

表面波の底面の抵抗

浜 田 徳 一*

1. ほぼ水平な底面上の周期的な表面波の底面抵抗について考える。水表面でのせん断力は無視する。水深 10 m で周期が数時間(半日周潮程度)の波はいわゆる Kinematic wave¹⁾ となり、進行方向に減衰する波の場合、実の位相速度が得られて、それは波数、水深、動粘性係数に関係し、 $\sqrt{gh}$ を多少補正したものではない。この波の底面抵抗は定常流の場合とほぼ同じとなり、乱流境界層は水表面まで完全に発達して、抵抗係数も同様であろう。水深 10 m で周期が数十分(津浪程度)以下の波では、位相速度は $\sqrt{gh}$ を多少補正したものとなり、乱流境界層は底面の近傍に抑えられる。両者の性質をごく簡単に比較すると、 $\bar{u} = \frac{1}{h} \cdot \int_0^h u dy$ で示される $\bar{u}$ を用いて、運動連続の両式を表現し、運動方程式の右辺で抵抗項を $-\alpha \bar{u} - \beta \frac{\partial \bar{u}}{\partial t}$ で表わすとき、動粘性係数 ν が時間にも、場所にも独立であるとすれば、抵抗の 1 乗則の係数 α , β は

$$\text{Kinematic wave } \alpha = 3\nu/h^2, \beta = 0 \quad \dots\dots(1)$$

$$\text{短かい波 } \alpha = \frac{\frac{\nu}{h} \left(\frac{\sigma}{2\nu} \right)^{1/2}}{1 - \frac{1}{h(\sigma/2\nu)^{1/2}} + \frac{1}{h^2(\sigma/\nu)}} \quad \dots\dots(2)$$

$$\beta = \frac{\alpha}{\sigma} \left(1 - \frac{1}{h(\sigma/2\nu)^{1/2}} \right) \quad \dots\dots(3)$$

式 (1), (2) は $h=10$, $\nu=0.01$, $\sigma=2$ (C.G.S.) を入れると式 (2) の α は式 (1) の約 30 倍となり、また式 (3) から底の境界層の発達にともない、 β/α が小となることがわかる。しかし上式は統一して議論できない。

定常流で Reynolds 数が非常に大きい、あるいは底面が粗で抵抗の 2 乗則ないしはそれに近い場合を考えよう。この時の基本関係は

$$0 = -g \frac{\partial \eta}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} \left(\nu \frac{\partial u}{\partial y} \right), \quad \tau_0 = -\rho g \frac{\partial \eta}{\partial x} h \quad \dots\dots(4.1, 2)$$

であるが

$$\nu = A_0 u \quad \dots\dots(5)$$

を用い、計算すれば容易に、

$$\tau_0 = 1.621 \rho \frac{A_0}{h} \bar{u}^2, \quad \bar{u} = \frac{1}{h} \int_0^h u dy \quad \dots\dots(6)$$

が導かれる。したがって A_0 は通常の底面粗度に対しては $0.001h \sim 0.002h$ の程度であろう。この A_0 は全水深についての混合距離の Kármán 定数に相当する値、 u'/u , また u' と混合距離との相関(全水深としての)が相乗されたものと考えてよい。

次に、

$$\nu = \nu_0 + A_1 u, \quad \nu_0 \ll A_1 u \quad \dots\dots(7)$$

を式 (4.1, 2) に用いる時は、近似計算により

$$\tau_0 \doteq 1.621 \rho \frac{A_1}{h} \left(\bar{u}^2 + 2\bar{u} \frac{\nu_0}{A_1} - 0.2337 \frac{\nu_0^2}{A_1^2} \right) \quad \dots\dots(8)$$

したがってこの場合は 2 乗則からすこしずれて

$$\tau_0 \simeq \kappa \bar{u}^\alpha, \quad \alpha < 2 \quad \dots\dots(9)$$

となる。 ν_0 を分子動粘性係数とすれば、式 (6), (9) の結果は実験により示されている。

2. 周期 10 秒程度の浅海の表面波では底の乱流境界層は底面のごく近傍に抑えられ、その上方では水はある程度乱れていても、表面波としては非回転で近似できる運動が行われている²⁾。この運動は計算に必要なものだけを示せば、

$$u_1 = \frac{a_{00}\sigma}{\sinh kh} \cosh ky \cos(kx - \sigma t) \quad \dots\dots(10.1)$$

$$p = \rho g(h - y) + \rho \frac{a_{00}\sigma^2}{k \sinh kh} \cosh ky \cos(kx - \sigma t) \quad \dots\dots(10.2)$$

$$\sigma^2 = gk \tanh kh, \quad \frac{\partial u_1}{\partial t} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} \quad \dots\dots(10.3)$$

