

ストークス波とクノイド波の比較研究

堀 川 清 司*・西 村 仁 嗣**

1. 緒 言

ストークス波^{1),2)}とクノイド波³⁾⁻⁵⁾はいずれも同一の方程式系に対する摂動解でありながら、その特性は互いに大きく異なっている。これら2つの波動理論を誘導の段階で明確に対比し、かつまたそれぞれの精度を比較して各理論の適用限界を知るための一助とするのが本研究の目的である。

波動解の実用性を論じるためには2つの点を明らかにせねばならない。その第一は基本方程式および境界条件を導く過程においてなされた各種の仮説が実際の現象にどの程度符合しているかという問題である。また第二は解が方程式に対してどの程度の誤差を有しているかという問題であり、ここではもっぱらこの点のみを取り扱うこととする。

2. 基本方程式および境界条件

水平床上を一定方向に一定速度 C で進行する2次元の重力波を考える。底面上波の進行方向に X 軸、鉛直上向きに Z 軸ととり、時間を T とする。この固定座標系に対し波とともに速度 C で移動する無次元の座標系 (x, z, t) を次のように定義する。

$$x=(X-CT)/\delta, \quad z=Z/\delta, \quad t=T/\tau \quad (1)$$

ここに、 δ は水深、 τ は波動の周期である。

この移動系から見て定常流となるような波動現象をとり扱うことにすれば、固定座標系から見た水粒子速度の

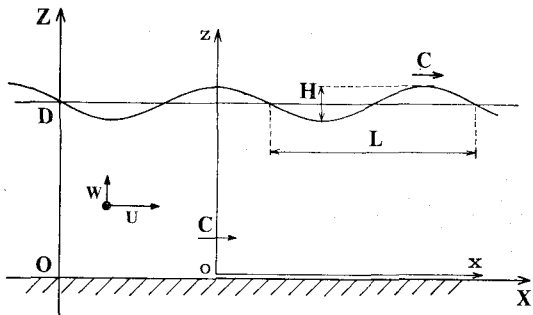


図-1 座 標 系

X 軸および Z 軸方向成分 $U(X, Z, T)$ および $W(X, Z, T)$ は無次元の流れ関数 $\phi(x, z)$ を用いて次のように表わされる。

$$U=C+\sqrt{g\delta}\cdot\phi_z, \quad W=-\sqrt{g\delta}\cdot\phi_x \quad (2)$$

ただし、本論文においては添字の独立変数はその変数に関する偏微分を示すものとする。

水面の Z 座標 $N(X, T)$ および圧力 $P(X, Z, T)$ もまた無次元の水位 $\eta(x)$ ならびに圧力 $p(x, z)$ を用いて

$$N=\delta\cdot\eta, \quad P=\rho g\delta\cdot p \quad (3)$$

と書くことにする。ここに、 ρ は密度、 g は重力加速度である。

一様密度の完全流体を考え、非回転運動の条件をおくと、連続の式および運動方程式と等価な方程式系として

$$\phi_{xx}+\phi_{zz}=0 \quad (4)$$

$$p=-\eta-(u^2+w^2)/2+\text{const.} \quad (5)$$

が得られる。

境界条件としては底面における運動学的な条件と自由表面における運動学的な条件および力学的な条件を与える。

$$\phi(x, 0)=\text{const.} \quad (6)$$

$$\phi(x, \eta)=\text{const.} \quad (7)$$

$$p(x, \eta)=0 \quad \text{すなわち}$$

$$\eta+[\phi_x(x, \eta)]^2/2+[\phi_z(x, \eta)]^2/2=\text{const.} \quad (8)$$

3. 流れ関数の級数表示

波長を L として $\alpha=2\pi\delta/L$ と書くと $\alpha(\eta-1)$ は波形勾配の order である。 ϕ を $\alpha(z-1)$ の冪級数に展開すると、これは式 (4) を満たすために

$$\phi=\sum_{r=0}^{\infty}(-1)^r\left[\frac{\alpha^{2r}(z-1)^{2r}}{(2r)!}\cdot\mu^{(2r)}+\frac{\alpha^{2r+1}(z-1)^{2r+1}}{(2r+1)!}\cdot\nu^{(2r)}\right] \quad (9)$$

