

実験水路における波の伝播について

高山 知司*・神山 豊**

1. ま え が き

実験水路で造波板を定期的に運動させた時に生じる波を造波板から離れた地点で測定してみると、最初のうちは波高が安定せず、しばらく変動するのが認められる。造波板を動かし始めた当初は水面は静水面を保っているが、そのうち周期の長い、波高の小さい波が現われ、それから次第に周期が短く、波高が大きくなる。波高はある最大値に達するまで増大を続け、最大値に達した後は振動しながら一定波高に収束する。造波板による発生波のこのような変動特性について、合田¹⁾は実験的に検討を加え、有効測定時間内でも 10~20% の波高変動があることを示している。

波の伝播における波高分布を解析したものとしては、波のエネルギー伝播に基づいて計算する方法を示した Sverdrup と Munk²⁾ の研究や、ある地点での水面変位を正弦波が N 波続いているものとして表わし、この地点から波が離れて行くに従って波高の分布形がどのように変化するかを調べた Pierson³⁾ の研究がある。前者では、波は一様に一定波高に近づき、前述のような波高変動は現れない。また、後者では、波高変動の特性は表わすことができるが、深水波を対象としていること、および最初に水面変動を条件として与えていることのために造波板による発生波の問題に適用するには問題がある。

本論文では、著者の 1 人がこのほど振動するタンク内の発生波に関して求めた非定常波の解⁴⁾ の応用の一つとして、ピストンタイプの造波板によって起こされる波の伝播現象を解析する。

2. 波の伝播の理論と計算例

矩形タンクが外力によって水平方向に振動されると、タンク内の水の表面には波が発生する。このタンク内発生波を解析するために、次のような仮定を設けて、問題を簡単にする。

- a) タンクは剛体で、側壁、底面の変形は生じない。
- b) タンクの変位はタンクの長軸方向のみに生じ、幅方

向の水粒子の運動は発生しない。

c) タンク内の水は非粘性で、非圧縮性である。

d) タンクの変位は小さく、その結果、水粒子の運動は小さい。

この仮定の下では、水粒子の運動方程式中の非線型項は無視され、次のような線型化された運動方程式が得られる。

$$\frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{\partial p}{\rho \partial x} - f''(t) \dots\dots\dots (1)$$

$$\frac{\partial w}{\partial z} = -\frac{\partial p}{\rho \partial z} - g \dots\dots\dots (2)$$

ここに、 x, z は 図—1 に示すようなタンク長軸方向および鉛直方向の座標で、座標原点は静水面上の側壁に固定されている。 u, w はそれぞれ x および z 軸方向の水粒子速度であり、 t, p, g, ρ はそれぞれ時間、圧力、重力加速度、水の密度を示す。タンク変位を示す関数 $f(t)$ は時間のみの関数であるとする。

質量保存の式は非圧縮性の仮定から次式で表わされる。

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \dots\dots\dots (3)$$

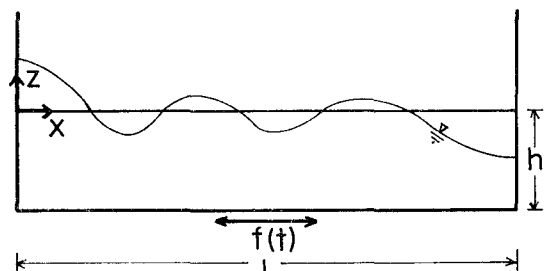
水面における水粒子の連続と圧力の条件は仮定から次式で与えられる。

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} = w_{z=0} \dots\dots\dots (4)$$

$$p_{z=\zeta} = 0 \dots\dots\dots (5)$$

ここに、 ζ は静水面からの水面変動量を示す。

タンク側壁および底面における境界条件は、 x, z が移動座標であることから次式で与えられる。



図—1 矩形タンクモデル

* 正会員 運輸省 港湾技術研究所水工部

** 運輸省 港湾技術研究所海洋水理部

$$u_{x=0, t=0} \dots\dots\dots (6)$$

$$w_{z=-h} = 0 \dots\dots\dots (7)$$

ここに、 l はタンクの長さ、 h は水深である。

タンクが振動開始するまでは、タンク内の水位は静止状態にあるので

$$u_{t \leq 0} = 0, w_{t \leq 0} = 0 \dots\dots\dots (8)$$

となる。また、水面の初期変位はないので、水粒子の移動距離は

$$X = \int_0^t u dt, Z = \int_0^t w dt \dots\dots\dots (9)$$

で与えられる。ここに、 X, Z は静水状態からの水粒子の移動距離である。

式(9)を考慮して、式(6)の境界条件を満足する u は次式の形で与えられる。

$$u = \sum_{n=0}^{\infty} A'_n(t) B_n(z) \sin \frac{n\pi}{l} x \dots\dots\dots (10)$$

