

潮流解析における重み付き残差法の適用について

樫 木 亨^{*}・中 辻 啓 二^{**}・和 手 信 泰^{***}

1. ま え が き

近年、埋立造成・防波堤の伸張など地形形状変化に原因する沿岸環境変化の予測は海岸工学上の重要な検討事項の一つとなっている。このような流況変動の予測手法として差分近似に基づいた数値実験が盛んに行われているが、いずれも湾に相当する広大な水面を対象としているために計算精度は粗く、複雑な地形形状を考慮して局所的な流動を再現した例は少ない。

他方、最近急速に流体運動を含む連続体の数値解析に適用を試みられている定式化の方法として重み付き残差法がある。この方法は解析領域内での解を関数近似して原微分方程式に代入した場合に生じる残差を最小化することを基本原理としており、エネルギー的変分原理の存在しない Navier-Stokes のような非線型な微分方程式系に対しても有限要素法的思考の導入を可能にする。そのアルゴリズムは積分方程式に変換して解くこととなり、計算安定性は離散化間隔による直接的な拘束を受けることなく、しかも、ある種の境界条件は定式化の過程において配慮できる利点を有している。しかしながら、その解析は境界値問題となり、波動現象のような初期値問題への応用に際してはその特性、適用範囲を明確にする必要がある。近年、差分近似法と比較して、物理現象に合わせて格子網を任意形状に選ぶことから流体のあらゆる問題に対しての適用が試みられているが^{1)~3)}、数学的基礎も含めて未解決の問題点も数多い。

本報告は、有限振幅長波の変形過程を解析例に選び、波動初期値問題への重み付き残差法の適用の可能性を検討するものである。また、その結果に基づいて潮流解析に対して差分近似法と重み付き残差法との混合型解析法である Leap-Frog-Galerkin 法を提案する。

2. 基礎方程式

有限振幅長波の支配方程式は水深方向に積分して二次元化した次の運動および連続方程式により表現される。

$$\frac{\partial U_i}{\partial t} + U_j \frac{\partial U_i}{\partial x_j} = g \cdot \frac{\partial \zeta}{\partial x_i} + \frac{\tau_{bi}}{\rho} + \nu \Delta U_i \quad \dots\dots (1)$$

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} + \frac{\partial \{(h+\zeta)U_i\}}{\partial x_i} = 0 \quad \dots\dots\dots (2)$$

ここに、 x_i : 直交座標系、 t : 時間、 U_i : 流速 U の方向成分、 ζ : 水位、 h : 水深、 g : 重力加速度、 τ_{bi} : 海底摩擦力 $= \rho \tau^2 \cdot |U| \cdot U_i$ 、 ρ : 密度、 ν : 動粘性係数。

境界条件は Dirichlet 的固定境界 Γ_D と Neumann 的自然境界 Γ_N とからなり、境界での法線の方向余弦を x_i 軸に対して l_i と選べばそれぞれ次式のようにになる。

$$U_i = U_{Bi}(x_i, t) \quad \text{and} \quad \zeta = \zeta_B(x_i, t) \quad \text{on} \quad \Gamma_D \quad \dots\dots\dots (3)$$

$$U \cdot l_x + V \cdot l_y = 0 \quad \text{or} \quad \partial U / \partial x \cdot l_x + \partial V / \partial y \cdot l_y = 0 \quad \text{on} \quad \Gamma_N \quad \dots\dots\dots (4)$$

3. 重み付き残差法による定式化

重み付き残差法の基本原理は、求める関数 Z を有限個の試行関数 $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n$ の代数和 $\sum \varphi_i \cdot Z_i$ に展開し、この近似解を偏微分方程式系に代入した場合の重み付き残差を最小にするように未定係数 Z_i を求める点にある。本論で用いる Galerkin 法は重み関数を試行関数と同一関数に選ぶ方法であり、試行関数として解析領域を有限要素に分割した場合の各節点において定義される形状関数が用いられる。すなわち、各要素内の関数 Z は形状関数 $G_i(x, y)$ と未知節点値 $Z_i(t)$ との一次結合 $Z(x, y, t) = \langle G_i(x, y) \rangle \{Z_i(t)\}$ で定義される。また、その定式化は残差 R_k を解析全領域で平均的に“0”とするように各要素の未知節点値を連立させて解く方法で、次式のようにになる。

$$\sum_{l=1}^L \left[G_j(x, y) \cdot R_k(x, y, t) dE_l \right] = 0, \quad j=1, 2, \dots, M, \quad k=1, 2, 3 \quad \dots\dots\dots (5)$$