の形をとらなければならない。ここに、 μ および ν は αx の関数であり、 $\mu^{(n)}$ および $\nu^{(n)}$ はその n 次導関数を示す。これらはいずれも周期関数であるからフーリエ級数の形に表現する。

$$\mu=\sum_{s=0}^{\infty}\mu_s\cos s\alpha(x-\xi_s), \quad \nu=\sum_{s=0}^{\infty}\nu_s\cos s\alpha(x-\zeta_s) \quad (10)$$

* 正会員 工博 東京大学教授 工学部土木工学科

** 正会員 工博 東京大学助教授 工学部土木工学科

ただし、上式中の係数はすべて定数である。

式(6)の条件より

$$\begin{aligned} \xi_s &= \xi_s, \quad \nu_s = s\mu_s \coth s\alpha, \quad (s=1, 2, \dots) \\ \phi &= \mu_0 + \nu_0 \cdot \alpha(z-1) + \sum_{s=0}^{\infty} \sum_{r=0}^{\infty} \left[\frac{(s\alpha)^{2r}(z-1)^{2r}}{(2r)!} \right. \\ &\quad \left. + \frac{(s\alpha)^{2r+1}(z-1)^{2r+1}}{(2r+1)!} \coth s\alpha \right] \mu_s \cos s\alpha(x-\xi_s) \\ &= \mu_0 + \nu_0 \cdot \alpha(z-1) + \sum_{s=1}^{\infty} \mu_s \frac{\sinh s\alpha z}{\sinh s\alpha} \\ &\quad \times \cos s\alpha(x-\xi_s) \dots\dots\dots (11) \end{aligned}$$

さらに、

$$\begin{aligned} \alpha(\eta-1) &= \varepsilon \cos \alpha(x-x_1) + \sum_{s=2}^{\infty} \varepsilon^s a_s \cos s\alpha(x-x_s) \\ &\dots\dots\dots (12) \end{aligned}$$

と書き、 $\varepsilon \ll 1$, $a_s \sim 1$, $\alpha \sim 1$ なる条件の下に式(7)および(8)からすべての係数を定めるとストークス波が得られる。ここに、波高を H とすれば $\varepsilon \sim H/\delta$ である。

一方、 z はたかだか1の order であるから、 $\alpha \ll 1$ ならば ϕ を αz の冪級数に展開することが考えられる。やはり式(4)を満たすために式(9)と同形の級数でなければならないが、この場合には式(6)の条件を容易にとり入れることができて、

$$\phi = \mu_0 + \sum_{r=0}^{\infty} (-1)^r \frac{\alpha^{2r+1} z^{2r+1}}{(2r+1)!} \cdot \nu^{(2r)} \dots\dots\dots (13)$$

ここに、 μ_0 は定数、 ν は αx の関数で、 $\nu^{(n)}$ はその n 次導関数である。

$$\nu(\alpha x) = \nu_0 + \sum_{s=0}^{\infty} \varepsilon^s \nu_s, \quad \eta(\alpha x) = 1 + \sum_{s=1}^{\infty} \varepsilon^s \eta_s \quad (14)$$

とおき、 $\varepsilon \ll 1$, $\nu_s \sim \nu_0$, $\eta_s \sim 1$ かつ $\varepsilon \sim \alpha^2$ なる前提のもとに式(7)および(8)の摂動解を求めるとクノイド波が得られる。このとき、 $\varepsilon \sim H/\delta$ であるから、 $HL^2/\delta^3 \sim 1$ と仮定したことになる。

4. ストークス波

式(11)および(12)において、 α および ε は与えられた定数とし、他の係数をさらに ε の冪級数に展開する。

$$\begin{aligned} \nu_0 &= -\frac{1}{\sqrt{\alpha^3 \lambda}} \sum_{j=0}^{\infty} \varepsilon^j b_{0j}, \quad \mu_s = \frac{1}{\sqrt{\alpha^3 \lambda}} \sum_{j=s}^{\infty} \varepsilon^j b_{sj} \\ a_s &= \sum_{j=s}^{\infty} \varepsilon^j a_{sj} \dots\dots\dots (15) \end{aligned}$$

