

輸送方程式モデルによる振動流の研究

林 泰 造*・山 田 正**・矢 島 幸 一***

1. ま え が き

波の変形の原因の一つである海底摩擦による波高の減少は遠浅の海岸では波高が大きい場合には相当に大きい。このことは岩垣および柿沼等により昭和36年～40年の間にわが国海岸各地において行われた波浪観測結果の解析により明らかにされている^{1)~3)}。それらの研究によると、海底摩擦係数 f は層流境界層理論で計算される値より約10倍程度大きい。

本報では上記の現象を念頭において振動流による乱流境界層の研究を行い、振動流中に作用するせん断力分布、渦動粘性係数等の検討を行う。

2. 振動流による乱流境界層についての従来の研究

振動流による乱流境界層の底面摩擦の取り扱い、梶浦^{4),5)}、Johns^{6),7)}、野田^{8),9)}、浜田¹⁰⁾、日野および高須^{11)~14)}が行っており、また振動流による乱流境界層の場合の実験は Kalkanis^{15),16)}、Jonsson^{17),18)}、堀川および渡辺¹⁹⁾、日野・大西²⁰⁾が行っている。

上述の理論的取り扱いの諸研究においては、振動流中の渦動粘性係数の取り扱い(仮定)が相互に異なっており、それが理論上の一つの主要な相違点となっていると思われるので、ここではそのような角度から各理論の渦動粘性係数 ϵ の取り方についてごく簡単な review を以下に試みる。

梶浦の理論⁵⁾では ϵ を次のような折線分布で仮定している。

$$\frac{\epsilon}{\nu} = \begin{cases} 1 & 0 < z \leq D_L \quad (\text{内層}) \\ \kappa \hat{u}_b^2 z / \nu & D_L < z \leq d \quad (\text{中間層}) \\ K U_0 \delta^* / \nu & d < z \quad (\text{外層}) \end{cases} \dots (1)$$

ここに、 δ^* : 排除厚、 U_0 : 境界層外縁流速の振幅、 $\hat{u}_b$: 底面における摩擦速度の振幅、 κ : von Karman の定数、 D_L : 粘性底層厚、 K : 定数、 d : 中間層の上限の高さで、 d は $\kappa \hat{u}_b^2 d = K U_0 \delta^*$ から決める。粗面の場合についても同様な分布を仮定して理論解析を行い、摩擦係数 f 、位

相差等を求める図表を作成した。

Johns の理論⁷⁾では ϵ を次のような2つの2次曲線を逆“く”の字型につなげて外層の ν につないでいる。

$$\frac{\epsilon}{\nu} = \begin{cases} (1 + \alpha S)^2 & 0 \leq S \leq S_1 \quad (\text{内層}) \\ \left[1 + \frac{\alpha S_1 (S_2 - S)}{S_2 - S_1} \right]^2 & S_1 \leq S \leq S_2 \quad (\text{中間層}) \\ 1 & S_2 \leq S \quad (\text{外層}) \end{cases} \dots (2)$$

ただし、 ν : 液体の動粘性係数、 $S = z/\beta h$ 、 h : 水深、 ω : 角振動数、 $\beta = 2\nu/h^2\omega$ 、 α 、 S_1 、 S_2 : 任意のパラメーター、である。

野田の理論⁹⁾においては、Johns のモデルを Kalkanis の実験値¹⁵⁾により多少修正した次のような分布が ϵ の分布として仮定されている。

$$\frac{\epsilon}{\nu} = \begin{cases} \xi^2 & \xi_0 \leq \xi \leq \xi_1 \quad (\text{内層}) \\ \left[1 + \frac{(\xi_1 - 1)(\xi_2 - \xi)}{\xi_2 - \xi_1} \right]^2 & \xi_1 \leq \xi \leq \xi_2 \quad (\text{中間層}) \\ 1 & \xi_2 < \xi \quad (\text{外層}) \end{cases} \dots (3)$$

ここに、 $\xi = 1 + \{\alpha(z_0 + z)/\delta\}$ 、 $\xi_0 = 1 + \{\alpha z_0/\delta\}$ 、 $\xi_1 = 1 + \{\alpha(z_0 + z_1)/\delta\}$ 、 $\xi_2 = 1 + \{\alpha(z_0 + z_2)/\delta\}$ 、 α : 定数、 z_0 : 粗度長さ、 $\delta = \sqrt{\nu T/2\pi}$ 、 T : 波の周期、である。

