

津波の計算における非線形項と分散項の重要性

首 藤 伸 夫*

1. 序

海岸近くの津波の挙動を推定するとき、その波高がかなり大きくなっているために、線形理論によって考えることが必ずしも適当でない場合が多い。

津波は普通、長波としてあつかわれている。線形長波理論に波高の有限性をとりいれると、浅水理論として知られるものがえられる。さらに高次近似にすすんで分散項の効果を入れると Boussinesq の式¹⁾、 KdV の式²⁾、Peregrine の式³⁾、角谷の式⁴⁾などをうることになる。

現地での津波を計算する際、こうした式のどれを用いるかが問題となってくる。もちろん、高次近似まで入れるにこしたことはないが、考慮すべき項数がふえると、数値計算は、質、量ともに、困難さをましてくるであろう。

また一方、項の省略をしすぎると、計算結果の精度の点で問題が生ずることになる。

本論文では、こうした点について、量的な評価を行うための簡便な方法を提案する。

まず、反射が無視される程海底勾配は緩やかであるとして導かれた角谷の式を採用する。湾幅の変化、海底摩擦を入れることも可能であるが⁵⁾、ここでは省略する。今回は、非線形項（波高有限性の効果をしめす項）と分散項の効果の比較を目的とするからである。したがって、波形変化に影響する地形の効果は、もっぱら水深変化によるものと考えている。もっとも、湾幅変化をとり入れることは容易である。また、海底摩擦を省略することは、現象を大きく見積ることになっている。

発生源では、津波の波高は数mのオーダーであるが、波源域は少なくとも数10 kmの拡りをもつから、線形理論の適用範囲にあるであろう。また、二次元問題として、方向分散は考えないこととする。これで、実際に起こりうる波より小さくは見積らないことになる。

水深は数 km の程度であるから、まず線形長波理論にしたがって、つまり、Green の式にしたがって波高が変化して行く。これによって求められた波形を使って、非線形項と線形項の大きさの比較をする。

ついで、非線形項を入れて波形変化を求める。このとき、波高は Green の式によって変化し、波形は前傾化する解析解がえられるから、これに基づいて分散項と非線形項の比較を行う。

こうした評価を行うとき、基準点で正弦波形をもつ波を考え、その波高、周期と、水深や海底勾配との組合せで、各項の相対的な比重がどうなっているかを計算する。

角谷の式の解析解を求めることはできない。このため、浅水理論に対応する解に基づいて分散項の大きさを評価することに若干の疑問が残るし、また、基準点で正弦波を考えることの妥当性も問題である。さらに、大きさを評価するときにとる測度の定義の仕方にも問題が残る。こうした点については、変形の最終点である砕波現象が良く表現できるか否かを見て判断することとする。

水平床上での砕波に対し、非線形効果のみを入れたもの、および分散効果をも入れた結果を、実験値と比べる。また、斜面上での砕波を非線形項のみを用いて推定し、実験結果と比較する。この結果、分散項を入れなくとも、現象をかなり良く説明することがわかる。

したがって、砕波以前の各項の大きさを、分散項ののぞいた解析によって評価することは妥当であると考え、三陸沖を代表する海底勾配および津波波形に対して評価し比較を行った。

この結果、少なくとも三陸沖で発生する津波に対しては、分散項を省略しても差支えないことが明らかとなった。

2. 基本方程式、その解および評価の方法

静水面からの水位上昇量を $\eta(x, t)$ とすると、角谷の式は、

$$\eta_x + \frac{3}{2}g^{-1/2}d^{-3/2}\eta\eta_\xi + \frac{1}{6}g^{-3/2}d^{1/2}\eta\xi\xi\xi + \frac{1}{4}d^{-1}d_x\eta = 0 \quad \dots\dots\dots (1)$$

と書かれる。ここで、第2項は非線形効果、第3項は分散性の効果、第4項が水深変化の効果を示す。 g は重力の加速度、 d は静水時の水深、 $\xi = \int (gd)^{-1/2} dx - t$ と