ここに、 $A_n(t), B_n(z)$ はそれぞれ t のみおよび z のみの関数である。

式(10)を式(3)に代入し、式(7)の条件を考慮して、 w を求めると

$$w = - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n\pi}{l} A'_n(t) \cos \frac{n\pi}{l} x \int_{-h}^z B_n(z) dz \dots\dots\dots (11)$$

となる。さらに求まった w を式(4)に代入すると、水面変動 ζ は次式で与えられる。

$$\zeta = - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n\pi}{l} A_n(t) \cos \frac{n\pi}{l} x \int_{-h}^0 B_n(z) dz \dots\dots\dots (12)$$

式(11)を式(2)に代入し、式(5)の条件を考慮して、圧力 p を求めると

$$p = \rho \sum_{n=0}^{\infty} \left[A''_n(t) \int_0^z B_n(\xi) d\xi d\eta - g A_n(t) \int_{-h}^0 B_n(z) dz \right] \frac{n\pi}{l} \cos \frac{n\pi}{l} x - \rho g z \dots\dots\dots (13)$$

となる。ただし、この式の誘導において、仮定から水粒子の鉛直加速度は重力加速度に比して非常に小さいとしている。

式(10), (13)を式(1)に代入すると

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} A''_n(t) B_n(z) \sin \frac{n\pi}{l} x &= \sum_{n=0}^{\infty} \left[A''_n(t) \int_0^z \int_{-h}^{\eta} B_n(\xi) d\xi d\eta - g A_n(t) \int_{-h}^0 B_n(z) dz \right] \\ &\times \left(\frac{n\pi}{l} \right)^2 \sin \frac{n\pi}{l} x - f''(t) \dots\dots\dots (14) \end{aligned}$$

となる。これを z で微分すると、 $B_n(z)$ に関する微分方程式が求まり、これを解くと

$$B_n(z) = \cosh \frac{n\pi}{l} (h+z) \dots\dots\dots (15)$$

となる。これを式(14)に代入して整理すると、 $A_n(t)$ に

関する次のような微分方程式が求まる。

$$A''_n(t) + \omega_n^2 A_n(t) = - \frac{[1 - (-1)^n]}{n\pi} f''(t) \left/ \cosh \frac{n\pi h}{l} \right. \dots\dots\dots (16)$$

ここに、

$$\omega_n^2 = g \frac{n\pi}{l} \tanh \frac{n\pi h}{l} \dots\dots\dots (17)$$

である。

式(16)を式(8), (9)の条件の下で解くと、 $A_n(t)$ は次式のように求まる。

$$A_n(t) = - \frac{[1 - (-1)^n]}{n\pi \cosh(n\pi h/l)} \left[f(t) - \omega_n \int_0^t \sin \omega_n(t-\tau) f(\tau) d\tau \right] \dots\dots\dots (18)$$

タンクの変位 $f(t)$ が与えられるなら、式(18)で $A_n(t)$ が求まり、水面変動 ζ は式(15)を式(12)に代入して、次式で求めることができる。

$$\zeta = - \sum_{n=0}^{\infty} A_n(t) \cos \frac{n\pi}{l} x \sinh \frac{n\pi h}{l} \dots\dots\dots (19)$$

以上のようにして求まったタンク内発生波の非定常解は、次のように考えることによってビストンタイプの造波板による発生波の伝播計算に応用することができる。

タンク内に発生する波のうちで最も周期の長い成分波は、式(17)で $n=1$ の波である。この波の波長 L は $L=2l$ であるから、水深 h に比してタンクの長さ l が十分長ければ、波速は長波の波速 $\sqrt{gh}$ で与えられる。タンクの一端の側壁を造波板とみなすと、反対側の側壁で起こされた波のうち長波成分の波が波高測点に達するまでは、造波板とみなした側壁によって起こされた波だけがこの測点に存在することになって、造波板で起こされた波の伝播計算ができることになる。