ここに、 L は分割された全要素数、 M は要素内に含まれる節点総数、 E_l は l 番目の要素の面積を示す。

したがって、近似精度の増大は形状関数の選択と有限要素の細分化とにあり、また決定方程式は式 (5) に示されるように要素内方程式の重ね合わせでマトリックス表示できる。これらが有限要素法と称される所以であり、

^{*} 正会員 工博 大阪大学教授 工学部土木工学科
^{**} 正会員 工修 大阪大学助手 工学部土木工学科
^{***} 正会員 工修 日本情報サービス(株)科学計算部

以下定式化の概要と問題点について述べる。

(1) 曲線要素とアイソパラメトリック変換

空間変数の離散化のために、図-1 に示す 8 節点四角形要素を用いる。近似精度は形状関数の選択に影響を受

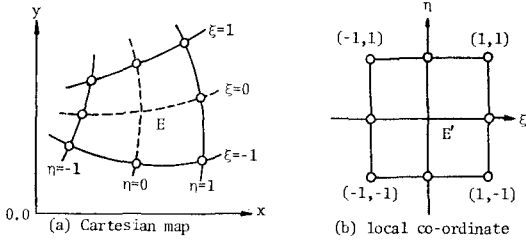


図-1 アイソパラメトリック要素

けることが予想されるが、この形状関数は二次の多項式であり、従来用いられている三角形要素に比べて精度高く境界の屈曲した自然地形形状を平滑に表現できる。積分は図に示すように x - y 座標系における任意形状の要素を同じ多項式関数で表現される一般曲線座標系 (ξ - η) の正方形領域に変換して行う。すなわち、

$$\iint_E G_f(x, y) \cdot R_k(x, y, t) dx dy = \iint_{E'} S_f(\xi, \eta) \cdot R_k(\xi, \eta, t) |J| d\xi d\eta \dots\dots\dots (6)$$

ここに、 $\begin{cases} G_f(x, y) = G_f(\xi, \eta), y(\xi, \eta) = S_f(\xi, \eta) \\ x(\xi, \eta) = \sum S_f(\xi, \eta) \cdot x_j, y(\xi, \eta) = \sum S_f(\xi, \eta) \cdot y_j \\ |J| = \frac{\partial(x, y)}{\partial(\xi, \eta)} = \begin{vmatrix} \partial x / \partial \xi & \partial x / \partial \eta \\ \partial y / \partial \xi & \partial y / \partial \eta \end{vmatrix} \end{cases}$

(2) 非線型項の取扱い

基礎方程式中に含まれる非線型項は式 (5) の定式化の結果、次のような積分形で表現される。

$$\left\{ \begin{aligned} & \int_E G_j \cdot \left\{ \sum_i G_i U_i^* \cdot \sum_i \frac{\partial}{\partial x} G_i \cdot U_i \right\} dE_i \\ & \int_E G_j \cdot \frac{\partial}{\partial x} \left\{ \left(\sum_i G_i h_i + \sum_i G_i \cdot \zeta_i^* \right) \cdot \sum_i G_i U_i \right\} dE_i \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (7)$$

したがって、正確には非線型連立方程式を解く必要が生じるが、物理的にみれば非線型項と加速度項との比は一般に水深波高比 ζ/h のオーダーであり、沿岸地形形状の変化の激しい浅海領域を除いては非線型項を前時間ステップの節点値を用いて線型化を行い反復計算することにより求めることができる。式 (7) 中添字 * は前時間ステップの節点値を示す。

