

長波の数値シミュレーションにおける安定性と 各種境界条件について

浜 中 建 一 郎*・ 木 下 勲**

1. ま え が き

長波の差分近似による数値シミュレーションは、比較的理論も計算も簡単であることから、これまでも多くの計算例が報告されている。しかし、実際にプログラミングをしようとするとき問題となるのは、関係する多くのパラメーターをいかに設定すれば良いかということにある。具体的には、計算の安定性に関することと、各種境界条件に関することが主であると思われる。本報告は、特に一次元水路モデルにだけ限定して、安定性、それに伴うスムージング、水深の急変、消波帯及び無反射性の境界条件につき、各種パラメーターとの関係を調べたものである。それらの結果から、今後数値シミュレーションを計画する際、各種パラメーターをいかに設定すべきかの目安を与えることを目的とした。

2. 安定性とスムージング

基礎方程式は、今回は目安をたてることを目的とするから、慣性項を無視し、一次元だけで^{1),2)}

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial M}{\partial t} &= -g(h+\eta) \frac{\partial \eta}{\partial x} - \frac{\tau_b}{\rho_w} \\ \frac{\partial \eta}{\partial t} &= -\frac{\partial M}{\partial x} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (1)$$

ここで、 M : 線流量、 η : 水位、 h : 水深、 ρ_w : 水の密度、 $\tau_b = \rho_w \gamma^2 |v|v$ 、 v : 流速、 γ^2 : 海底摩擦係数。

これに対する差分式は、いわゆる蛙跳び法を用い

$$\left. \begin{aligned} n+2M_j &= \frac{1}{1+Dt \cdot \gamma^2 \cdot |nM_j|/(h+\eta)^2} \\ &\cdot \left\{ nM_j - g(h+\eta) \frac{Dt}{\Delta x} (n+1\eta_{j+1} - n+1\eta_{j-1}) \right. \\ &\quad \left. - Dt \cdot \gamma^2 \cdot |nM_j| \cdot nM_j \right\} \\ n+3\eta_j &= n+1\eta_j - \frac{Dt}{\Delta x} (n+2M_{j+1} - n+2M_{j-1}) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (2)$$

ここで、メッシュ間隔に対する Courant-Friedrichs-Lewy の安定条件 $\Delta x/Dt \geq \sqrt{2gh_{\max}}$ で Δx , Dt を定め、水路

の造波境界点で周期変動の水位を与え計算を実行するのであるが、特に水深の浅い場合、時間の経過と共に計算は不安定となり易い。図-1 はその典型的な波形の例で

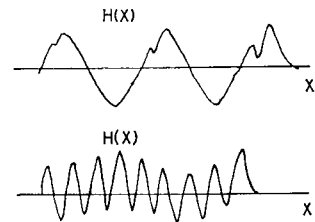


図-1 不安定波形

ある。上の波形は主に $\Delta x/L$ が大きい場合 (L は波長)、下は小さい場合である。そこでスムージングにより安定性を求めるのであるが、3点の重みを $a_{-1}=0.25$, $a_0=0.5$, $a_1=0.25$ を用いた。次に安定か不安定かの区別は、計算時間を無限にとることは不可能であるから、距離ステップ数を 400 個にとり、その間を進む間、波形が安定していれば良しとした。これは、結果を XY プロットに画かせ、目視により判断するのであるが、試みに距離ステップを 1000 個ほどに増して計算してみると、後半になって乱れるものは前半にもその兆候を見ることができたことによる。図-2 は求めた安定範囲とスムージン

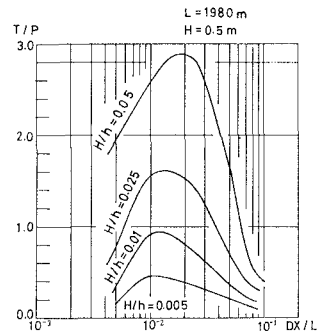


図-2 安定限界

グ頻度である。 T は入射波の周期、 P はスムージングを実行する時間間隔、 H は波高を表す。ここでのおのこの曲線の上側が安定である。なお、 $(\Delta x/Dt)/\sqrt{2gh_{\max}}$