浜田¹⁰⁾は表面波による乱流境界層の基本式

$$\left. \begin{aligned} & \frac{\partial \langle U \rangle}{\partial t} + \left\langle U \frac{\partial \tilde{U}}{\partial x} \right\rangle + \left\langle \tilde{U} \frac{\partial U}{\partial x} \right\rangle \\ & + \left\langle W \frac{\partial \tilde{U}}{\partial z} \right\rangle + \left\langle \tilde{W} \frac{\partial U}{\partial z} \right\rangle \\ & + \left\langle \frac{\partial u' u'}{\partial x} \right\rangle + \left\langle \frac{\partial u' v'}{\partial y} \right\rangle \\ & + \left\langle \frac{\partial u' w'}{\partial z} \right\rangle - \left\langle \frac{\partial u' u'}{\partial x} \right\rangle \\ & - \left\langle \frac{\partial u' v'}{\partial y} \right\rangle - \left\langle \frac{\partial u' w'}{\partial z} \right\rangle \\ & = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \langle P \rangle}{\partial x} + \nu \nabla^2 \langle U \rangle \end{aligned} \right\}$$

および

$$\left. \begin{aligned} & \frac{\partial \langle W \rangle}{\partial t} + \langle U \rangle \frac{\partial \tilde{W}}{\partial x} + \tilde{U} \left\langle \frac{\partial W}{\partial x} \right\rangle + \dots \\ & (\text{同様ゆえ省略}) \end{aligned} \right\} \dots (4)$$

* 正 会 員 工博 中央大学教授 理工学部土木工学科

** 学生会員 工修 中央大学大学院博士課程

*** 学生会員 中央大学大学院修士課程

を導き $\tau = -\langle u'w' \rangle + \langle \overline{u'w'} \rangle$ に対する表現式を求めた。ただし、 $u = \tilde{U} + U + u'$, $v = v'$, $w = \tilde{W} + W + w'$, $p = \tilde{P} + P + p'$ で、 $\tilde{U}$, $\tilde{W}$, $\tilde{P}$: t に関係しない値、 U , W , P : 波形と同周期の周期的な値、 u' , v' , w' , p' : 不規則な乱れによる値、 $\langle \rangle$ は同位相の標本平均、 $-$: 時間平均である。 τ が求められれば $\varepsilon = \tau / [\partial \langle U \rangle / \partial z]$ として求めるはずであるが、著者は当時の論文の段階では具体的な形としては導いてはいない (τ と $\partial \langle U \rangle / \partial z$ とを同位相とすることが困難であったため)。

また日野および高須¹²⁾⁻¹⁴⁾は U と p についての基本式の他に、乱れエネルギー方程式を用いて振動流の微細構造を計算した。計算の基本式は次のとおりである。

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial U}{\partial t} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial z} \left(\varepsilon \frac{\partial U}{\partial z} \right) \\ \frac{\partial B}{\partial t} &= \varepsilon \left(\frac{\partial U}{\partial z} \right)^2 + \alpha \frac{\partial}{\partial z} \left(\varepsilon \frac{\partial B}{\partial z} \right) - E \\ E &= c' \frac{B^{3/2}}{l}, \quad \varepsilon = clB^{1/2}, \quad l = \kappa z \end{aligned} \right\} \dots\dots(5)$$

ただし、 B : 乱れエネルギー、 E : 乱れエネルギー逸散率、 ε : 渦動粘性係数、 l : 混合距離、 α , c , c' : 比例定数、である。

3. 本研究の基本式と計算方法

(1) 基本式

本研究においては、Nee および Kovaszny²¹⁾ によって提案されている渦動粘性係数 ε についての輸送方程式モデルを筆者らの問題、すなわち振動流、に適用して振動乱流の微細構造について種々調べる。

乱れエネルギー方程式は

$$\frac{\partial B}{\partial t} = \left| \tau \frac{\partial U}{\partial z} \right| + \alpha \frac{\partial}{\partial z} \left(\varepsilon \frac{\partial B}{\partial z} \right) - E \dots\dots(6)$$