(3) 境界条件の配慮

前述のように境界条件は自然条件 Γ_N と固定条件 Γ_D とからなり、前者は積分形に部分積分、Gauss の発散定理を導入して線積分を導くことにより考慮することができる。例えば、連続方程式の第 2 項に関して述べれば次式のようになる。

$$\begin{aligned} & \iint_E G_j \left\{ \frac{\partial \{ (h + \zeta) U \}}{\partial x} + \frac{\partial \{ (h + \zeta) V \}}{\partial y} \right\} dx dy \\ & = - \int_{\partial E} G_j (h + \zeta) (U_l x + V_l y) dS \\ & - \iint_E (h + \zeta) \left\{ U \cdot \frac{\partial G_j}{\partial x} + V \cdot \frac{\partial G_j}{\partial y} \right\} dx dy \quad (8) \end{aligned}$$

上式の線積分は境界面に直交する流量フラックスを表わしており、領域内においては打ち消し合うために線積分の項は消失する。また、外部境界のうち自然境界 Γ_N においては $U_l x + V_l y = 0$ であることから、固定境界に対してのみ境界に沿った線積分を施す必要がある。同様に、運動方程式の粘性項に関しても線積分への変換が可能であり、自然境界の第二条件をうまく配慮できる。

以上の定式化から明らかなように、固定境界では系の支配法則とは独立に境界値 ζ, U, V を同時に与える必要がある。このことは波動のもつ初期値問題としての特性とは相容れないことであり、境界値が適切でない場合には解の振動が発生し収束性がきわめて悪くなる。また、Neumann 的境界条件は連続方程式の流量収支のみに導入されたものであり、運動方程式の動力学拘束条件として考慮されたわけではない。したがって、上記境界条件は時間的に緩慢に発展する水理現象にのみ可能であって、その適用範囲は限定されよう。

(4) 時間に関する離散化

以上の空間的離散化の結果、 M 個の未知節点値 $\zeta_j(t), U_j(t), V_j(t)$ に関する $3M$ 個の常微分方程式系が得られ、Dirichlet 境界条件を考慮して解くことになる。

$$\sum_i C_{ij} \cdot \frac{\partial \Phi_j}{\partial t} + \sum_j A_{ij} \cdot \Phi_j + b_i = 0, \quad i, j = 1, 2, \dots, M \dots\dots\dots (9)$$

ここに、 $\Phi_j = \{U_j(t), V_j(t), \zeta_j(t)\}$

$$\left\{ \begin{aligned} C_{ij} &= \begin{bmatrix} C & 0 & 0 \\ 0 & C & 0 \\ 0 & 0 & C \end{bmatrix}, \quad A_{ij} = \begin{bmatrix} a_1 & -a_2 & a_3 \\ a_2 & a_1 & a_4 \\ a_5 & a_6 & 0 \end{bmatrix}, \\ b_i &= \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ b_3 \end{bmatrix} \end{aligned} \right.$$

時間に関する離散化においても試行関数を用いることにより Galerkin 法による定式化を行えるわけであるが、ここでは発展方程式系の特性を生かすために二次の正確度を有した Crank-Nicolson の差分近似を用いる。その結果、式 (9) は次式のように離散化される。

$$\begin{aligned} & \sum_j \left(\frac{1}{\Delta t} C_{ij} + \frac{1}{2} A_{ij} \right) \Phi_j^{t+\Delta t} \\ & = \sum_j \left(\frac{1}{\Delta t} C_{ij} - \frac{1}{2} A_{ij} \right) \Phi_j^t - b_i \dots\dots\dots (10) \end{aligned}$$

ここに、 Δt は時間増分、 A_{ij}, C_{ij}, b_i の各要素成分は t と $t + \Delta t$ の時間ステップの中間値である。

4. 初期値問題への適用について

(1) 正弦波の伝播過程

以上定式化した解析法の初期値問題への適用性を検証するために、矩形様水深水路を伝播する $\zeta_0/h_0=0.2$, $L/h=240\text{m}/9.8\text{m}$ の正弦波を初期条件ならびに水路両端における境界条件として $\zeta=U=\zeta_0 \cdot \sin\{2\pi/L \cdot (x-Ct)\}$ を与えて解析した。水路は図-2に示すようなアイソパラメトリック要素で分割し、離散化間隔 Δx を $L/16$, $L/12$, $L/8$ の三種類選んだ。 $\Delta x=12$ の場合の波形伝播の一例を示したのが図-3であり、時間ステップは $T/12$ である。波形は非線型項の影響で若干前傾しながらも半周期までは滑らかに変形するが、境界値の符号が変わる時間ステップから波形にひずみが現われ、以後そのひずみは保存されながら伝播する傾向にある。

