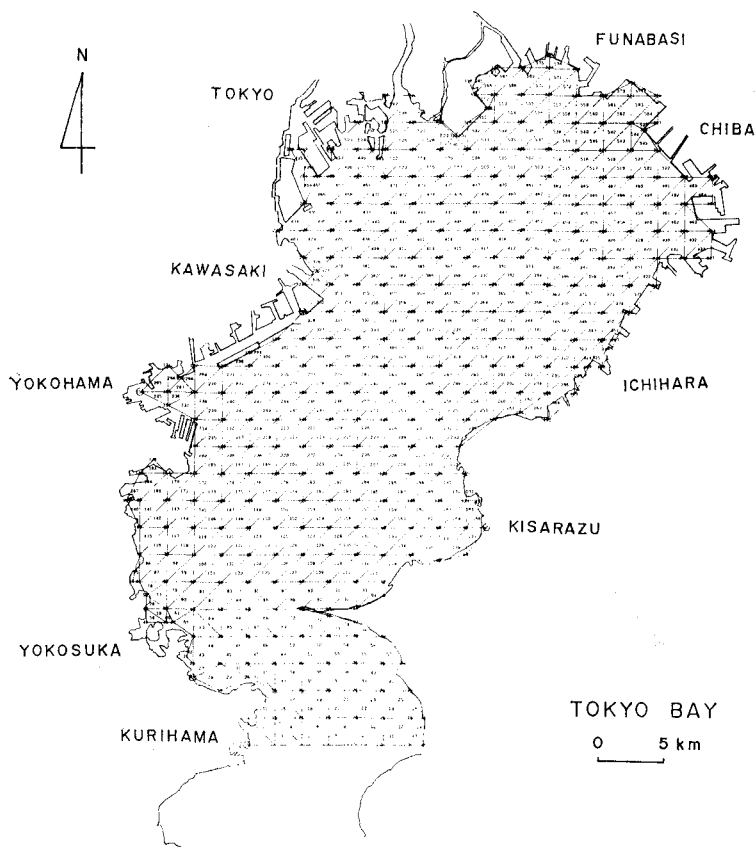


図-1 有限要素分割

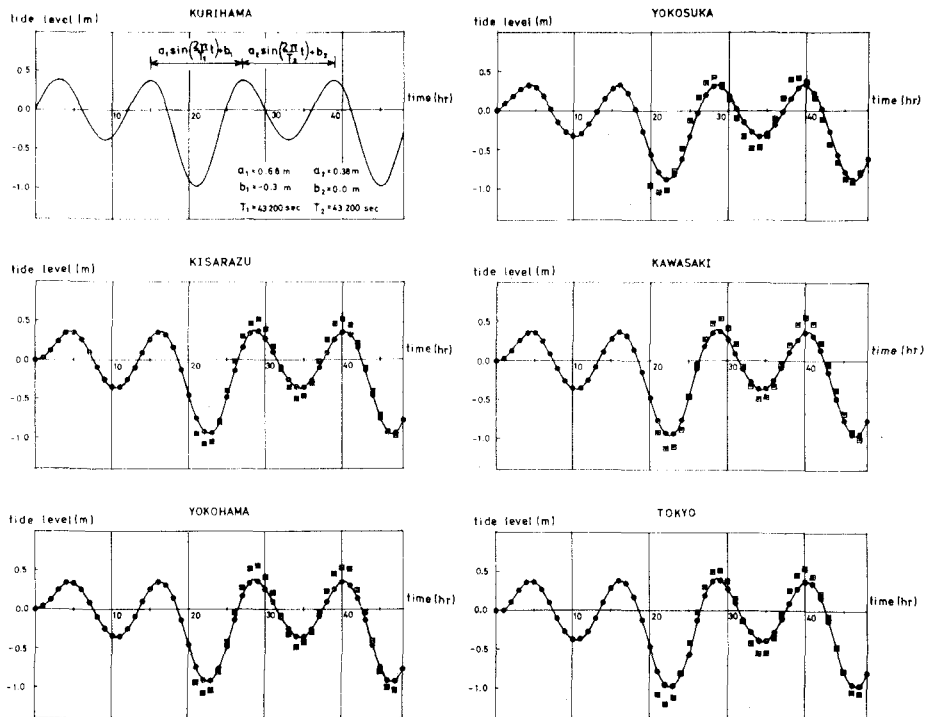
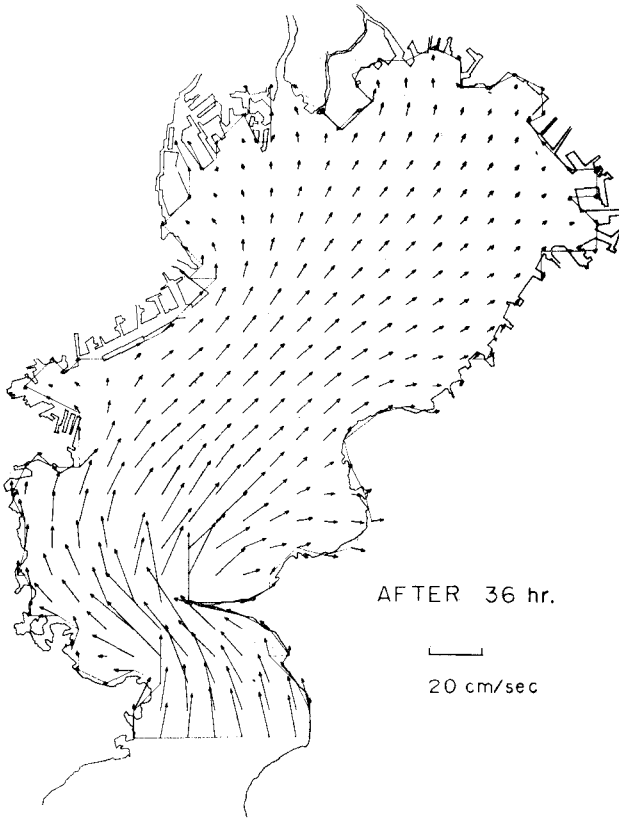