これに対応する底の乱流境界層の式としては、まずもっとも簡単には、底近傍では $y=0$ の u_1 を用い

$$\nu = \gamma |u_1| \quad \dots\dots(11)$$

この表現では ν は y に独立しているが、 x, t の関数となっており、著者は文献 3) 式 (18) でこの表現の可能なことを示している。

$$\frac{\partial u_2}{\partial t} = \nu(t) \frac{\partial^2 u_2}{\partial y^2} \quad \dots\dots(12)$$

式(10)で $x=0$ の場合, 上式を解くと

$$u_2 = B(\sigma) \cos \left(\sigma t + \frac{1}{3} \sin 2\sigma t - \frac{1}{30} \sin 4\sigma t + \dots \right. \\ \left. - \sqrt{\frac{\pi\sigma}{4\gamma u_{10}}} y \right) \exp \left(-\sqrt{\frac{\pi\sigma}{4\gamma u_{10}}} y \right) \dots (13)$$

ただし

$$u_{10} = \frac{a_{00}\sigma}{\sinh kh} \dots (14)$$

式(13)の u_2 は $y=0$ で $u_1 + u_2 = 0$ を厳密には満足できない。しかし $\cos \left(\sigma t + \frac{1}{3} \sin 2\sigma t \right)$ に注目すれば

$$(u_2)_{y=0} \doteq B(\sigma) \left\{ \cos \sigma t \cos \left(\frac{1}{3} \sin 2\sigma t \right) \right. \\ \left. - \sin \sigma t \sin \left(\frac{1}{3} \sin 2\sigma t \right) \right\} \dots (15)$$

において

$$1.000 \geq \cos \left(\frac{1}{3} \sin 2\sigma t \right) \geq 0.945$$

$$0.326 \geq \left| \sin \left(\frac{1}{3} \sin 2\sigma t \right) \right|$$

が成立し, かつ $\sin \left(\frac{1}{3} \sin 2\sigma t \right)$ は $\sin \sigma t$ を打ち消すよ

うに働らくから, $\cos \left(\frac{1}{3} \sin 2\sigma t \right)$ の時間的平均値として

の 0.9723 を用いた

$$(u_2)_{y=0} \doteq 0.9723 B(\sigma) \cos \sigma t \dots (16)$$

の近似を使って

$$u_2 = -1.028 u_{10} \cos \left(\sigma t + \frac{1}{3} \sin 2\sigma t - \sqrt{\frac{\pi\sigma}{4\gamma u_{10}}} y \right) \\ \times \exp \left(-\sqrt{\frac{\pi\sigma}{4\gamma u_{10}}} y \right) \dots (17)$$

$$\sqrt{\frac{\pi\sigma}{4\gamma u_{10}}} = \frac{1}{\delta^*} = \sqrt{\frac{\sigma}{2\nu^*}} \text{ とすれば, } \nu^* = \frac{2\gamma u_{10}}{\pi} \text{ とお}$$

くこともできる。求める $(\tau)_{y=0}$ は

$$(\tau)_{y=0} = \rho \gamma |u_1| (1.028 u_{10}) \sqrt{\frac{\pi\sigma}{2\gamma u_{10}}} \\ \times \cos \left(\sigma t + \frac{1}{3} \sin 2\sigma t + \frac{\pi}{4} \right) \\ = \rho \gamma |u_1| \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi\sigma}{\gamma u_{10}}} \left(u_1 + \frac{1}{\sigma} \frac{\partial u_1}{\partial t} \right) \dots (18)$$

これを用い, 波のエネルギー損失の計算をすると

$$\frac{\partial E^t}{\partial t} = \rho \gamma \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi\sigma}{\gamma u_{10}}} |u_1| u_1^t \dots (19)$$

すなわち, 式(18)の右辺第1項だけが有効である。

ここで式(11)の γ に2つの表現 (さらにその混合型も考えられるが) が考えられる。 γ を境界層厚さの index δ^* と関係づけると $\gamma = K_0 \delta^*$ (K_0 : 定数) において

$$(\tau)_{y=0} = \rho K_0 \left(|u_1| u_1 + \frac{1}{\sigma} |u_1| \frac{\partial u_1}{\partial t} \right) \dots (20)$$

すなわち, 抵抗の2乗式が得られる。しかし乱れの拡散の性質から, $\gamma = K_0 \delta^*$ の表現は考えにくい。式(6)の A_0 と同様に水深に関係づけ, γ を $0.001h$, $0.002h$ においてみる。