で表わされる。これを

$$\frac{\partial U}{\partial t} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial z} \left(\varepsilon \frac{\partial U}{\partial z} \right) \dots\dots(7)$$

とともに使用して、現象を表わすための閉じた方程式系とするためには、式(5)の第3式以下が必要となり、このような系を考えて日野および高須が研究を行なったことは既述のとおりである。

Nee および Kovaszny の輸送方程式によれば、式(6)の代りに次式をとることになる。

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial t} = G + \frac{\partial}{\partial z} \left(\varepsilon \frac{\partial \varepsilon}{\partial z} \right) - D \dots\dots(8)$$

ただし、 G : 渦動粘性係数 ε の生産率、 D : 渦動粘性係数 ε の逸散率、である。 G と D とは Nee および Kovaszny により次のように与えられている。

$$G = A(\varepsilon - \nu) \left| \partial U / \partial z \right| \dots\dots(9)$$

$$D = C\varepsilon(\varepsilon - \nu) / L^2 \dots\dots(10)$$

ただし、 ν : 液体の動粘性係数、 L : 乱れの特性長、 A ,

C : 比例定数、である。粘性底層内では $\varepsilon = \nu$ であり、同層内では渦動粘性係数の生産も逸散もないという条件を、(9), (10) の両式は満たしている。また、Nee および Kovaszny は圧力勾配が 0 の場合の乱流境界層の解析において

$$L = z \dots\dots(11)$$

とおき、2つの比例定数 A , C を実験結果に合うように逆算して

$$A = 0.133 \quad C = 0.8 \dots\dots(12)$$

ときめているが、本報においても式(11)と式(12)の定数の値を使用することにする。このようにしてたてられている(7)~(11)の式系は閉じた方程式系を形成しているが、これを本報における基本式系として使用するものとする。日野および高須により用いられた式系(5)と比較すると式(5)の系においては3個の比例定数が用いられているが、筆者らの系では比例定数は1個少なくて済むという利点がある。

なお、定常流の壁面付近では近似的に

$$G = D \dots\dots(13)$$

が成立っているべきはずであるが、式(9)および(10)を考慮すると、(13)から

$$\varepsilon = \frac{A}{C} L^2 \left| \frac{\partial U}{\partial z} \right| \dots\dots(14)$$

の関係をうる。よって、Prandtl の混合距離を l とすると

$$l = L(A/C)^{1/2} \dots\dots(15)$$

となるが、壁面付近では von Karman の定数 κ を用いて

$$l = \kappa z \dots\dots(16)$$

であるから、式(15)と(16)とが一致するためには

$$A = \kappa^2 C \dots\dots(17)$$

であることが必要である。 $\kappa = 0.41$ とするとき式(12)の定数値は上式の関係を満たしていることがわかる。

(2) 計算方法

間隔 $2D$ の平行板間を時間に関して正弦的に与えられた圧力勾配によって往復する振動水流を考える。座標軸の原点を下側壁面上に取り、長さ方向に x 軸、鉛直方向(壁面の法線方向)に z 軸を取る。計算の基本式は上述のように(7)~(11)で、また使用した定数の値は(12)の通りである。

いま $U(z, t) = W(z, t) - U_0 \cos \omega t$ において、主流の角振動数 ω 、および2平板間の距離の半分 D を使って次の無次元量を導入し、式(7)~(11)を書き換えると式(19)~(21)になる。

$$\left. \begin{aligned} \eta &= D/z, \quad t^* = \omega t, \quad u = W/U_0, \quad \varepsilon^* = \varepsilon/\nu \\ l &= L/D, \quad Re = U_0 D/\nu, \quad \lambda = \sqrt{\omega/\nu} D \end{aligned} \right\} \dots\dots(18)$$

$$\lambda^2 \frac{\partial u}{\partial t^*} = \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\varepsilon^* \frac{\partial u}{\partial \eta} \right) \dots\dots(19)$$

$$\lambda^2 \frac{\partial \varepsilon^*}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\varepsilon^* \frac{\partial \varepsilon^*}{\partial \eta} \right) + A Re(\varepsilon_* - 1) \left| \frac{\partial u}{\partial \eta} \right| - \frac{C}{f_*} \varepsilon_* (\varepsilon_* - 1) \quad \dots\dots\dots (20)$$