* 正会員 工博 中央大学教授 理工学部土木工学科

定義される一種の移動座標である。

(1) 線形項と非線形項の比較

線形領域では、式 (1) は

$$\eta_x + \frac{1}{4}d^{-1}d_x\eta = 0 \quad \dots\dots\dots(2)$$

と簡単になる。境界条件

$$x=0 \text{ で } d=d_0, \eta=f(t) \quad \dots\dots\dots(3)$$

をみたす解は容易に求められ

$$\eta = \left(\frac{d_0}{d}\right)^{1/4} f(-\xi) \quad \dots\dots\dots(4)$$

で与えられる⁶⁾。

ここで、 η の大きさを表示する測度を $\|\eta\|$ と表わすこととする。非線形項の大きさが線形項の $p\%$ となる条件は、式 (1) を参考として、

$$\begin{aligned} \frac{p}{100} \|\eta_x\| &= \frac{p}{100} \frac{1}{4} \frac{d_x}{d} \|\eta\| \\ &= \frac{3}{2} g^{-1/2} d^{-3/2} \|\eta\eta_\xi\| \quad \dots\dots\dots(5) \end{aligned}$$

として良いであろう。具体的に評価するために、

$$f(t) = \frac{H}{2} \sin \frac{2\pi}{T} t \quad \dots\dots\dots(6)$$

とする。式 (4) から、

$$\|\eta\| = \left(\frac{d_0}{d}\right)^{1/4} \|f(t)\| = \left(\frac{d_0}{d}\right)^{1/4} \frac{H}{2} \quad \dots\dots\dots(7)$$

と書いてよい。また、 ξ による偏微分は、 t による偏微分で置きかえられる。海底勾配 $d_x = m$ —一定とすれば、式 (5) の最後の等号から

$$\begin{aligned} \frac{p}{400} \frac{m}{d} &= \frac{3}{2} g^{-1/2} d^{-3/2} \left(\frac{d_0}{d}\right)^{1/4} \|f_t\| \\ &= \frac{3}{2} g^{-1/2} d^{-3/2} \left(\frac{d_0}{d}\right)^{1/4} \frac{\pi H}{T} \end{aligned}$$

となる。ここで $\|f_t\|$ は式 (6) を偏微分して $\pi H/T$ となることを使っている。上式を書き直すと、

$$d = d_0 \left[\frac{6\pi H}{\sqrt{gd_0} m T} \frac{100}{p} \right]^{4/3} \quad \dots\dots\dots(8)$$

これで与えられる水深 d において、非線形項が線形項の $p\%$ となる。 $\sqrt{gd_0} T$ は、基準点での波長であるから、(波形勾配)/(海底勾配)が支配的な因子である。

(2) 非線形項と分散項の比較

式 (1) から分散効果をのぞいた式

$$\eta_x + \frac{3}{2} g^{-1/2} d^{-3/2} \eta \eta_\xi + \frac{1}{4} d^{-1} d_x \eta = 0 \quad \dots\dots\dots(9)$$

の、境界条件、式 (3) をみたす解は、

$$\left. \begin{aligned} \eta &= \frac{1}{B} f\left(t + A\eta - \int \frac{dx}{\sqrt{gd}}\right), \\ \text{ただし、} A &= BI \\ B &= \left(\frac{d}{d_0}\right)^{1/4} \\ I &= \frac{3}{2} g^{-1/2} d^{1/4} \int d^{-7/4} dx \end{aligned} \right\}$$

$$= \frac{2}{\sqrt{gd_0}} \frac{1}{m} \left[\left(\frac{d_0}{d}\right)^{3/4} - 1 \right] \quad \dots\dots\dots(10)$$

である⁶⁾。ここで、 I の最後の表現は、海底勾配 m が一様な場合の解である。この η に対し、 η_t 、 η_{tt} は、

$$\eta_t = \frac{f_t}{B} [1 - If_t]^{-1}, \quad \eta_{tt} = \frac{f_{tt}}{B} [1 - If_t]^{-3} \quad \dots\dots(11)$$