ただし、 $\lambda = \coth \alpha$ である。式(11)中の定数 μ_0 はとくに意味をもたないので0としてよい。また、摂動の過程で ξ_s および x_s はすべて同一の値をとらねばならないことがわかる。したがって、実際の計算においてはこれらもすべて0として差し支えない。

b_{sj} および a_{sj} を用いて η , $\phi(x, \eta)$, $\phi_x(x, \eta)$, $\phi_z(x, \eta)$ 等を書き改め、これらを式(7)および(8)に代入する。しかる後両式の ε の各次について未定係数法を適用すると、係数値が次のように定まる。

$$1 \text{ 次, } \cos \alpha x: \quad b_{00}=1, \quad b_{11}=1$$

$$2 \text{ 次, } \cos^2 \alpha x: \quad b_{22}=3\lambda(\lambda^2-1)/4, \quad a_{22}=\lambda(3\lambda^2-1)/4$$

$$\cos \alpha x: \quad b_{01}=0, \quad b_{12}=0$$

$$3 \text{ 次, } \cos^3 \alpha x: \quad b_{33}=(3\lambda^2+1)(\lambda^2-1)(9\lambda^2-13)/64$$

$$a_{33}=3(3\lambda^2-1)(3\lambda^4+1)/64$$

$$\cos^2 \alpha x: \quad b_{23}=0, \quad a_{23}=0$$

$$\cos \alpha x: \quad b_{02}=(9\lambda^4-10\lambda^2+9)/16$$

$$b_{13}=-(3\lambda^4+8\lambda^2-9)/16$$

上記の経過からわかるように、一般に b_{0j} は j 次の残差に寄与しない。なお、3次近似に関する Skjelbreia の論文⁶⁾では b_{13} の項が脱落しており、これが他の文献にそのまま引用されていることがあるので注意を要する。

ストークス波の場合、係数値の表示を見ると $\alpha \ll 1$ なる領域に適用できないことは明らかである。式(12)の設定に際しておかれた前提が満たされているときには、高次項が卓越して副次的な波峰が生じることはないので

$$\begin{aligned} H/\delta &= \eta(0) - \eta(\pi) = 2\varepsilon + 2 \sum_{r=1}^{\infty} \sum_{j=2r+1}^{\infty} \varepsilon^j a_{2r+1,j} \\ &\dots\dots\dots (16) \end{aligned}$$

また、波形 η は式(12)で与えられるので、ここでは δ を平均水深 D にとったことになる。上式の関係を用いて解の中に現われる ε の項を H/D の表示に書き改めることができる。

5. クノイド波

ヤコビの楕円関数を用いてストークス波におけると類似の級数表示を試みる。すなわち、式(13)において

$$\begin{aligned} \mu_0 &= 0, \quad \nu(\alpha x) = - \sum_{j=0}^{\infty} b_{0j} + \sum_{s=1}^{\infty} \sum_{j=s}^{\infty} \varepsilon^s b_{sj} \\ &\times \text{cn}^{2s}(\alpha x, k) \dots\dots\dots (17) \end{aligned}$$

また、

$$\begin{aligned} \eta(\alpha x) &= 1 + \varepsilon \text{cn}^2(\alpha x, k) + \sum_{s=2}^{\infty} \sum_{j=s}^{\infty} \varepsilon^s a_{sj} \\ &\times \text{cn}^{2s}(\alpha x, k) \dots\dots\dots (18) \end{aligned}$$

ただし、第一種の完全楕円積分を $K(k)$ として $\alpha = 2K\delta/L$ である。

ここでは便宜上楕円関数の母数 k および ε を与えられた定数とし、

$$\alpha^2 = \sum_{j=1}^{\infty} \varepsilon^j \beta_j \dots\dots\dots (19)$$

ふたたび式(7)および(8)を b_{sj} , a_{sj} および β_j で表現した後、 ε の各次について未定係数法を用い、係数値を求める。

$$1 \text{ 次, } \text{cn}^2(\alpha x, k): \quad b_{00}=1, \quad b_{11}=1$$

$$2 \text{ 次, } \text{cn}^4(\alpha x, k): \quad \beta_1=3\gamma/4, \quad a_{22}-b_{22}=7/4$$