図-2 計算された潮位と測定値の比較



図—3 計算された流速

所に関する潮位変化の計算結果と、1972年1月における実測値を比較したものである。図では計算結果を●印、実測値を■印で表わしている。各地点における実測値は、計算結果と最もよく一致するように基準レベルを補正したものである。周期、潮位ともほぼ良い一致を示している。潮差が多少異なるのは、入力値が入江になっている久里浜で測定されたものを正弦曲線に近似したためと思われる。

図—3は、36時間後における流速分布を示したものである。富津岬で大きな流速が計算されている。これは実際に測定されたものと類似した傾向である。

5. 結 言

有限要素法による潮流の解析の第一歩として、浅海長波の解析を試みた。解析方法として、Two-Step Lax-Wendroff 法を基礎とする方法を提案した。東京湾を例にとり計算を試みた結果、実測値を良く説明する結果を得た。東京湾のように湾状になっている地形を対象とする場合、その湾口をどこにとるかという問題が残されている。また、この方法では、多くの方法がそうであるよ

うに、時間増分の取り方によって計算の安定性が支配される点で今後問題となる。

数値計算にあたり、吉田隆治君（中央大学大学院生）の協力を得た。ここに記して感謝の意を表する。

計算にあたり、東大大型センターの HITAC 8800/8700 を用いた。

参 考 文 献

- 1) Stoker, J. J.: Water Waves, Pure and Applied Mathematics, Interscience, 567 p., 1957.
- 2) 堀口孝男: 高潮推算に関する一考察, 第13回海講講演集, pp. 242~247, 1966.
- 3) 加藤重一・乃万俊文・萩野静也: ノリ漁場の改良保全に関する調査研究——有明海および松川浦（福島県）地区について——, 農土試報告第9号, p. 207, 1971.
- 4) Vliegenthart, A. C.: Dissipative difference scheme for shallow water equation, J. Eng. Math., Vol. 3, No. 2, pp. 81~94, 1969.
- 5) Lax, P. D.: Weak solutions of nonlinear hyperbolic equations and their numerical computation, Comm. Pure Appl. Math., Vol. 7, pp. 159~193, 1954.
- 6) Lax, P. D. and B. Wendroff: Systems of conservation laws, Comm. Pure Appl. Math., Vol. 13, pp. 217~237, 1960.
- 7) Richtmyer, R. D.: A survey of difference methods for non-steady fluid dynamics, N. C. A. R. Tech. Note 63-2, 1963.
- 8) Zienkiewicz, O. C.: The Finite Element Method in Engineering Science, McGraw-Hill, 521 p., 1971.
- 9) Grotkop, G.: Finite element analysis of long-period water waves, Comput. Meth. Appl. Mech. Eng., Vol. 2, pp. 147~157, 1973.
- 10) Taylor, C. and J. Davis: Tidal and long wave propagation—A finite element approach, Computers & Fluid, Vol. 3, pp. 125~148, 1975.
- 11) Cullen, M. J. P.: A simple finite element method for meteorological problems, J. Inst. Maths. Appl., Vol. 11, pp. 15~31, 1973.
- 12) Kawahara, M., N. Yoshimura, K. Nakagawa and H. Osaka: Steady and unsteady finite element analysis of incompressible viscous fluid, Int. J. Numerical Meth. Eng., Vol. 10, pp. 437~456, 1976.
- 13) Fujii, H.: Finite element schemes: stability and convergence, Advances in Computational Methods in Structural Mechanics and Design, UAH Press, pp. 201~218, 1972.
- 14) 川原睦人・竹内則雄: 双曲偏微分方程式に対する一有限要素法解析, 第30回年次学術講演会概要集, pp. 76~77, 1975.
- 15) 竹内則雄・吉田隆治・川原睦人: 有限要素法による潮流解析, 中央大学紀要（印刷中）.