式(18)から抵抗係数は $\frac{1}{2} \gamma \sqrt{\frac{\pi\sigma}{\gamma u_{10}}}$ であるから, u_{10}

について言えば, これは 3/2 乗則となる。

岩垣・柿沼の文献 4) 表 1, 文献 5) 表 1 の観測波の諸元を用い, 上記の抵抗係数と $u_{10}^2 T/\nu$ ($\nu=0.01$ とする) との数値計算を行った結果を図-1 に示してある。また同図には文献 5) 図 14 の測定値をすべて同一記号として記入してある。この場合の $\gamma |u_1|$ は表現としては式(5)の $A_0 u$ よりも多少大きく評価されていることとなるから, γ は $0.001h$ を下まわることが考えられる。また著者の私見で, 実情と一致しないかも知れないが, 波高, 周期からすれば, 観測による実測値のうち $u_{10}^2 T/\nu$ が大きい値の方が精度が高いのではないかと思う。そして解

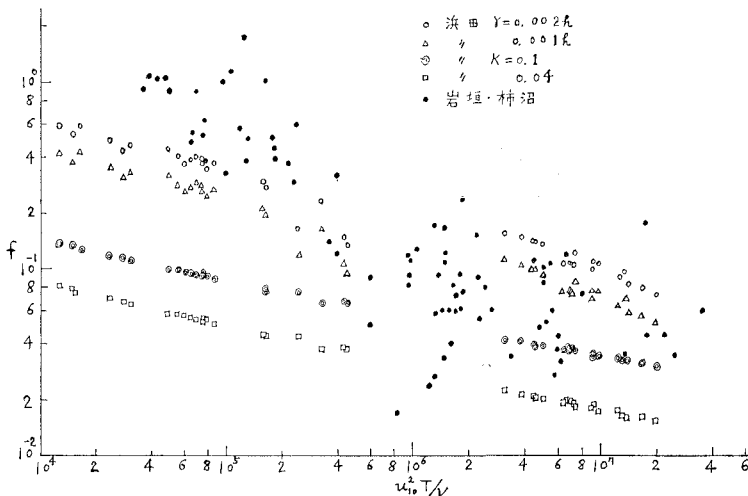


図-1 抵抗係数

析的な面からは式(12)の ν が y の関数でないため、 u_1 と $(\tau)_{y=0}$ との位相差がつねに $\pi/4$ となり、微小構造に問題を残すので後述する改良を行う。

次に定常流の式(7)～(9)に相当する場合を考える。式(11)に対し

$$\nu(t) = \nu_{00} + \gamma |u_1| \dots\dots\dots (21)$$

とおく。 ν_{00} は分子動粘性係数、あるいは時間と x, y に定常な渦動粘性係数とする。この場合の境界層方程式を解き、式(11)の場合と同様に底の境界条件 $u_1 + u_2 = 0$ を近似的に満足する解を求めると

$$u_2 = -\sqrt{1.028} u_{10} \cos \left\{ \sigma t + \frac{2}{3} \frac{\gamma u_{10}}{\pi \nu_{00} + 4\gamma u_{10}} \sin 2\sigma t \right. \\ \left. - \dots - \sqrt{\frac{\pi \sigma}{2\pi \nu_{00} + 4\gamma u_{10}}} y \right\} \\ \times \exp \left(-\sqrt{\frac{\pi \sigma}{2\pi \nu_{00} + 4\gamma u_{10}}} y \right) \dots\dots\dots (22)$$

ただし $1.028 > \sqrt{1.028} > 1$

$$(\tau)_{y=0} = \rho(\nu_{00} + \gamma |u_1|) \sqrt{\frac{\pi \sigma}{2\pi \nu_{00} + 4\gamma u_{10}}} \\ \times \left(u_1 + \frac{1}{\sigma} \frac{\partial u_1}{\partial t} \right) \dots\dots\dots (23)$$

この場合の抵抗係数は $\gamma \left(1 + \frac{\nu_{00}}{\gamma |u_1|} \right) \sqrt{\frac{\pi \sigma}{2\pi \nu_{00} + 4\gamma u_{10}}}$ であり、 $\nu_{00} \gg \gamma u_{10}$ のときは抵抗の1乗則、それから $2\pi \nu_{00} + 4\gamma u_{10} = 2\pi(\gamma |u_1|^2 + \nu_{00})$ を考慮すれば、漸次 3/2 乗則に近づき、 $\nu_{00} \ll \gamma u_{10}$ では 3/2 乗則となる。したがって定常的な渦動粘性(あるいは分子粘性)を考慮すれば、抵抗係数の $u_{10}^2 T/\nu$ に対する変化は 図—1 の式(18)による計算値よりも急勾配となり得る。