$$\text{cn}^2(\alpha x, k): \quad b_{01}=(2-\gamma)/2, \quad b_{12}=2-\gamma$$

$$3 \text{ 次, } \text{cn}^6(\alpha x, k): \quad b_{22}=-1, \quad a_{22}=3/4, \quad a_{33}-b_{33}=1/16$$

$$\text{cn}^4(\alpha x, k): \quad \beta_2=-3\gamma(2-\gamma)/4,$$

$$a_{23}-b_{23}=-3(2-\gamma)/16$$

$$\begin{aligned} \text{cn}^2(\alpha x, k): \quad b_{02} &= (9 - 39\gamma + 39\gamma^2)/40, \\ b_{13} &= (28 - 151\gamma + 151\gamma^2)/80 \end{aligned}$$

ここに、 $\gamma = 1/k^2$ である。

一般に n 次の係数の大部分は $(n+1)$ 次の残差を 0 とする条件から決まるので、上記の 3 次までの計算では ε の 2 次の order までの解が確定している。微小振幅長波理論で解の関数形が定まらないのはこの理由によるものである。

さて、式(19)を見るとこの場合 δ が波の谷から測った水深にとられていることがわかる。平均水深 D は、

$$\begin{aligned} \frac{D}{\delta} &= \frac{1}{2K} \int_0^{2K} \eta d(\alpha x) \\ &= 1 + \varepsilon(1 - \gamma + \gamma E/K) + \varepsilon^2[(1 - \gamma)(3 - 2\gamma) \\ &\quad + 2\gamma(2 - \gamma)E/K] \end{aligned}$$

ただし、 $E(k)$ は第 2 種の完全楕円積分である。Laitone の論文⁷⁾ではこれに対応する結果式が誤まっている。

クノイド波の 2 次近似では副次的な波峯を生じることはないので、

$$H/\delta = \eta(0) - \eta(K) = \varepsilon + 3\varepsilon^2/4$$

また、

$$L/\delta = 2K/\alpha = (4kK/\sqrt{3\varepsilon})[1 + (2 - \gamma)\varepsilon/4]$$

以上の関係を用いると δ および ε のかわりに平均水深 D および波高 H を用いた解の表示が得られる。

6. 波 速

前節までの議論から明らかなように、いま取り扱っている方程式系では波速 C が確定しない。波速を決定するためにはさらに何らかの条件を追加する必要がある。ここで可能な考え方を列挙してみよう。

- (1) 波高 H を無限小とした極限ですべての水粒子が静止しているものとすれば、水粒子速度 U の 0 次近似が波速に対応する。これが微小振幅波の波速である。
- (2) 水深 D を無限大とした極限で底面の水粒子が静止しているものとすれば、 U の表示式中の定数項 b_0 が波速に対応する。ただし、この考え方はクノイド波には適用できない。
- (3) ある鉛直断面を通過する一周平均の流量を 0 とする。すなわち、

$$\frac{1}{\tau} \int_0^\tau \int_0^N U dZ dT = 0$$

より波速を決定する。この場合、ある鉛直位置より上の粒子は波の進行方向に前進し、それ以下の領域では逆方向の平均流が生じる。上記 2 項の波速はそれぞれこの波速の 0 および 1 次近似となる。逆に (1) あるいは (2) 項で述べたような波速をとると、2 次の order の平均流が存在することになる。

7. 解の精度

自由表面における力学的および運動学的境界条件はいずれも非線形の表示となっており、ストークス波、クノイド波ともにこれらを完全には満たしていない。すなわち、水面における圧力は

$$\begin{aligned} P_0(X, N) &= -\rho[gN + \{U(X, N)\}^2/2 \\ &\quad + \{W(X, N)\}^2/2] + \text{const.} \end{aligned}$$