図-2 は、水深 $h=0.4$ m の水路において造波板を周期 $T=1$ sec の正弦波で5周期だけ動かして止めた場合の波の伝播状況を計算したものである。計算ではタンクの長さを $l=100$ m としてある。タンクの変位 $f(t)$ は造波板の動きから次式で与えられる。

$$f(t) = \begin{cases} B \sin 2\pi t/T & (0 \leq t \leq 5T) \\ 0 & (t \leq 0, t > 5T) \end{cases} \dots\dots\dots (20)$$

ここに、 B は造波板の振幅である。

図-2 からわかるように、造波板によって起こされた波の波列は造波板から離れるにつれて、横に引き延ばされた形になる。これは速度分散によるものである。最初に伝わってくる波は $x = \sqrt{gh} t$ の直線によく乗っていて、長波の波速で伝わるのがわかる。波高分布は、造波板付近では矩形分布を示し、造波板から離れるにつれて台形状になり、さらには一山形の分布形へ移行する。群速度を c_g とすると、波列の中心部は $x = c_g t$ の直線に平行になっていて、波列は全体として $c_g (=0.89 \text{ m/sec})$ の速度で伝わるのがわかる。以上のように、計算結果

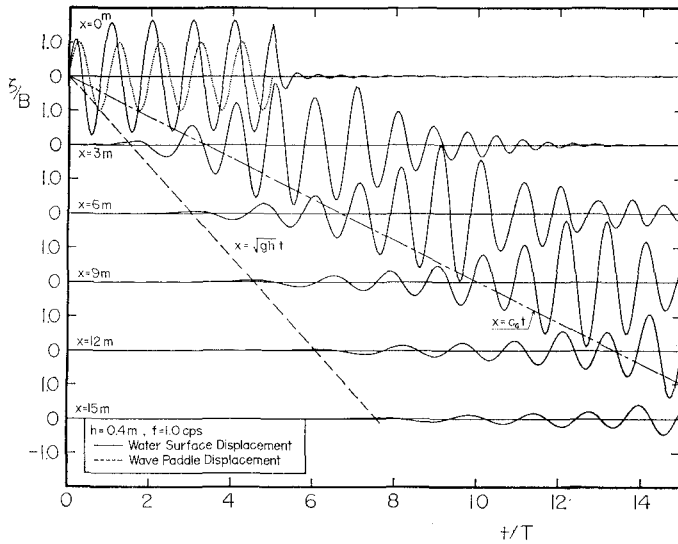


図-2 波列の伝播図

は今までに観測によって得られた波の伝播特性をよく表わしている。また、非定常造波理論で特徴的なことは、 $x=0$ での第 1 波が後続の第 2, 第 3 波に比して波高、

周期共に小さく、そのため水面変動が造波板の運動と位相のずれを生じることである。

3. 実験による理論の検証

非定常造波理論の妥当性を検証するために、港湾技術研究所の 40 m 不規則波造波水路を用いて実験を行った。この水路にはピストンタイプの造波板が設置されていて、理論検証に最適であった。水路幅は造波板前面で 2.0 m, 7 m の区間で 1.5 m に漸次縮小されているため、水路幅縮小の効果を考慮に入れて、水路幅 1.5 m の区間に対する理論計算値を 1.15 倍大きくしている。

波高計は造波板の中立位置から $x=0.065, 10, 15\text{ m}$ の 3 点に設置した。造波板の動きは変位計、波高は容量式波高計を用いて測定した。造波板の変位と波高はデータレコーダに記録し、これを A/D 変換して解析に用いた。

図-3 (a)~(c) に水深 0.4 m で造波板の運動周波数

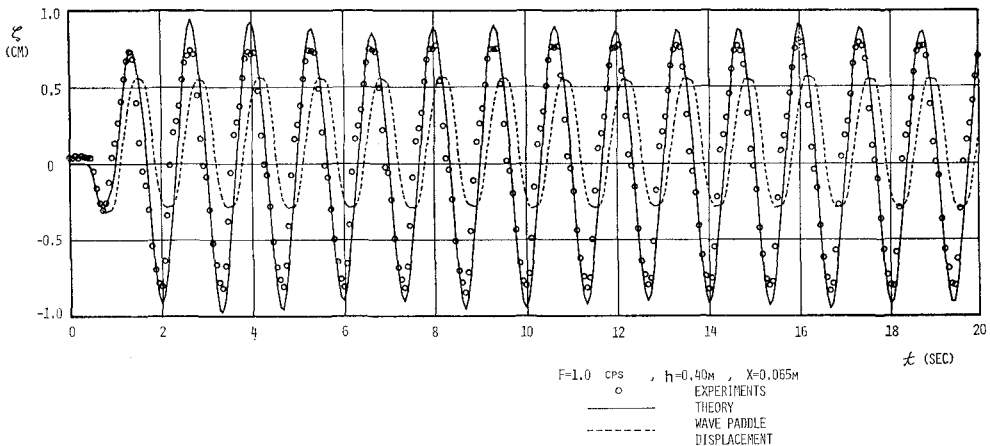


図-3 (a) 理論値と実験値との比較 ($x=0.065\text{ m}$)