* 正会員 北海道大学助手 工学部土木工学科

** 正会員 鹿島建設(株)札幌支店

(ただし >1) や H/L の値にはあまり影響がないことが確かめられた。また今後の計算では $\Delta x/\Delta t = \sqrt{2gh_{\max}}$ として進める。

次に進行する波のある瞬間の波形を

$$H/2 \cos(ik\Delta x)$$

とすると、簡単な計算から、1回のスムージングにより

$$\frac{H}{2} K_L \cos(ik\Delta x); \quad K_L = \sum_{j=-J}^J a_j \cos(jk\Delta x)$$

次に造波境界点から数えて第 n 波は、 $P \sec$ ごとにスムージングすると (nT/P) 回スムージングされているから

$$H_n = H_0 (K_L)^{nT/P}$$

任意の距離 x では、 $n=x/L$ として

$$H_x = H_0 (K_L)^{Tx/PL} \dots\dots\dots (3)$$

また今回の使用した重みでは

$$K_L = 0.5 \{1 + \cos(2\pi\Delta x/L)\}$$

実際の波の海底摩擦による波高減衰は Eaglson によると³⁾

$$H = H_0 \exp(-\varepsilon_b x/L)$$

$$\varepsilon_b = 4\bar{a}^2/\beta L (\sin 2kh + 2kh); \quad \beta = \sqrt{\sigma/2\nu}$$

$$\dots\dots\dots (4)$$

式 (3) を式 (4) との比較のため変形する。

$$H = H_0 \exp(-\alpha x/L); \quad \alpha = -T/P \log K_L$$

図-3、図-4 は、 ε_b と α の値を示す。これからわかることは ε_b と α は L に関して逆の特性を持っていることである。また 図-3、図-4 を用いて、図-2 の安定範囲の $n = \alpha/\varepsilon_b$ を求めたのが図-5 である。この図から α は ε_b に比し極端に大きいことがわかる。しかし、岩垣³⁾らの報告によると、実際の現地観測や実験の結果でもかなり大きな値となることが報告されており、どのようなスムージングが適当であるかは、今後のより正確な実験、観測を待たねばならない。以後の計算では、図-2