となり一定値とはならない。その変動量 ΔP は添字 $\max$ および $\min$ でそれぞれ最大値および最小値を表現することにして

$$\Delta P_0 = [P_0(X, N)]_{\max} - [P_0(X, N)]_{\min}$$

一方、水面の水粒子がもつ波面に垂直な方向の速度成分 V_0 は

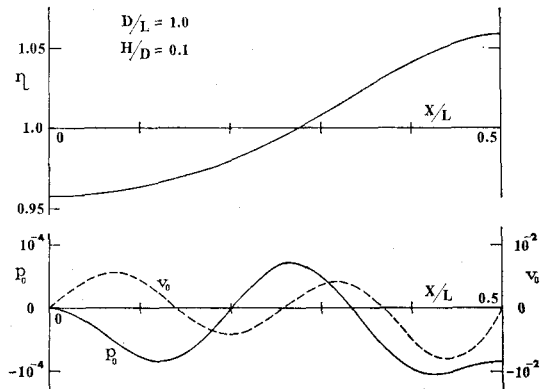
$$V_0 = [W(X, N) - N_T - U(X, N) \cdot N_X] / \sqrt{1 - (N_X)^2}$$

となり、これも X の関数であって常に 0 とはならない。

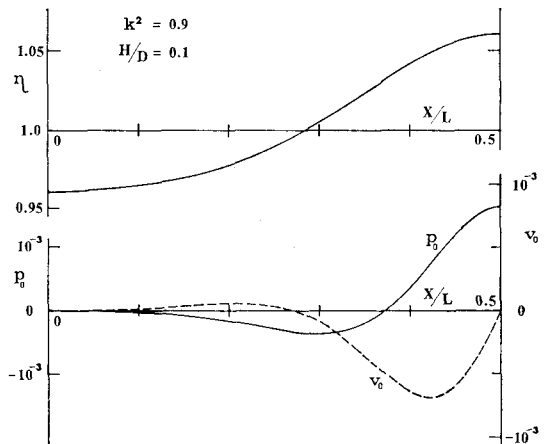
いま、 N として微小振幅波の波形

$$N = D + (H/2) \cos[2\pi(X - C_0 T)/L]$$

を与え、これに対して流速場を 0 次近似 $U = C_0$, $W = 0$ のままとした場合の ΔP_0 の値 $\Delta P'_0$ および V_0 の絶対最



図—2 波形および残差の例 (3 次近似ストークス波)



図—3 波形および残差の例 (2 次近似クノイド波)

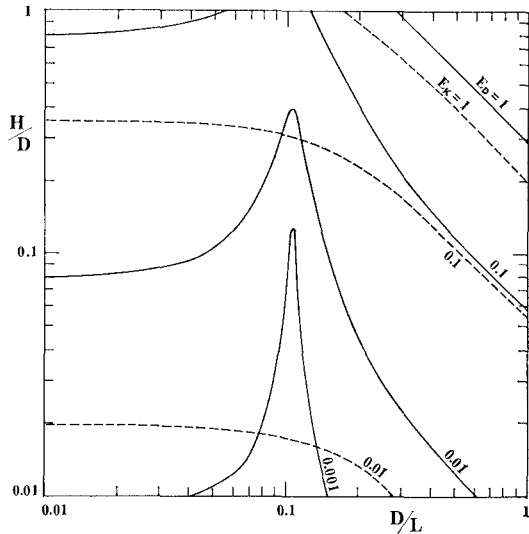


図-4 最大相対残差 (1次近似ストークス波)

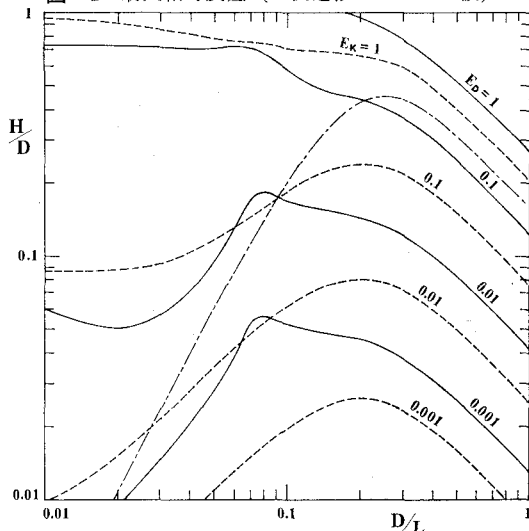


図-5 最大相対残差 (2次近似ストークス波)