となる。

式 (1) の非線形項と分散項を比べるに際し、簡単のために一度 ξ で積分する。このとき、非線形項は、

$$\frac{3}{4} g^{-1/2} d^{-3/2} \|\eta^2\| = \frac{3}{4} g^{-1/2} d^{-3/2} \frac{\|f\|^2}{B^2} \quad \dots\dots(12)$$

分散項は、

$$\frac{1}{6} g^{-3/2} d^{1/2} \|\eta_{tt}\| = \frac{1}{6} g^{-3/2} d^{1/2} \frac{\|f_{tt}\|}{B} [1 - If_t]^{-3} \quad \dots\dots\dots(13)$$

で評価される。分散項が非線形項の $q\%$ となるのは、

$$\begin{aligned} \frac{q}{100} \frac{3}{4} g^{-1/2} d^{-3/2} \frac{\|f\|^2}{B^2} \\ = \frac{1}{6} g^{-3/2} d^{1/2} \frac{\|f_{tt}\|}{B} [1 - If_t]^{-3} \end{aligned}$$

であり、これを変形すると、 $D = (d_0/d)^{3/4}$ に対し、

$$\begin{aligned} D^2 - \left[\frac{\sqrt{gd_0} m T}{2\pi H} + 1 \right] D \\ + \frac{\sqrt{gd_0} m T}{2\pi H} \left[\frac{16\pi^2}{9} \frac{d_0^3}{gHT^2} \frac{100}{q} \right]^{1/3} = 0 \quad \dots\dots\dots(14) \end{aligned}$$

をうる。これにより、分散項が非線形項の $q\%$ となる水深をうることができる。式 (8) を支配した (波形勾配)/(海底勾配) という値の他に、 gHT^2/d_0^3 で定義されるアーセル数にも依存している。

3. 碎波条件

前節で述べた評価方法には、疑問点がないわけではない。たとえば、大きさのひとつの尺度としてとりあげた、 $\|\eta\|$ などの表現方法が、どの程度適切なものかは、わかっていない。この点を、碎波条件をとりあげて検討する。

(1) 水平床上での碎波条件 (分散項のない時)

式 (1) で分散項、水深変化項を除外すると、

$$\eta_x + \frac{3}{2} g^{-1/2} d^{-3/2} \eta \eta_\xi = 0 \quad \dots\dots\dots(14)$$

で、境界条件、式 (3) をみたす解は、

$$\eta = f\left(t - g^{-1/2} d^{-1/2} x + \frac{3}{2} g^{-1/2} d^{-3/2} \eta x\right) \quad \dots\dots(15)$$

である。右辺の変数に、 η に比例する項がふくまれているから、高い所程早く進み、波形は前傾する。

碎波条件は、空間波形に直立部が生ずることである。すなわち、碎波の生ずる場所でえられる時間波形の、時

間に関する変化率は無限大となる。式(15)を時間 t に関して偏微分すると

$$\eta_t = f_t \left[1 - \frac{3}{2} \frac{1}{\sqrt{gd}} \frac{x}{d} f_t \right]^{-1} \dots\dots\dots (16)$$

をうる。基準点 $x=0$ でえられた波の時間記録より $(\partial\eta/\partial t)_0$ をえて、これを上式の f_t に入れ、砕波点までの距離を x_B とすると、

$$\left(\frac{\partial\eta}{\partial t} \right)_0 \sqrt{gd} = \frac{2}{3} \left(\frac{x_B}{d} \right)^{-1} \dots\dots\dots (17)$$

がえられる。これは別の方法で室田・岩田が求めた砕波条件と同じである⁷⁾。

(2) 水平床上での砕波条件(分散項を含む時)

分散項を入れると、砕波の発生は式(17)で与えられるより遅れることになる。Seliger は⁸⁾ Whitham⁹⁾ の導いた積分方程式

$$\eta_t + \alpha \eta \eta_x + \int_{-\infty}^{+\infty} K(x-\xi) \eta_t(\xi, t) d\xi = 0 \dots\dots\dots (18)$$