また

$$\left. \begin{aligned} l &= \eta & 0 \leq \eta \leq 1 \\ &= 2 - \eta & 1 \leq \eta \leq 2 \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots\dots (21)$$

式(19)~(21)により数値計算を行うために、両式をimplicitに差分化することを考えるが、非線形連立偏微分方程式であるから非線形の方を時間的に1ステップ前の値を用いると結局次のような連立一次方程式を得る。 (η, t^*) を (i, j) と書けば

$$a_1 u_{i+1}^{j+1} + a_2 u_i^{j+1} + a_3 u_{i-1}^{j+1} = b(u_{i-1}^j, u_i^j, u_{i+1}^j) \quad \dots\dots\dots (22)$$

$$c_1 \varepsilon_{i+1}^{j+1} + c_2 \varepsilon_i^{j+1} + c_3 \varepsilon_{i-1}^{j+1} = d(\varepsilon_{i-1}^j, \varepsilon_i^j, \varepsilon_{i+1}^j) \quad \dots\dots\dots (23)$$

上式により定常振動の解を求める。このためにははじめに適当な初期値を与えて式(22),(23)を交互に用いて計算し、過渡解が収束するまで計算を行った。境界条件は

$$U=0, \varepsilon=\nu \quad \text{for } z=0 \text{ および } 2D \quad \dots\dots\dots (23a)$$

なおメッシュ間隔は $\Delta t^* = 2\pi/120$, $\Delta \eta = 2/80$ について行った。

(3) 計算結果

計算結果の一例を図-1, 3, 4, 5に示す。この場合の流れの全体的な Reynolds 数及び振動流の無次元振

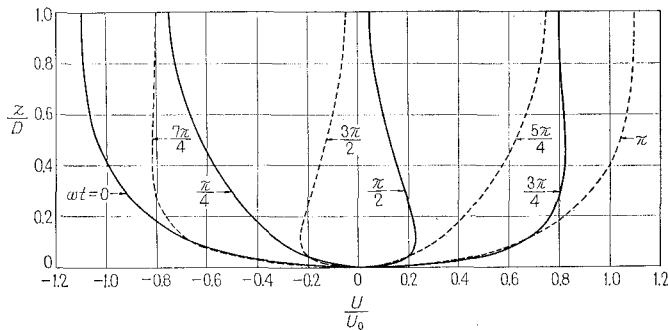


図-1 流速分布 ($Re=358,700$, $\lambda=147$)

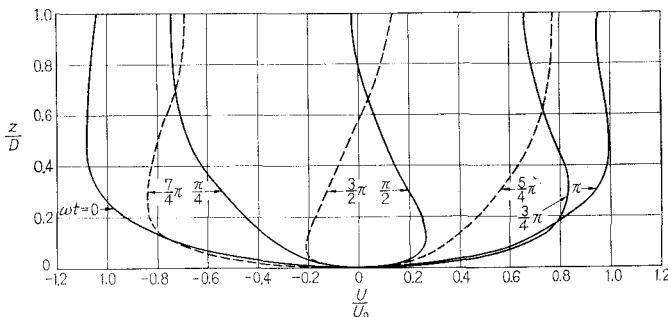


図-2 流速分布の実測値 (Jonsson による)

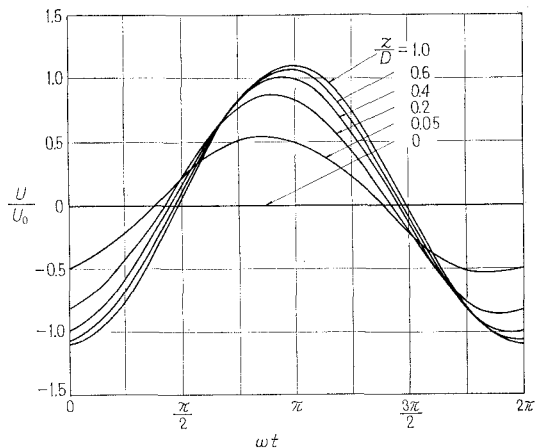


図-3 流速の時間変化 ($Re=358,700$, $\lambda=147$)