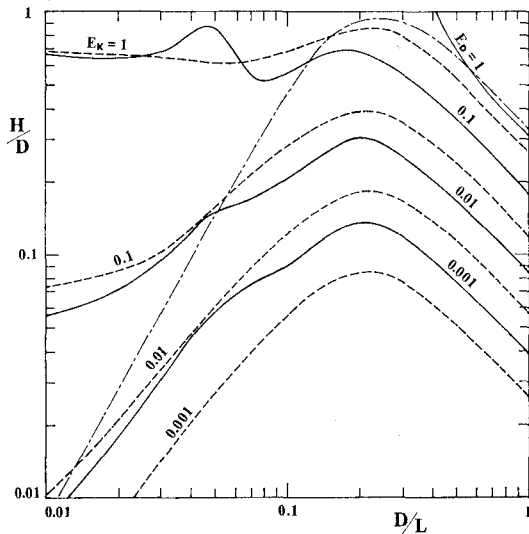


図-6 最大相対残差 (3次近似ストークス波)

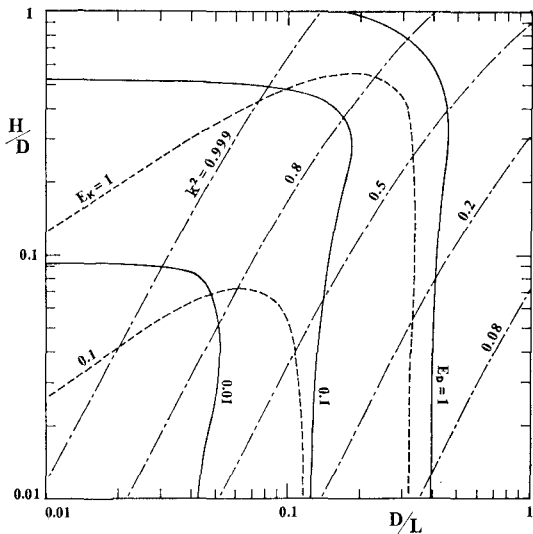


図-7 最大相対残差 (1次近似クノイド波)

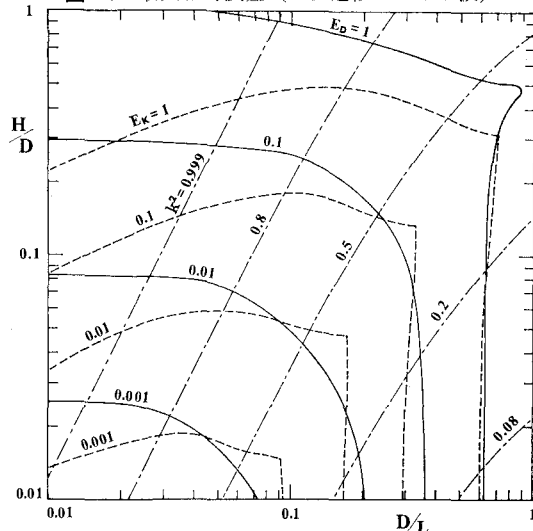


図-8 最大相対残差 (2次近似クノイド波)

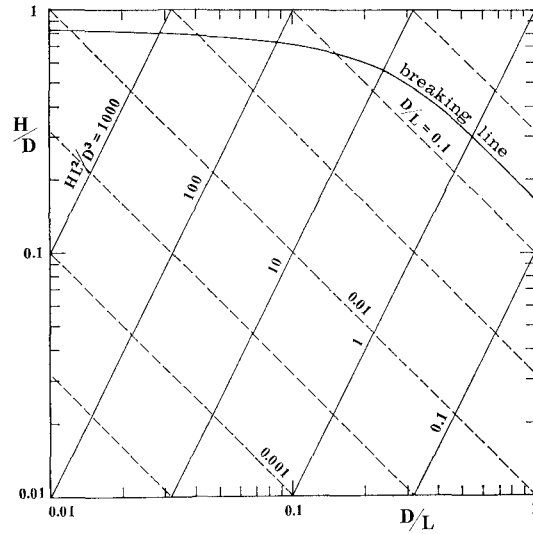


図-9 砕波限界, 波形勾配, Ursell のパラメータ

大値 $|V_0|'_{\max}$ はそれぞれ

$$\Delta P'_0 = \rho g H$$

$$|V_0|'_{\max} = C_0 \cdot (\pi H/L) / \sqrt{1 + (\pi H/L)^2}$$

で与えられる。ここに、

$$C_0 = \sqrt{(gL/2\pi) \tanh 2\pi D/L}$$

各波動理論は少くとも $\Delta P_0 < \Delta P'_0$, $|V_0|_{\max} < |V_0|'_{\max}$ となる領域で適用されるべきである。そこで2つの境界条件に対する相対的な残差をそれぞれ