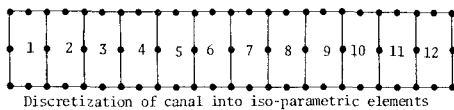


図-2 要素分割

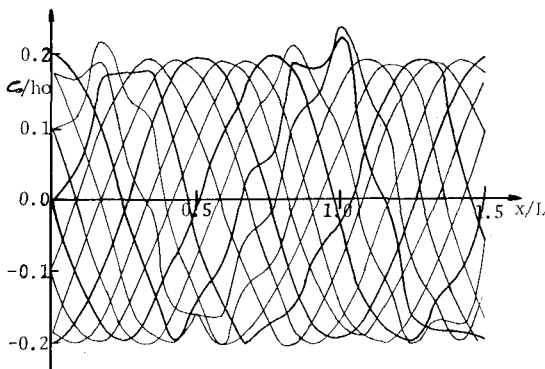


図-3 正弦波の時間波形

図-4は一波長伝播後の計算波形を比較したものであり、実線は $L/16$ の計算波形、破線は初期波形を示している。各要素内においては二次補間を行っているが、各要素の境界で波面勾配が不連続となる場合もあり初期波

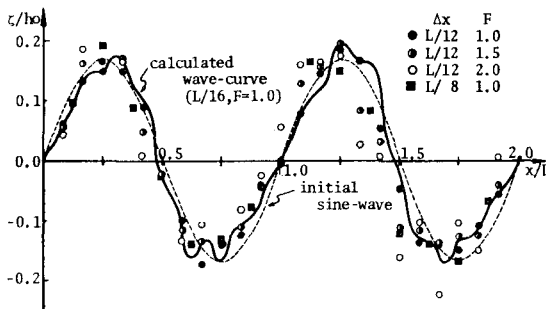


図-4 計算波形の比較 (正弦波の場合)

形と比較して高波数成分の雑音が増えているようにみえる。しかし、人為的に平滑するならば、波形は対称性を失い波の進行方向に前傾する非線型効果が顕著にみられ、定式化の妥当性が認められる。次に、離散化間隔の計算波形に及ぼす影響を比較したのが、同図のプロットおよび表-1である。正弦波を一応の指標として標

表-1 計算精度の検討

Case	Δx	Δt	F	Mean	Variance
1	$L/16$	$T/16$	1.0	.0011	.1513
2	$L/12$	$T/12$	1.0	.0016	.1490
3	$L/12$	$T/9$	1.5	.0125	.2345
4	$L/12$	$T/6$	2.0	.0265	.3850
5	$L/8$	$T/8$	1.0	.0164	.2566

where, $F=U_0 \cdot \Delta t / \Delta x$

準化したために分散値 $\sigma=\sqrt{\sum \Delta \zeta^2 / n} / \zeta_0$ は若干大きな値を呈するが、収束性の点を考慮すれば C-F-L 条件を満たすように $\Delta x, \Delta t$ を選ぶ範囲内では $\Delta x=L/12$ 程度で精度高く近似できることを示している。

次に、初期条件の影響度を調べるために、 $\zeta=U=0$ なる初期条件で境界条件のみを変化させた場合の計算を行った。図には示していないが、最初の時間ステップで連立一次方程式を解く際に生じる卓越波長 $2\Delta x$ の弱い擾乱が計算の進行に伴い増幅され振動する結果となる。このことは離散化手法が implicit 法であり高波数の雑音成分は位相のずれを有しながら伝播することに原因しており、増幅因子の概念を用いて明確に説明できる。したがって、この誤差を抑制するためには境界において、与えられた境界条件に滑らかに接続する初期条件を設定する必要があると思われる。