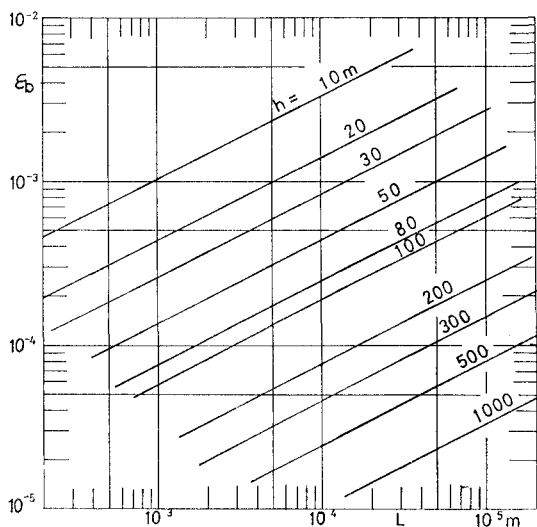


図-3 ε_b

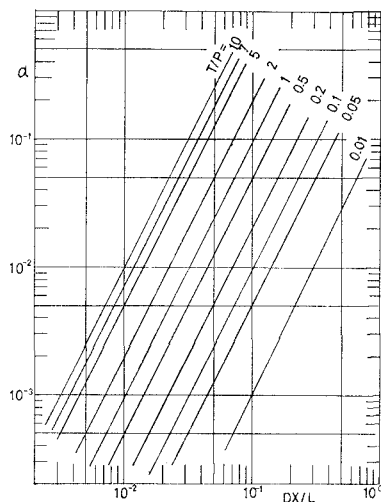


図-4 α

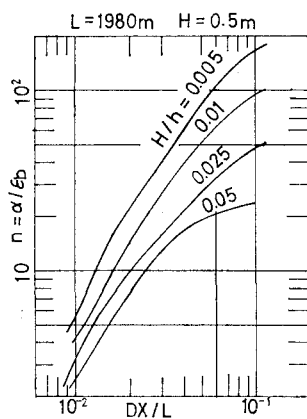


図-5 n

で求めた T/P の最小値を用いることとする。

3. 水深変化

水深の急変に伴う波高の変化は、深水部で $\Delta x/\Delta t$ を、浅水部で T/P を安定なように定め計算を行ったが、その結果は図-6 に示されているように、線形解（たとえば梶浦⁴⁾）と、かなり良く一致している。

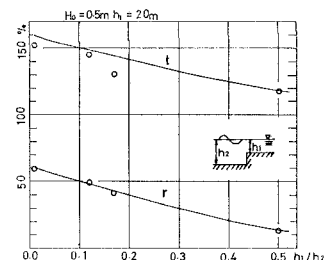


図-6 水深急変部における反射率、透過率

4. 消波帯と消波効果

水理実験において消波は常に問題となるが、数値シミュレーションにおいても同様である。消波帯や消波構のシミュレーションは、摩擦係数 r を大きくすることにより可能であるが、その特性を調べておくことは必要であろう。まず、 r を適当な大きな値を水路上一様に与え、波高の変化を見たのが、図-7、図-8 である。これらから、 $\Delta x/L$ が大きいほど、減衰の激しいことがわかる。図-8 の H_{i+1}/H_i は一波長あたりの減衰率であり、 H_i