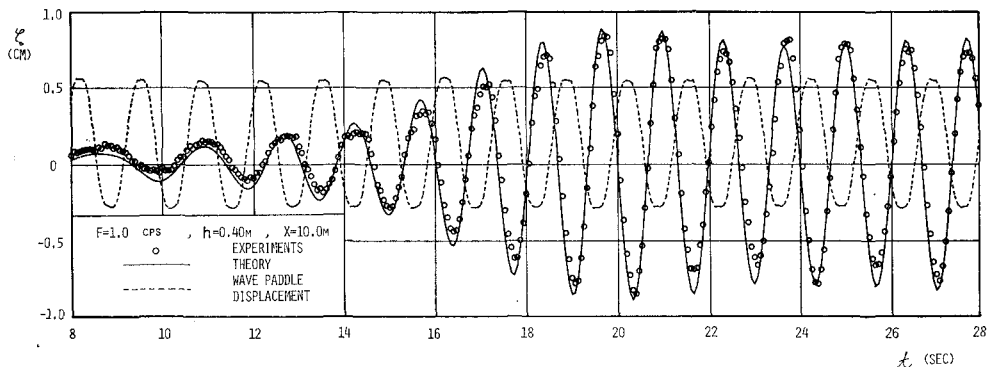
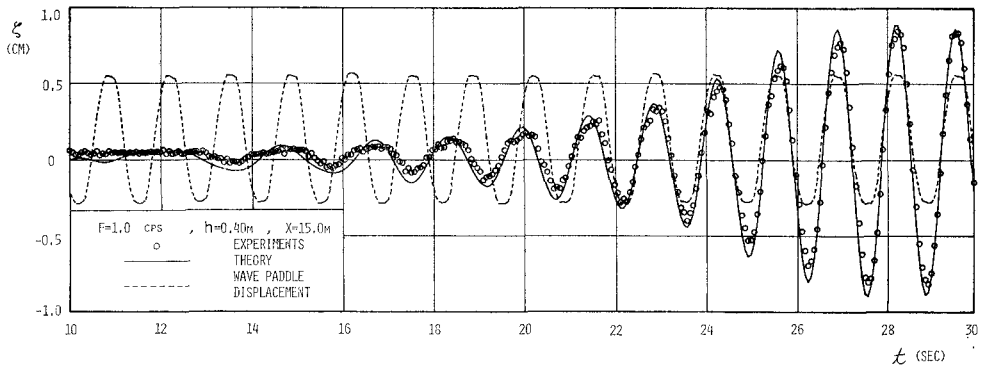


図-3 (b) 理論値と実験値との比較 ($x=10\text{ m}$)

図-3 (c) 理論値と実験値との比較 ($x=15\text{m}$)

が $f=1.0\text{cps}$ のものを一例として示している。点線で示した造波板の変位をみると、造波板の運動中心は初期の段階で大きく移動するとともに、その動きも山と谷で平らになっていて、完全な正弦波ではない。このため理論計算には測定された造波板の変位を用いて行った。

図-3 (a) は、造波板すぐ前面 $x=0.065\text{m}$ での理論計算値と実験値とを比較したものである。計算値は実験値より約 1.1 倍程度大きいけれども、両者の波形はよく一致している。

図-3 (b) は $x=10\text{m}$ において計算値と実験値との比較図である。計算値と実験値とは波形および波高ともよく一致し、理論の妥当性を裏付けている。