に基づいて、砕波条件として、

$$t \rightarrow |\alpha \cdot m(0) + K(0)|^{-1} \dots\dots\dots (19)$$

をえた。ここで、 α は $3/2 \cdot g^{1/2} d^{-1/2}$ 、 $m(0)$ は初期波形のうちもっとも急な勾配、 $K(0)$ は積分核の $x=\xi$ での値である。式(19)を導く際、つねに大きな値でおきかえるという過程がふくまれているので、実際の砕波条件というよりは、砕波条件の上限のひとつを与えるとして解釈するのが妥当であろう。

積分核 $K(x)$ は、もともと

$$K(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\frac{g}{k} \tanh kd \right)^{1/2} e^{ikx} dk \dots\dots\dots (20)$$

で与えられ、 $x \rightarrow 0$ のとき $x^{-1/2}$ のオーダーの特異性を有するものである。これは一般的には解けないので、Whitham が孤立波に対して用いた近似核を使うこととする⁹⁾。これは式元をもつ形で、

$$K_a(x) = \frac{\pi}{4} \sqrt{\frac{g}{d}} \exp \left[-\frac{\pi}{2} \left| \frac{x}{d} \right| \right] \dots\dots\dots (21)$$

と書かれる。この近似核を使って孤立波の砕波条件を求めると、 $H/d=0.89$ で、山田らの求めた厳密解¹⁰⁾ 0.826 に近く、またその時の波頂角は 110° で Stokes¹¹⁾ の求めた 120° にきわめて近い。

式(21)を採用すると、砕波条件は、

$$\left(\frac{\partial\eta}{\partial t} \right)_0 \sqrt{gd} = \frac{2}{3} \left(\frac{x_B}{d} \right)^{-1} + \frac{\pi}{6} \dots\dots\dots (22)$$

となる。

(3) 水平床上での砕波の実験値との比較

室田・岩田が、水平床上での段波の変形の実験⁷⁾を行っているので、その結果との比較を図-1に示す。室田・岩田の実験では、砕波の形式は、spilling, surging, plunging の三種類をふくんでいた。特に、前端に発達したクノイド波列をもつ例もあるにもかかわらず、式(22)よりは式(17)の方が実験値を良く説明している。

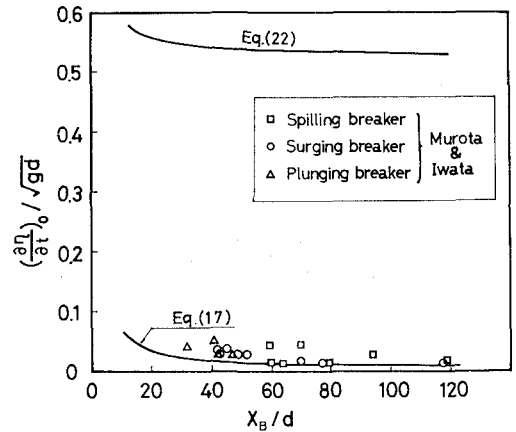


図-1 水平床上での段波の砕波

Seliger の評価に問題のあることはもちろんであるが、本来の $K(x)$ の $x=0$ における特異性は、Whitham の近似核 $K_a(x)$ のそれよりもっと強いから、砕波はさらに遅れる筈である。にもかかわらず、実験結果からみれば、非線形性のみを入れた式(17)が、現象に近い値を与えている。

(4) 斜面上での砕波条件

一樣勾配斜面での波形変形を与える式(10)を、式(11)の分母を零とする条件に入れ、また f として正弦波をとると、砕波条件

$$\frac{2\pi H}{\sqrt{gd_0} m T} = \left[\left(\frac{d_0}{d} \right)^{3/4} - 1 \right]^{-1} \dots\dots\dots (23)$$

をうる。

この式の妥当性を検討するため、実験値との比較を行うこととした。

使用した水路は、中央大学理工学部水理実験室の、長さ 50m、幅 1m、高さ 1m の造波水路である。模型海岸の勾配は $1/20$ である。模型前面は水平床で、そこでの水深は 40cm、45cm、50cm の三通りとした。

傾斜部は 6m 続き、その上端から長さ 2m の水平部がさらに続き、そののち、海岸模型前面と同じ水平床に急に戻るようになっている。水路末端には波消しを設置してある。