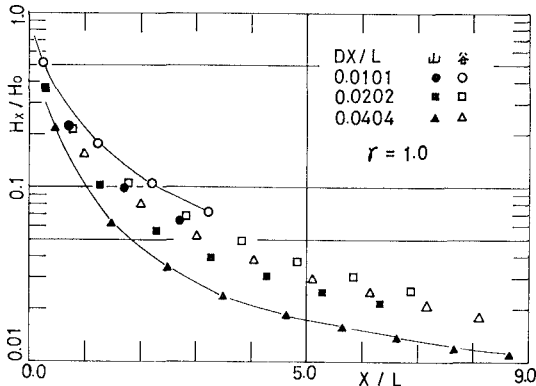


図-7 消波帯内での波高の減衰

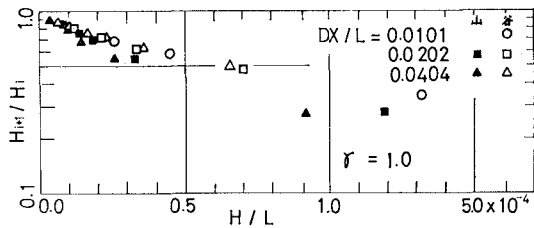


図-8 消波帯内での波高の減衰率

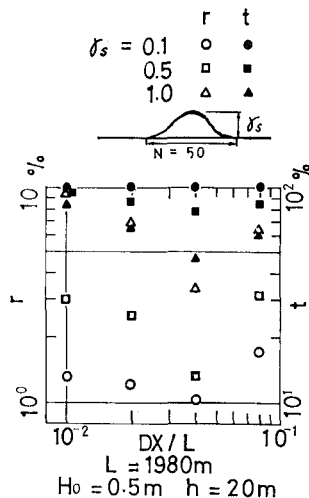


図-9 消波構の反射率透過率

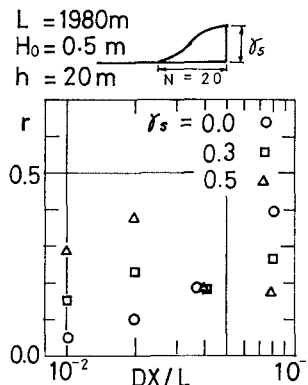


図-10 無反射条件と消波帯

L の変化によるグラフとなっているが、実際には差分式からわかるように、直接的には流速に関係している。水路の途中に消波構や末端に消波帯を設ける場合、いまのように r の値を大きくしては計算が不安定になる。そこで今、消波構のモデルとして $0.5 \cdot \gamma_s \{1 - \cos(2\pi i/N)\}$ として与えたのが図-9 である。 r は反射率、 t は透過率、いずれも波高比で求めたものである。これによると $\Delta x/L = 0.08$ での透過率が図-7 の結果からみて不当に高くなっているが、これはスムージングによる減衰効果が非常に強すぎ、消波帯に入る波高がかなり小さくなったためである。実際にパラメーターを設定するためには、現実の波の特性との比較において決定しなければならないが、この他にも位相の遅れに関することもあり、さらに検討を要する。

5. 無反射性の境界条件

これは任意の反射率を有する境界条件として、谷本⁹⁾ら、山本¹⁰⁾らにより発表されているもののうち、特に反射率を零とするものを取り上げ検討したものである。今、波が考えているメッシュの並びと同じ方向から入射するとして、基本式は

$$\frac{\partial M}{\partial x} + \frac{1}{c} \frac{\partial M}{\partial t} = 0 \quad \dots (5)$$

これに対する差分式は

$$nM_j = nM_{j-1} - \frac{1}{c} \frac{\Delta x}{\Delta t} (nM_{j-1} - n_{-1}M_{j-1}) \quad \dots (6)$$

これを用いて種々計算を行ったが、 $\Delta x/L$ の影響がかなり強く、図示はしていないが、例えば、 $\Delta x/L \approx 0.01$ では1% 台の反射率になるが、 $\Delta x/L \approx 0.08$ では10% 程度にもなった。計算の安定性を考えれば、高周波成分ほど有害であることを考え、さらに小さくするように、試みに式 (1) における運動方程式を次の式にして計算を行った。

$$\frac{\partial M}{\partial t} = -gh \frac{\partial \eta}{\partial x} - \frac{\tau_b}{\rho_w} \quad \dots (7)$$

この式は、他の実際の計算例にも多く使われており、いずれの方が良いかは別の問題であるが、計算の安定性は非常に良く、スムージングの必要はなかった。また無反射性の境界条件も、図-10 の $\gamma_s = 0.0$ で示すようにかなり改善されている。これは、スムージングによる時間差分量の急変がなくなったためであろう。さらに $\Delta x/L$ の変化による反射率の変化を少なくするため、前面に消波帯を設けてみたのが同じく図-10 に示されている。

4. で述べたように、消波効果は $\Delta x/L$ の大きいほど大きいので、 γ_s を適当に選べば、ほぼ一様な反射率とすることが可能である。最

終的には入射波のスペクトルとの兼ねいで決めるべきであろう。

6. 2次元問題における無反射性の境界

前節で検討したことは、2次元の場合に使えなければあまり意味はない。しかし結果的にはまだ完全なものは見付かっていないようであるが、ここで若干の検討を行い、問題点を指摘してみる。2次元の場合は、任意の入射角、任意の周期を持った多くの波が同時に自由に通過しなければならないが、そのような場合の境界面での値の推定式はまだわかっていない。しかし、前節で検討したように、前面に消波帯を設けることにより、ある程度満足されることが予想される。しかし今回は、実際に2次元モデルを作ったの計算は行っていないので、具体的にどの程度満足されるかを示すことはできない。