(2) 孤立波の伝播過程

次に、初期波形として $\zeta_0/h_0=0.2$ の孤立波を選び、初期値問題として解く場合の問題点を考察する。すなわち、境界条件として自然境界を導入し Dirichlet 的拘束を与えずに移動座標系による計算を行った。図-5は水位および流速の時間変化を示したものであり、計算の進行に伴い両者の波形の対応性は崩れ、波の後背部では波

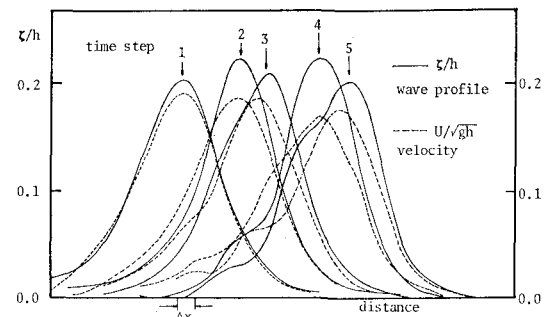


図-5 孤立波の伝播波形

形勾配が逆となる場合も生じる。これは孤立波の特性、すなわち安定で変形することとは相異なる。この原因は移動座標系を用いている点と、水位と流速とを同時に連立させて数値解を求めている点にある。換言すれば、物理現象のもつ伝播速度の概念が解析においては考慮されておらず、むしろ伝播速度が無限大であるような時間 t での空間面を特性曲面として選んでいる結果、解析全領域の水位と流速とが残差を最小にするように補ないあって解を決定しているためである。

図-6 は距離 $3L_e$ 伝播した後の計算波形を比較したものである。同図より Δx を小さくした場合に必ずしも収束するとは限らず、逆に高波数の擾乱波が波の後背部でみられる。前項でもふれたように、これは数値安定性のための散逸的效果が implicit な解法には導入されていないことに原因しているものと考えられる。そこで、運動方程式中の粘性項を散逸的效果として

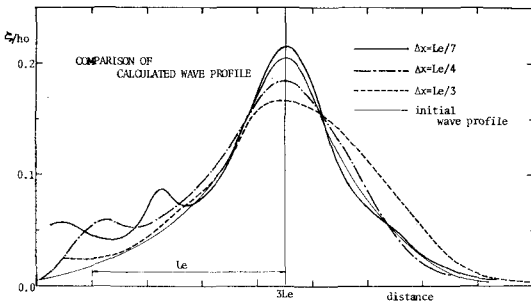


図-6 計算波形の比較 (孤立波の場合)

過大評価した計算を試みたが、流速に関する平滑化のみにこの粘性項が働き水位を逆に尖らせ不安定となる結果となった。このことからこの種の不要な雑音成分を計算過程で減衰抑制させるためには、連続方程式に対して人為的粘性項の導入、あるいは連続方程式と運動方程式とを異なった時間ステップで解く差分法的手法の導入を計る必要があろう。粘性流体解析において圧力の形状関数を流速のそれに比較して次数を落として好結果を得ている⁵⁾のも、圧力における振動の伝播を抑制して平滑化しているためであろうかと推察される。

5. 数値解析例

(1) 段波変形への応用 (一次元問題)