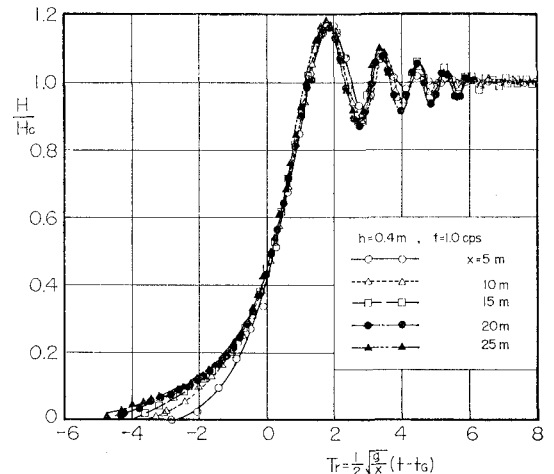
図-3 (c) は $x=15\text{m}$ の場合である。これも計算値と実験値はよく一致している。ただし、 $t=14\text{sec}$ 付近の周期の長い波では、実験値は理論値ほど大きくない。しかし、この付近では水面変動そのものが非常に小さいため、実験誤差による影響もかなりあると思われる。

以上のように理論計算結果は実験とよく一致し、理論の妥当性を検証することができた。

4. 波の伝播における波高分布

波の伝播における波高分布を調べるために、各種の条件に対して理論計算を行った。波高分布の解析には正弦振動による計算結果だけを用いた。実験値を参照しなかったのは、3. で述べたように実験水路の造波特性が現われているためである。波高としては、計算された水面変動の極大値と極小値間の高低差を用い、波の到達時刻は極大値または極小値の現われる時刻とした。

図-4 は、水深 $h=0.4\text{m}$ 、周波数 $f=1.0\text{cps}$ の場合について、造波板から 5, 10, 15, 20, 25m の位置における波高分布を示したものである。縦軸は一定波高 H_0 に対する各波の波高 H との比を示している。また、横軸は深水波の伝播における波高分布を表わすパラメータ $1/2\sqrt{g/x}(t-t_0)$ を変形した形

図-4 波高分布図 ($f=1.0\text{cps}$, $h=0.4\text{m}$)

$$T_r = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{g}{x}} (t - t_0) \dots\dots\dots (21)$$

を用いた。ここに、 t_0 は群速度で進行する波の到達時刻である。最初の波の到達時刻における T_r の値は式 (21) および 図-4 から $\sqrt{x}$ の増大とともに小さくなることがわかる。 $T_r < 0$ では波高はゆるやかに増大し、 $T_r = 0$ では $H/H_0 \approx 0.4$ となる。このことは、群速度で進んできた波が到達する時刻にはまだ波高が増大している途中であることを示している。 $T_r = 0$ 付近から波高は直線的に増大し、 $T_r = 1.75$ 付近で最大の波高を示す。最大波高は本ケースの場合 x に無関係にほぼ $H/H_0 = 1.16$ 程度である。さらに T_r が増大すると、波高は極大・極小を繰返しながら一定波高に近づく。

図-5 は、図-4 と同じ水深で、造波板の運動周波数を 0.5cps にした場合である。本ケースでは、水深波長比が $h/L = 0.108$ と小さく、群速度は長波の波速に近い。このため、 $T_r = 0$ では $H/H_0 = 0.25$ と、図-4 の半分程度の値である。 $T_r = 0$ 付近から波高は直線的に増大し、 $x=5\text{m}$ では $T_r = 1.9$ 、 $x \geq 10\text{m}$ では $T_r = 1.25$ で最大値を示す。さらに T_r が増大すると、図-4 と同様

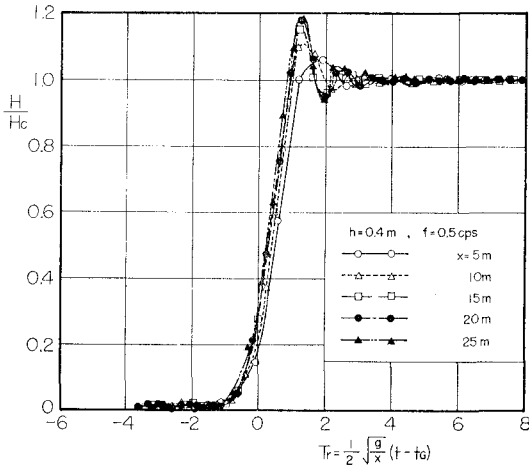
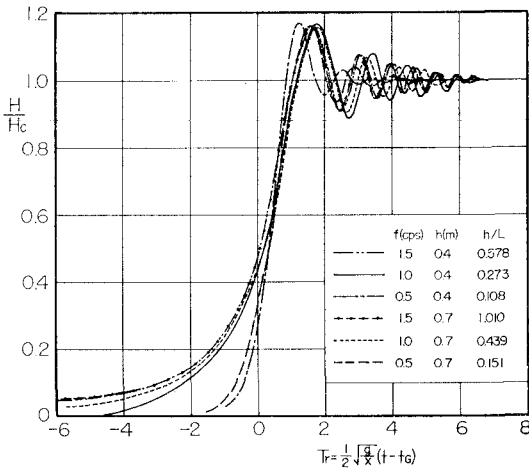