次に、造波境界面での無反射性であるが、原理的には次のように考える。すなわち、造波境界面の手前で入射波と反射波を分離し、その反射波が造波境界面に達した時の水位なり線流量を推定して、造波境界面での造波条件に加えることである。分離する方法は、造波条件で与える入射波が単一正弦波や有限波の重ね合せの場合は位相差を考え、分離点での入射波の値を直接求めることにより可能であろうが、ある周波数帯を持った不規則波の場合は、検定用の二次元水路モデルを考え、一緒に造波条件を与え、他端は前節で述べた無反射の条件を与えれば良い。この場合、当然のことながらできる限り他端での反射は零に近いことが望ましい。そこで、谷本⁵⁾の場合と同様 $\Delta x / \Delta t \approx \sqrt{gh}$ となるようにした場合の反射率を調べたのが、図-11である。これによると、反射率は1%以下にすることができる。しかし、図中の k の値を完全に1.0とした場合は $\Delta x / L = 0.08$ のものは発散した。いずれかの方法で分離した反射波は造波境界面に対し任意の入射角を持っているから、反射波の造波境界面での値を推定するには、一般の2次元無反射条件の場合

と同様な問題が生ずる。しかも、その時の誤差は、次に分離する反射波の中に含まれて戻って来、その小さなループの中で発散する可能性を持っている。以上の点を考えると、推定式決定には十分の吟味が必要となろう。

7. あとがき

まえがきに述べるべきであったが、不規則入力波に対する港の応答を調べることを目的とすることを暗に含めつつ、二次元問題に対する検討と、二次元問題の無反射性に関する若干の考察を述べてきたが、これだけではまだ十分ではない。用いる基本式についても、式(1)と(7)のいずれを用いるべきか、さらに検討する必要がある。式(7)の場合スムージングの必要はなかったが、慣性項その他の非線型項が入った場合、やはりスムージングが必要となることが予想される。

また、今回の計算の結果から $\Delta x / L$ の値が、いろいろな性質に非常に強く影響することがわかった。このパラメーターはあくまでも計算上のものであり、実際の波には存在しないわけだから、諸々のパラメーターを決定する際には十分な注意が必要であろう。

二次元の場合の問題点として、無反射条件の問題の他に、構造物の凸の隅角部の問題もあろう。ここでは、大なり小なり頻繁に剝離現象が生じており、これまでの層流理論では表現することはできない。もちろん、その影響が、問題とする空間的、時間的範囲で無視し得るほど小さいのであれば良いのだが、いまの所どの程度影響されているかわかっていない。これは特に流況を調べる際には重要と思われる。

最後に特に図示はしていないが、式(1)、式(7)いずれを用いても、計算上得られる波速は問題にならぬ程度に長波の波速に一致していた。

なお、計算は、北海道大学工学部大型計算機センター内の FACOM 230-60/75 によった。

参 考 文 献

- 1) 伊藤 剛: 数値解析の応用と基礎, アテネ出版.
- 2) 土木学会: 土木工学における数値解析/流体解析編, サイエンス社, pp. 46-52, 1974.
- 3) 岩垣雄一・土屋義人・坂井順行: 海底摩擦による波高減衰の基礎的研究(2), 第11回海講講演集, pp. 62-68, 1964.
- 4) 梶浦欣二郎: 津波, 水工学夏期研修会(B), pp. B-10-1~B-10-18, 1971.
- 5) 谷本勝利・小舟浩治: 数値波動解析法による港内波高分布の計算, 第22回海講論文集, pp. 249-253, 1975.
- 6) 山本正昭・長野 章・菅原輝男: 波の数値実験の漁港整備計画への適用, 第22回海講論文集, pp. 255-258, 1975.

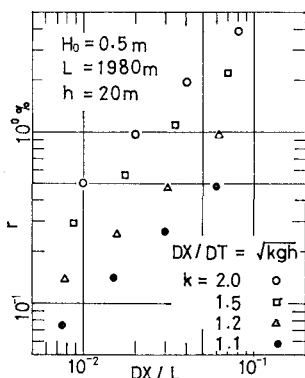


図-11 $\Delta x / \Delta t$ の変化による無反射条件