応用例として段波の分散過程の解析に重み付き残差法を適用し、室田・岩田⁶⁾の実験値ならびに Peregrine の方法⁷⁾を

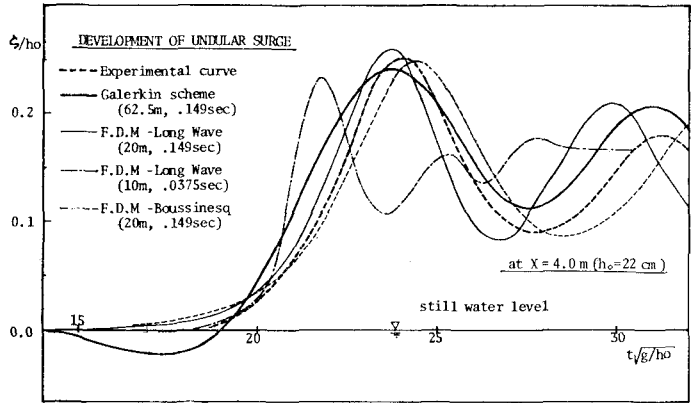


図-7 段波変形への応用例

修正計算した差分解と比較検討した。図-7 は実験観測波形を境界条件として計算を行った場合の 4m 隔った観測点での時間波形である。図中太い実線は $\Delta x_{\min} = 62.5$ cm の 7 要素の場合の解であり、波先で負の水位を呈し、また波のフロント部の波面勾配は凸となり実験値、差分解とは異なるようであるが、これは離散化間隔が他の計算例に比較してきわめて大きく、かつ非線型項に関して反復計算を行わず線型化して解いていることに原因しており位相の点を考え合わせれば実験値とほぼ一致した結果を得たといえる。Peregrine の差分法は運動方程式のみを implicit に解く方法であり、図中の細い実線、鎖線で示すように有限振幅長波方程式を用いた場合には Δx を小さくするにしがたい高波数の振動が発達して差分解は前傾するようである。このことは 4. の記述と一致するものであり、implicit に解く場合には不要な擾乱を散逸させる効果を導入する必要があることはこの例からもいえる。 $\Delta x = 10$ m に選んで重み付き残差法による計算を行ったが、差分解に増して振動傾向は著しく同図には載せていない。

(2) 津波段波の伝播過程への応用 (二次元問題)

次に、水路幅が一樣に減少する二次元場の津波伝播現象の解析を行った。分割要素は 図-8 に示すように 20

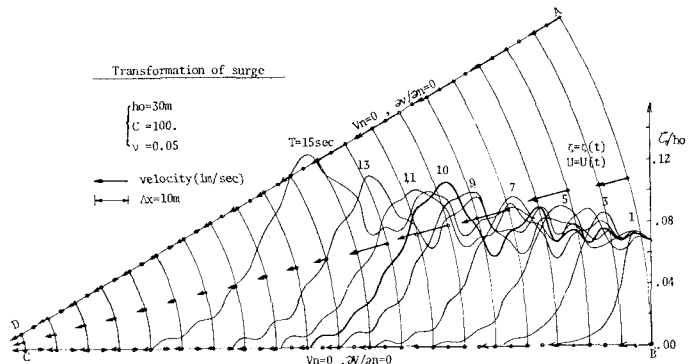


図-8 津波段波の伝播過程

要素からなる扇形形状であり、水深は一樣に 30 m である。境界 A-B において波先部を sech^2 関数で近似した段波波形を時間関数で与え、他の境界においては Neumann 的自然条件を適用した。水位に関して中間節点と両端節点では有効数字 4 桁まで一致しており、同心円上に等水位分布を呈している。同図の実線は扇形中心方向に伝播する計算波形であり、境界 A-B での強い拘束のため前節で述べた理由による高波数の振動が波形に現われるが初期波形が分裂しながら伝播していく過程が観察される。波高増大率は長波のエネルギー保存から求めた値に対して若干大きくなるが、これは水路断面の縮小効果に加えて段波の分散性が加算されたことによるものと思われる。

太い実線で示した 10 秒後の波形に対応する流速の平面分布を同時にベクトルで表示してあるが、同図より境界 C-D を除いて境界を横切る流速成分は無視できるほどの小さい値となり自然条件が満たされていることがわかる。他方、津波伝播方向には流速は弱い振動を呈しており、また境界 C-D では計算の繰り返し回数とともに一樣に増大する有限値をもつことになる。この誤差を小さくするには Dirichlet 的に境界値を与えて自由度を減らせて解く必要があろう。

6. 潮流解析への適用について

以上、有限振幅長波の伝播過程の解析を通して重み付き残差法の特徴を明確にするとともに、初期値問題への適用の可能性を検討した。その結果、時間的に緩やかに発展する水理現象、例えば、潮流、拡散のような現象に対しては、この定式化が差分近似法と比較して複雑な地形形状を考慮して精度よく近似できることがわかった。