$$E_D = \Delta P_0 / \Delta P'_0, E_K = |V_0|_{\max} / |V_0|'_{\max}$$

なる2つのパラメーターで表示することにしよう。

上記のパラメーターは解そのものの誤差を表現するものではなく、結果的に算定される境界値の誤差を示すものである。Dean⁹⁾ は同様の考え方で一波長あたりの平均的な残差を調べている。しかしながら、図—2 および 3 に見られるように残差は工学的に重要な意味をもつ波峯付近で大きくなっており、ここでは最大残差に着目することとした。たとえば波長が非常に長く平坦な谷をもった波の場合、波峯付近で大きな残差を生じるとしてもその平均残差に対する寄与は必然的に小さなものになってしまう。また、水粒子の運動方向が波面となす角度をとって運動学的な境界条件に対する誤差の基準とすることは妥当とは言えない。たとえその方向が波面に垂直であっても、水粒子が波面から離れる速度が小さければ問題にならないからである。

2つの波動理論の各次の解について、種々の波動条件下の残差を計算すると 図—4~8 に示したような等残差線を得る。図の横軸は相対水深、縦軸は相対波高となっている。なお、図—9 は参考までに Yamada・Shiotani⁹⁾ の与えた碎波限界、さらには図内各位置における波形勾配および Ursell のパラメーターの値を示したものである。

クノイド波の場合、適用範囲は相対水深および相対波高の最大値で与えるのが妥当と思われる。この解はある波形勾配に対して Ursell のパラメーターが1ないし10程度の値をとるときに最良の近似となっており、これは通常言われるところと合致している。楕円関数の母数 k が1に極めて近くなると相対水深も0に近づき、等残差

線は孤立波のそれに漸近する。

ストークス波の誤差は相対水深の大きい領域では波形勾配のみで決まり、深海波のそれに漸近する。過大な相対波高もしくは過小な相対水深に対しては高次項が大きくなり、2次、3次等の副次的な波峯が生じるようになる。ついには高次の波が卓越して実質的な波長は短かくなってしまふ。もとよりこのような領域では解は発散の傾向にあり、物理的な意味をもたないので、2次あるいは3次の波峯の発生限界を示す 図—5 および 6 中の一点鎖線が各次のストークス波の適用限界を示唆することになる。

それぞれの境界条件に関する許容相対精度が与えられれば、これらの図から各波動理論の理論的な適用範囲が知られる。

謝辞：本研究の遂行に際し、東京大学理学部 永田豊助教授、中央大学理工学部 首藤伸夫教授、東京工業大学工学部 椎貝博美助教授の各位より貴重な御教唆を頂いた。また、計算に際しては東京大学大学院 磯部雅彦君の助力を得た。ここに記して謝意を表するものである。

参 考 文 献

- 1) Skjelbreia, L.: Stokes' third order approximation, Tables of function, Council on Wave Research, The Engineering Foundation, 1958.
- 2) Skjelbreia, L. and J. Hendrickson: Fifth order gravity wave theory, Proc. 7th Conf. Coastal Eng., Vol. 1, 1960.
- 3) Keller, J.B.: The solitary wave and periodic waves in shallow water, Commun. Pure Appl. Math., Vol. 1, 1948.
- 4) Laitone, E.V.: The second approximation to cnoidal and solitary waves, Jour. Fluid Mech., Vol. 9, 1961.
- 5) Chappellear, J.E.: Shallow-water waves, Jour. Geophys. Res., Vol. 67, No. 12, 1962.
- 6) 前出 1)
- 7) 前出 4)
- 8) Dean, R.G.: Relative validities of water wave theories, Proc. ASCE, Speciality Conf. of Civil Eng. in the Ocean, 1968.
- 9) Yamada, H. and T. Shiotani: On the highest water waves of permanent type, Bull. Disaster Prevention Res. Inst. Kyoto Univ., Vol. 18, Part 2, No. 135, 1968.