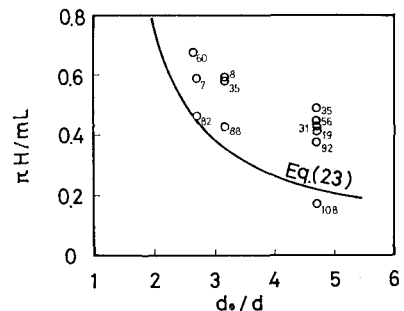


図-2 斜面での砕波

波高測定は、前面水平床部での入射波および反射波、傾斜部での波高変化、傾斜部終端での波高を対象としておこなった。これらの記録のうち、傾斜部終端地点で碎波が生ずるものを取りあげることにした。

図-2 に実験結果を示す。実験値に付記した数値は、 gHT^2/d_0^3 で定義したアーセル数の値である。この数値が小さいとき、長波というよりむしろ表面波とみなした方がよいことは、すでにわかっている⁶⁾。図-2 において、アーセル数が大きくなると、式 (23) が良い結果を与えている。

4. 非線形項と分散項の評価

前節の検討から、分散項を除外した解析でも、碎波条件のごとききわめて非線形性が強くしかも波頂曲率の大きな状態をも良く近似できることがわかった。

したがって、1. で述べた考えにしたがって各項の大きさを評価する。ここで、三陸沖を例にとることとし、水深 1 000 m までの海底勾配を海図によりきめると、約 1/50 である。

(1) 線形項と非線形項

いま、 $d_0=500$ m で $H=1$ m であったとして、 $p=10\%$, 50% , 100% となる水深を計算すると、表-1 の

表-1 線形項と非線形項の比較 ($m=1/50$, $d_0=500$ m, $H=1$ m)

周 期	水 深		
	$p=10\%$	50%	100%
1 min	1570 m	172 m	68.3m
2	583	68.3	27.1
3	340	40.0	15.8
4	232	27.1	10.8
5	172	20.1	8.0
6	135	15.8	6.3
7	110	12.9	5.1
8	91.9	10.8	4.3
9	78.6	9.2	3.7
10	68.3	8.0	3.2
11	60.1	7.0	2.8
12	53.5	6.3	2.5
13	48.1	5.6	2.2
14	43.6	5.1	2.0
15	39.8	4.7	1.9
20	27.1	3.2	1.3
25	20.1	2.4	0.93
30	15.8	1.9	0.73
35	12.9	1.5	0.60
40	10.8	1.3	0.51
50	8.0	0.93	0.37
60	6.3	0.73	0.29

通りとなる。実際の津波の周期は 20 分より長いものが多いと考えられるが、20 分の時を例にとると、水深 27 m 地点で非線形項は線形項の 10% 以上の大きさをもた無視できなくなる。したがって、かなり深い所から非線形性を入れて解析することが望ましい。

(2) 非線形項と分散項

表-2 は $m=1/50$, $d_0=500$ m, $H=1$ m としたとき、

$q=1\%$, 10% , 100% になる水深、および碎波水深を式 (14) および (23) によって求めたものである。

周期 10 分のとき、この四つの水深はほぼ一致しているから、分散項の効果のあらわれる時間的余裕はないと考えられる。

表-2 非線形項と分散項の比較 ($m=1/50$, $d_0=500$ m, $H=1$ m)

周 期	水 深			
	$q=1\%$	10%	100%	碎 波
1 min	—m	—m	—m	14.3 m
2	—	11.1	7.1	5.96
3	—	4.33	3.82	3.52
4	3.29	2.71	2.54	2.42
5	2.18	1.95	1.87	1.81
6	1.63	1.50	1.46	1.42
7	1.28	1.21	1.18	1.16
8	1.05	1.01	0.99	0.97
9	0.89	0.86	0.85	0.83
10	0.76	0.75	0.73	0.73
15	0.43	0.43	0.43	0.42