しかしながら、計算過程で発生する高波数成分の振動による解の不安定性、ならびに本文ではふれなかったが計算時間・計算機容量等の問題点を有しており、この定式化を非定常な潮流解析にそのまま実用化することはできない。それらはいずれも境界値問題として水位・流速を同時に解くということに起因しており、これに関しては以下に述べる計算法が考えられる。すなわち、空間変数の離散化は重み付き残差法を適用し、時間変数の離散化に関しては leap-frog 差分法を適用して、水位と流速 U, V を求める時間ステップをずらして繰り返し計算する解析法である。したがって、式 (9) は次式のような連立方程式に分割され、またその流れ図は 図-9 のようになる。

$$\begin{aligned} & \sum_j \begin{bmatrix} C & 0 \\ 0 & C \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} (U_j^{n+1} - U_j^{n-1})/\Delta t \\ (V_j^{n+1} - V_j^{n-1})/\Delta t \end{Bmatrix} \\ & + \sum_j \begin{bmatrix} a_1 & -a_2 & a_3 \\ a_2 & a_1 & a_4 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} (U_j^{n+1} + U_j^{n-1})/2 \\ (V_j^{n+1} + V_j^{n-1})/2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \end{aligned} \quad \dots\dots\dots(11)$$

$$\sum_j C \cdot (\zeta_j^{n+2} - \zeta_j^n) / \Delta t + \sum_j a_5 \cdot U_j^{n+1} + \sum_j a_6 \cdot V_j^{n+1} = b_8 \quad \dots\dots\dots(12)$$

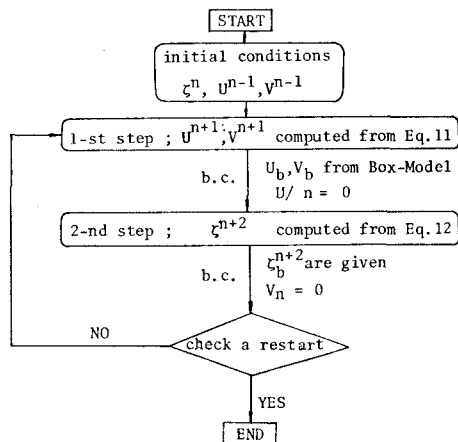


図-9 L-F-G 法の流れ図

この Leap-Frog-Galerkin 法の特徴は従来の有限要素法と比較して以下のようなものである。

- (1) 水位および流速を異なった時間ステップで解くために、おのおのに平滑化操作が加わり不要な解の振動を抑制することができる。
- (2) 境界条件として水位あるいは流速を独立に与えることが可能となり、また境界における近似精度は連続方程式を用いたボックス型差分法により増大させ得る。
- (3) 全体マトリックスのために必要な配列の大きさを $(2/3)^3$ 程度に減少することができ、それゆえ計算時間も $(1/3)^3 + (2/3)^3$ 程度に減少可能で非定常解析への適用が可能となる。

上記提案した Leap-Frog-Galerkin 法の混合解析法により二次元場の非定常な潮流解析への適用の可能性が提示されたわけであるが、形状関数の選定・境界条件の処理・誤差の伝播等未解決な問題点を残しており、解析精度の向上とともに実用化に際しては考慮すべき点であると考ええる。その適用例に関しては別の機会に発表したい。

参 考 文 献

- 1) Oden, J. T., O. C. Zienkiewicz, R. H. Gallagher, C. Taylor: Finite Element Method in Flow Problems, UAH Press, Alabama, 772 p., 1974.
- 2) Gallagher, R. H., J. T. Oden, C. Taylor, O. C. Zienkiewicz: Finite Elements in Fluids, Vol. 1~2, John Wiley & Sons, Rondon., 572 p., 1975.
- 3) 坂井藤一・月岡康一: 波動解析への有限要素法の適用 (第 2 報), 第 21 回海岸工学講演会論文集, 1974.
- 4) 村岡浩爾・中辻啓二: 有限要素法による非定常拡散解析について, 第 18 回水理講演会講演集, 1974.
- 5) 山田嘉昭・伊藤邦憲・大坪 敬: 非圧縮定常粘性流への有限要素法の応用, 日本鋼構造協会第 7 回大会研究集会論文集, pp. 597~604, 1973.
- 6) 室田 明, 岩田好一郎: 段波の変形に関する研究, 土木学会論文集, 第 160 号, pp. 49~58, 1968.
- 7) Peregrine, D. H.: Long Waves on a Beach, Jour. of Fluid Mechanics, Vol. 27, No. 4, March 1967.