 図-5 波高分布図 ($f=0.5$ cps, $h=0.4$ m)


図-6 波高分布図

に極大・極小を繰返しながら一定波高に近づく。特に x が大きいほど波高の変動は大きいことがわかる。

図-6 は、水深が $h=0.4$ と 0.7 m、造波板の運動周波数が $f=0.5, 1.0, 1.5$ cps であるケースについて計算した波高分布をとりまとめたものである。また、図-6 の曲線は x の値によって少しずつ異なっている分布曲線のうち、特に大きな差を示すものを除いた残りの点についての平均的な波高分布曲線を各ケースについて示したものである。図-6 からわかるように、波高の最大値の現われる点は造波板の周波数および水深によって少しずつ異なるけれども、最大値はほぼ一定で $H/H_0=1.16$ である。波高変動は、 $T_r \geq 4$ では $\pm 5\%$ 、 $T_r \geq 6$ では $\pm 2\%$ 以内である。このことを利用して、波高変動を考慮した有効測定時間の計算方法を簡単な例題で説明する。

造波板から模型までの距離は 25 m、平均水深は 0.4 m

で、実験波は周期 1 sec の規則波であるとする。入射波の波高変動を 10% 以内に抑えて実験する場合、造波板による発生波と再反射波に伴う波高変動の和が 10% 以内になるようにすればよい。一応この場合、どちらの影響も 5% 以内に収めるものとする。発生波の変動を 5% 以内に収めるためには、 $T_r=4$ を満足する時刻から測定開始すればよく、式 (21) を変形して、 $t > 2T_r \sqrt{x/g} + t_0 = 40.8$ sec として求まる。模型の反射率を $K_r=0.5$ とすると、図-6 から $f=1.0$ cps, $h=0.4$ m の線で $H/H_0=0.05/K_r=0.1$ に対応する T_r を読み取ると、 $T_r=-2$ となる。これから再反射波の影響を $H/H_0 < 0.05$ とするための最大測定時刻は $t < 2T_r \sqrt{3x/g} + 3t_0 = 72.9$ sec となる。この結果、10% の波高変動を認めた場合の有効測定時刻は 40.8 sec から 72.9 sec の間の 32.1 sec となる。

以上のように、この方法による有効測定時間の計算にはこの時間内の波高変動ばかりでなく、模型による反射率も考慮することができるという利点がある。

5. あとがき

振動している矩形タンク内に発生する波の非定常解を求め、矩形タンクの長さを十分長くすることによってピストンタイプの造波板によって起こされる波の伝播計算にこの解が適用できることを示した。この方法による理論計算値と実験値とを比較した結果、両者はよく一致し、この方法の妥当性を検証することができた。理論計算結果に基づいて、模型実験における有効測定時間の計算方法を提案した。この理論解は線型理論から導かれたものであるため、造波板の振幅が大きくなるにつれて精度が落ちてくる。そこで、今後この理論を非線型項を含んだ非定常造波理論にまで発展させたいと思っている。

最後に、本研究を遂行するに当たって終始有意義な助言を与えて下さった港湾技術研究所合田良実波浪研究室長に深く感謝する次第である。

参考文献

- 1) 合田良実： 造波水路における波浪実験の二、三の問題について、第15回海岸工学講演会講演集，pp. 50～57, 1968.
- 2) Ippen, A.T. (ed): Estuary and Coastline Hydrodynamics, McGraw-Hill Inc., New York, pp. 61～63 1966, による。
- 3) Pierson, W.J.: On the Propagation of Waves from a Model Fetch at Sea, Proc. of NBS Semicentennial Symposium on Gravity Waves, pp. 175-185, 1952.
- 4) Takayama, T.: Theory of Transient Fluid Waves in a Vibrated Storage Tank, Rep. Port and Harbour Research Institute, Vol. 15, No. 2, 1976.
- 5) Lamb, H.: Hydrodynamics, Cambridge Univ. Press, 6th ed., pp. 384-398, 1932.