表-3 は、波高のみを 5 m とした場合である。これは現実におこりうる津波の最大値に近いものと考えてよい。周期 10 分のとき、 $q=10\%$ となるのは水深 6.37 m で、非線形波としての碎波は水深 5.96 m で生じ、その差は僅か 40 cm である。この二点間の距離は 20 m、これを進むに要する時間は 3 秒たらずである。したがって、もし分散項がきいて碎波が遅れるとしても、ごくわずかであろうと推測される。

表-3 非線形項と分散項の比較 ($m=1/50$, $d_0=500$ m, $H=5$ m)

周 期	水 深			
	$q=1\%$	10%	100%	碎 波
5 min	—m	18.2 m	15.7 m	14.3 m
10	6.99	6.37	6.14	5.96
15	3.80	3.65	3.58	3.52
20	2.54	2.47	2.45	2.42
30	1.46	1.44	1.43	1.42
40	0.99	0.98	0.98	0.97
50	0.73	0.73	0.73	0.72
60	0.57	0.57	0.57	0.57

5. 結 論

長波であるとの前提に基づき、角谷の式を使って、線形項、非線形項、分散項の重要性を評価するのに簡便な式をつくった。式 (8), (14) がそれである。

非線形項のみを入れた碎波条件式 (17), (23), および分散項まで考えた式 (22) をえて、これらを実験値と比べた結果、非線形項のみを入れた理論で十分説明されることがわかった。

この結果から、式 (8), (14) を導びく際に使用した、大きさの測度として定義した量が適当なものであること

もわかり、また、水深が浅くなるにつれて、線形項、非線形項、分散項という順に計算にとり入れて行く考え方が妥当なものであることが確認された。

こうして、三陸沖において期待される津波に対して評価した所、分散項を除外しても良いことがわかった。もちろん、実際の津波では反射を無視できないから、この論文で採用した方法で波形の追跡を行うと誤差が大きい可能性があるが、各項の相対的重要性の評価方法としては差支えないから、実際の津波の計算に際し、分散項は除外しても良いと結論できる。

謝辞: 本研究を行うにあたり、文部省より科学研究費(研究代表者 東北大学岩崎敏夫教授)、および実吉奨学会より研究助成金をいただいた。また、実験にあたって、大学院学生森龍三、当時学部学生であった柏木茂忠、道正尚志の諸君の熱心な助力をえた。ここに記して謝意を表する。

参 考 文 献

- 1) Boussinesq, J.: Essai sur la théorie des eaux courantes, Memo. Acad. Sciences, 2ème Sér., Tome 23, No. 1, pp. 1-680, 1877.
- 2) Korteweg, D. J. and G. de Vries: On the change of form of long waves advancing in a rectangular canal, and on a new type of long stationary waves, Phil. Mag. (5), 39, pp. 422-443, 1895.
- 3) Peregrine, D. H.: Long waves on a beach, J.F.M., Vol. 27, pp. 815-827, 1967.
- 4) Kakutani, T.: Effect of an uneven bottom on gravity waves, J. Phy. Soc. Japan, Vol. 30, No. 1, pp. 272-276, 1971.
- 5) 首藤伸夫: 海底摩擦による非線形長波の減衰, 第22回海講, pp. 65-68, 土木学会, 1975.
- 6) 首藤伸夫: 非線形長波の変形—水路幅, 水深の変化する場合—第21回海講, pp. 57-63, 土木学会, 1974.
- 7) 室田 明・岩田好一郎: 段波の変形に関する研究, 土木学会論文集, No. 160, pp. 49-58, 1968.
- 8) Seliger, R. L.: A note on the breaking of waves, Proc. Roy. Soc., Ser. A, Vol. 303, pp. 493-496, 1968.
- 9) Whitham, G. B.: Variational methods and applications to water waves, Proc. Roy. Soc., Ser. A, No. 299, pp. 6-25, 1967.
- 10) Yamada, H. et al.: Precise determination of the solitary waves of extreme height on water of a uniform depth, Rep. Res. Inst. for Applied Mech., Kyushu Univ., Vol. 16, No. 52, pp. 15-32, 1968.
- 11) たとえば Lamb, H.: Hydrodynamics, 6th ed., p. 418, Dover.