式(11)のかわりに、底の乱流境界層の性質により忠実な

$$\nu = K(y + y_0) |u_1| \dots\dots\dots (24)$$

を用い、 u_2 についての方程式を解くと、複素表示を用いて、

$$u_2 = -\frac{1.028 u_{10}}{H_0^{(1)}(2e^{i(3\pi/4)} \sqrt{\alpha'} y_0^{1/2})} \\ \times H_0^{(1)}(2e^{i(3\pi/4)} \sqrt{\alpha'} (y + y_0)^{1/2}) \\ \times \exp i \left(\sigma t + \frac{1}{3} \sin 2\sigma t - \dots \right) \dots\dots\dots (25)$$

$$(\tau)_{y=0} = -1.028 \rho K y_0 |u_1| \sqrt{\alpha'} y_0^{-1/2} \\ \times \frac{H_1^{(1)}(2e^{i(3\pi/4)} \sqrt{\alpha'} y_0^{1/2})}{H_0^{(1)}(2e^{i(3\pi/4)} \sqrt{\alpha'} y_0^{1/2})} u_{10} \\ \times \exp i \left(\sigma t + \frac{1}{3} \sin 2\sigma t - \dots - \frac{\pi}{4} \right) \dots\dots\dots (26)$$

$$\alpha' = \frac{1}{2} \frac{\pi \sigma}{K u_{10}}, \quad \sqrt{\alpha'} y_0^{1/2} = \sqrt{\frac{1}{2} \frac{\pi \sigma}{K u_{10} y_0}} y_0 = \frac{y_0}{\delta_{**}}$$

δ_{**} は式(17)の場合と同様に、境界層厚の代表的表示として用いている。

$$\left. \begin{aligned} \text{her}_0(z) + i \text{hei}_0(z) &= H_0^{(1)}(ze^{i(3\pi/4)}) \\ \text{her}_1(z) + i \text{hei}_1(z) &= (\text{her}'(z) + i \text{hei}'(z)) e^{i(\pi/4)} \\ &= H_1^{(1)}(ze^{i(3\pi/4)}) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (27)$$

を用い、 $\text{her}(2\sqrt{\alpha'} y_0^{1/2}) = \text{her}$ その他同様において

$$(\tau)_{y=0} = -\rho K y_0 |u_1| \frac{1}{\delta_{**}} \frac{\text{her her}' + \text{hei hei}'}{\text{her}^2 + \text{hei}^2} u_1 \\ - \rho \frac{|u_1|}{u_{10}} \frac{\pi}{2} \frac{\delta_{**}}{\delta_{**}} \frac{\text{her hei}' - \text{hei her}'}{\text{her}^2 + \text{hei}^2} \frac{\partial u_1}{\partial t} \dots\dots\dots (28)$$

式(28)の K は Kármán 定数 0.4 に、底近傍の乱れ速度の強さを文献 6) Fig. 4, 文献 7) 図 4, 図 6 から 0.5 の程度とし(u_1 の時間的変化を考えすこし大きくみている)、また混合距離に対するその相関を文献 8) Fig. 34 から 0.5 と仮定して、これら 3 つの積として 0.1 とおいた。またさらに K の小さい場合として 0.04 の場合を加えた。 y_0 の値としては文献 9) 107 頁には往復管流の模型実験の例として、 $y_0 = 0.077 \text{ cm}$, 0.21 cm が示されているが、岩垣・柿沼の表面波の現地観測では数百メートルまでの巨視的变化を含むことを考慮して $y_0 = 0.5 \text{ cm}$ を用いた。波としての水粒子の往復距離は底付近で 1~2 m にすぎないが、現在の比較では y_0 はさらに大きくとるべきかも知れない。式(18)の場合と同様に、岩垣・柿沼の観測波の諸元を用いて数値計算せられた抵抗係数

$$-K y_0 \frac{1}{\delta_{**}} \frac{\text{her her}' + \text{hei hei}'}{\text{her}^2 + \text{hei}^2}$$

が 図—1 に記入せられている。

数値計算の結果は $u_{10}^2 T/\nu$ に対して、式(28)が式(18)よりもさらに緩勾配となること、すなわち抵抗の 3/2 乗則から 2 乗則に向ってやや移行することを示している。普通に考えれば式(18)の $\gamma = 0.001 h$ から式(28)の $K = 0.1$ にかけての付近がもっとも可能な領域であろう。式(28)の場合は y 方向に ν が増加するため、底の u_1 と $(\tau)_{y=0}$ の位相差は $u_{10}^2 T/\nu$ が小さいところで $34^\circ \sim 41^\circ$, $u_{10}^2 T/\nu$ が大きいところで $24^\circ \sim 32^\circ$ となっている。また K を大きくすれば位相差は減る。