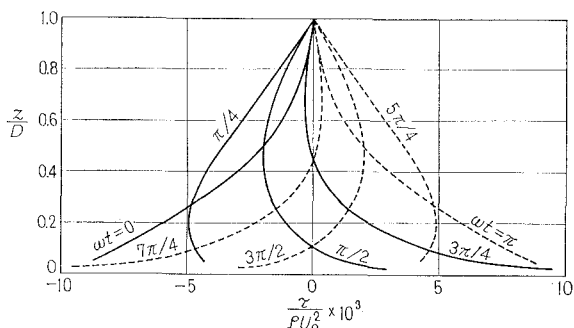


図-4 せん断応力の分布 ($Re=358,700$, $\lambda=147$)

動数 λ は次のようである。

$$\left. \begin{aligned} Re &= U_0 D / \nu = 358,700 \\ \lambda &= \sqrt{\omega / \nu} D = 147 \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots\dots (24)$$

上記の数値は Jonsson の実験条件と同じものである。図-2 には Jonsson の実験結果を示す。筆者らの計算は滑面の場合に相当するものであるが Jonsson の実験は底面に比較的大きな三角形の稜を付した場合の実験であるから比較の目的には無理があるが、定性的な比較のために引用するものである。定性的な傾向は良く一致していると考えられる。両図とも $\omega t=0$ における分布は定常のそれと似ているが $\omega t=\pi/2$, $3\pi/4$ における分布は壁付近で水路中心よりも先走っている振動流独特なものが表われている。図-3 はある場所の流速の時間的変化を示したものである。位相差は壁面に近づくほど大きい。位相差は粘性の作用が主因と考えられるが今回は計算時間に対する配慮から時間メッシュを荒く取ってあるのでこの点に対しての詳しい議論はできないものと思われる。図-4 がせん断応力分布で

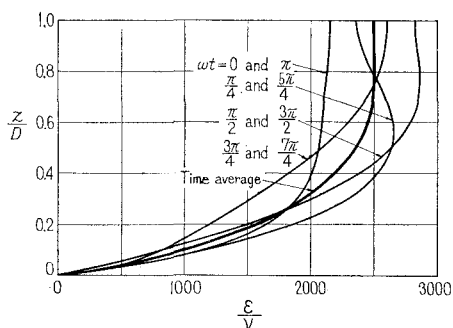


図-5 渦動粘性係数の分布
($Re=358,700$, $\lambda=147$)

ある。これを見ると定常流ではせん断応力は直線的に変化するものであるが振動流においてはそうではなくそして当然のことながら時間的にも変化している。またある位相においては正負両方の符号を持っており、また水路の中心部ではせん断応力はほぼ0となり壁面で急増している。このことと図-1において壁面近くで速度勾配が全位相に渡って大きくなっていることから乱れエネルギーの発生が大きいことがわかるがこれは定常流と同じ傾向である。

図-5は渦動粘性係数の分布を示したものである。 z/D が0.2まではほぼ直線的に変化しているがこれは定常乱流の場合と同様である。また z/D が0.5程度以上ではどの位相時においてもその値は z/D の値に対して変化が少なくなる。なお図中にTime averageとあるのは渦動粘性係数の1周期に渡っての平均である。この計算結果を梶浦および野田の理論と以下に比較してみる。

式(1)から見られるように、梶浦の理論では外層で ϵ が最大値を取るとしており、その値は $\epsilon_{\max}/\nu = \kappa \hat{u}_B^2 d/\nu$ である。式(24)の場合、すなわちJonssonの実験に相当する場合について梶浦の理論における $\hat{u}_B^2$ および d を計算すると

$$\hat{u}_B^2 = 18.22 \text{ cm/sec}, \quad d = 1.23 \text{ cm} \quad \text{よって} \quad \epsilon_{\max}/\nu = 897$$

となる。

野田の理論においては ϵ の最大値は内層の上縁($\xi=\xi_1$)で生じ、その値は $\epsilon_{\max}/\nu = \{1.0 + \alpha(z_0 + z_1)/\delta\}^2$ で与えられる。Jonssonの実験の場合について野田が与えた定数の値は $\alpha=2.4$, $z_0/\delta=3.0$, $z_1/\delta=50$ であるのでこれらを代入すると

$$\epsilon_{\max}/\nu = 16,435$$

となる。

これらの $\epsilon_{\max}/\nu$ の値と図-5の値と比べて見ると、筆者らの値はオーダー的に梶浦の理論値と野田の理論値との中間にある。

本報において行った筆者らの計算は滑面の場合のもの

であるから、粗面の場合の計算は ϵ のより大きい値を生ずると考えられる。粗面の場合にも基礎方程式は変わらず、ただ境界条件が変わってくるだけであるから、本報の基本式によって今後その場合についても検討を進めてゆく積りである。

終りに、本研究は文部省科学研究費(一般研究)によりなされたものであることを付記するとともに、Johnsの文献の存在につきご教示下さった鳥取大学野田英明教授に謝意を表する。

参 考 文 献

- 1) 岩垣雄一・柿沼忠男: 秋田海岸の海底摩擦について, 第9回海講講演集, pp. 81-84, 1962.
- 2) 岩垣雄一・柿沼忠男・宮井 宏: 現地海岸における海底摩擦係数について, 第12回海講講演集, pp. 35-40, 1965.
- 3) 岩垣雄一・柿沼忠男: 現地海岸の海底摩擦係数について, 第13回海講講演集, pp. 21-29, 1966.
- 4) Kajiura, K.: On the bottom friction in an oscillatory current, Bull. Earthq. Res. Inst., Univ. of Tokyo, 42, pp. 147-174, 1964.
- 5) Kajiura, K.: A model of the bottom boundary layer in water waves, Bull. Earthq. Res. Inst., Univ. of Tokyo, 46, pp. 75-123, 1968.
- 6) Johns, B.: On the vertical structure of tidal flow in river estuaries, Geophys. J.R., Astr. Soc., Vol. 12, pp. 103-110, 1966.
- 7) Johns, B.: The damping of gravity waves in shallow water by energy dissipation in a turbulent boundary layer, Tellus, Vol. 20, No. 2, pp. 492-493, 1968.
- 8) 野田英明: 波動による乱流境界層の発達, 第16回海講講演集, pp. 23-27, 1969.
- 9) Noda, H.: On the oscillatory flow in turbulent boundary layers induced by water waves, Bull. Disas. Prev. Res. Inst., Kyoto Univ., pp. 127-144, 1971.
- 10) 浜田徳一: 表面波による乱流境界層について, 第19回海講講演集, pp. 159-163, 1972.
- 11) 日野幹雄・高須修二: TIDAL BASIN における乱れと拡散, 第19回海講講演集, pp. 243-245, 1972.
- 12) 日野幹雄・高須修二: 振動流中の乱れに関する解析的取扱, 第27回年講概要集, pp. 285-286, 1972.
- 13) 日野幹雄・高須修二: 周期変動密度流の乱れと拡散, 第17回水講講演集, pp. 15-20, 1973.
- 14) 日野幹雄・高須修二: 振動乱流に関する研究, 第29回年講概要集, pp. 374-375, 1974.
- 15) Kalkanis, G.: Turbulent flow near an oscillating wall, B.E.B., Tech. Memo. No. 97, pp. 1-36, 1957.
- 16) Kalkanis, G.: Transportation of bed material due to wave action, U.S. Army Corps. of Eng., Tech. Memo. No. 2, pp. 1-38, 1964.
- 17) Jonsson, I.G.: Measurements in the turbulent wave boundary layer, Proc. 10th Congr. IAHR, London, Vol. 1, pp. 85-92, 1963.
- 18) Jonsson, I.G., N.A. Carlsen.: Experimental and theoretical investigations in an oscillatory turbulent boundary layer, IAHR, Jour. Hydraulic Res. Vol. 14, No. 1, pp. 44-60, 1976.

- 19) 堀川清司・渡辺 晃: 表面波による振動流境界層に関する実験的研究, 第15回海講講演集, pp. 16-23, 1968.
- 20) 日野幹雄・大西亮一: 浅水表面波の粗底上の乱流構造, 第18回海講論文集, pp. 83-91, 1971.
- 21) Nee, V.W., L.S.G. Kovasznay: Simple phenomenological theory of turbulent shear flow, The Physics of Fluids, Vol. 12, No. 3, pp. 437-484, 1969.
-