周波数スペクトルを組む浅海波の変形には高次干渉や、平衡領域の f^{-5} 則が極限では f^{-2} まで変化しうることや、波形の安定のため soliton への分裂が生じようとする等、底面の抵抗以外の要素が作用するから、実測値と理論値とがよい一致を得ることはむずかしいであろうが、概観的にはここで計算した程度の抵抗係数は考慮すべきであろう。また分子粘性のような定常な粘性が有効に加えられる場合は、3/2 乗則よりも急勾配となって 1 乗則に近づく場合が考えられ、式(18), (28) が周期 10 分程度の波まで拡張が可能なときは、津浪の場合にも抵抗係数は定常流の場合より大きく見積る必要があることを示す。

付記：往復管流（矩形管）の実験として、文献 10）を見出した。その Fig. 11 に 2 種類の底面粗度に対する抵抗係数（図-1 の f の 2 倍）の実験値が記録せられているが、上面は滑面のため、管高 30 cm に対して h に相当する値を 15~20 cm として、Test No. 1 に対し $\gamma = 0.003h$ ($h=15$ cm), $0.00225h$ ($h=20$ cm), Test No. 2 に対し $\gamma = 0.005h$ ($h=15$ cm), $0.00375h$ ($h=20$ cm) を用い、式(18)の抵抗係数を数値計算すれば Fig. 11 の記録に対応した値が得られる。ただし u_{10} に相当するものとして、Table 1 の U_{1m} を用い、すこし差がある*。 h に対し粗度が現地観測の場合よりはるかに大きいため、抵抗係数の値は小であるにかかわらず、 γ の h にかかる係数は大きくなっている。

最後に観測値、実験値を利用させて頂いた各位に深謝する。

記号表

x :	波の進行方向にとられた水平軸
y :	水底を原点とする上向きの垂直軸
u :	流速
$\bar{u}$:	垂直方向の平均流速
$\bar{A}^t$:	A の時間的平均値
h :	水深
k :	波数 $2\pi/L$
σ :	周波数 $2\pi/T$
a_{00} :	水面での半波高
u_1 :	波の水平流速の非粘性成分

u_2 : 波の水平流速の粘性成分

ν : 渦動粘性係数, あるいは分子動粘性係数

f : $(\tau)_{y=0}/\rho|u_1|u_1$, u_1 は $(u_1)_{y=0}$ を意味する。

また文中では $f=1/T$ にも用いている。

参考文献

- 1) Lighthill, M.J. and G.B. Whitham: On kinematic waves, Proc. Roy. Soc. A. Vol. 229, 1955.
- 2) 浜田徳一: 2次元渦動層における表面波, 第9回海岸工学講演会講演集, pp. 55~60, 1962.
- 3) 浜田徳一: 表面波による乱流境界層について, 第19回海岸工学講演会論文集, pp. 159~163, 1972.
- 4) 岩垣雄一・柿沼忠男・宮井 宏: 現地海岸における海底摩擦係数について, 第12回海岸工学講演会講演集, pp. 35~40, 1965.
- 5) 岩垣雄一・柿沼忠男: 現地海岸の海底摩擦係数について(2), 第13回海岸工学講演会講演集, pp. 21~29, 1966.
- 6) Blinco, P.H. and E. Partheniades: Turbulence characteristics in free surface flows over smooth and rough boundaries, Journal of Hydraulic Research, Vol. 9, No. 1, pp. 43~71, 1971.
- 7) 堀川清司・渡辺 晃: 波運動に伴う乱れと底質の浮遊, 第17回海岸工学講演会論文集, pp. 229~233, 1970.
- 8) Willmarth, W.W.: Structure of turbulence in boundary layers, Advances in applied mechanics, Academic Press, Vol. 15, pp. 159~247, 1975.
- 9) Kajiura, K.: A model of the bottom boundary layer in water waves, Bulletin of the Earthquake Research Institute, Vol. 46, pp. 75~123, 1968.
- 10) Jonsson, I.G. and N.A. Carlsen: Experimental and theoretical investigations in an oscillatory turbulent boundary layer, Journal of Hydraulic Research, Vol. 14, No. 1, pp. 45~60, 1976.

* 表面波の場合は上面や側壁は考慮されていない。