

風波の波数周波数スペクトルに関する実験的研究

石 田 昭*・金 泰 順**

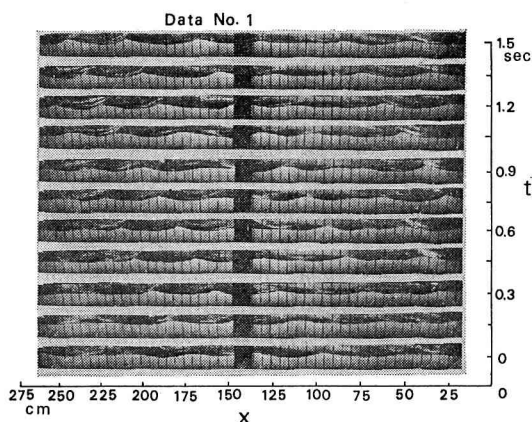
1. 緒 言

近年になって、波動の非線型効果を明らかにしようとする研究が数多くなされるようになってきている。著者らは波動の非線型効果を表示する方法の一つが波数周波数スペクトルであると考えているが、石田ら^{1),2)}は、すでに浅水領域における非定形波現象を波数周波数スペクトルを使用して明らかにしてきた。そこでも述べたように、一つの成分波だけが存在する場合でも非線型干渉によっていくつかの拘束波あるいは自由波の発生がみられることを考えれば、風波のようなランダム波ではパワースペクトルだけの取り扱いが不完全であり、波数周波数スペクトルによる表示が望ましいことは言うまでもない。しかるに三次元構造（方向分散性）を持っていると考えられる現地波浪の波数周波数スペクトルを求めることは非常に困難であり、現在まで観測された例はないようである。本研究は水路幅 60 cm の風洞水槽内での実験による風波が一方向にだけ進行する二次元構造のスペクトルを持つと仮定してもよいという前提の下で、連続写真観測によって波数周波数スペクトルを解析し、その特性を明らかにしようとしたものである。

2. 実験方法

実験に用いた水槽は幅 60 cm、高さ 120 cm、有効フェッチ約 20 m の両面ガラス張りのものである。汀線から 6 m の範囲の水底を 20 cm 高くして浅水領域（水深 8.7 cm）を作り、約 1 m の長さの斜面で沖側（水深 28.7 cm）の水底と接続させた。これは沖側 13 m の深水領域で成長した波を浅水領域に進入させて、非線型性の強いデータを得るためである。また汀線付近には消波させるために碎石を約 1/10 勾配で設置した。写真観測を行う撮影区間内に 4 台の抵抗線式波高計を設置し、沖側より W-1, W-2, W-3, W-4 とした。それぞれの間隔は 15.05 cm, 15.55 cm, 14.40 cm である。送風開始後約 5 分経過して定常状態となつてからの時間記録をデータレコーダ R-410 (TEAC 社製) に収録すると同時に、水槽側面からカメラ (アサヒペンタックス SP, レンズ:

28 mm, F3.5, 絞り開放, フィルム: コダック TRI-X) による連続スリット撮影を行った。そのために、水槽の片側にストロボスコープ (菅原製作所製 PS-240) を設置し、真暗にした実験室内で 400 r.p.m. (閃光間隔 0.15 sec, 閃光時間 $22 \mu\text{sec}$) で閃光させる。一方カメラにはレンズとネガフィルムの間に約 3 mm 幅のスリットを開けたセルロイド板を固定し、波動以外の水槽部分が写らないようにする。あらかじめフィルムを全部進めておき、絞りを開放にして手動によって順次巻き取っていけば、ストロボの閃光時ごとに 3 mm 幅の画面が撮影される。ただし画面が重複しないように、適当な速度で巻き取る必要がある。このようにして得られた画面の一部が写真—1 である。写真にみられるたくさんの縦線は水槽のガラス面上に引いた読取り線で、その間隔は 5 cm である。写真中央はガラスの継目部分であるが、この部分の波形は隠れてしまうので両側の値から内挿した。波形の読取りを行うために一旦スライド用フィルムに反転し、プロジェクターで拡大して読取った。



写真—1 連続写真観測による時間空間波形の一例

3. 波数周波数スペクトルの解析方法

この解析方法は、三次元構造を持った現地波の波数スペクトルを求めた SWOP³⁾ の計算方法と類似している。時間空間波形 $\eta(t, x)$ を $\Delta t = 0.15 \text{ sec}$, $\Delta x = 5 \text{ cm}$ 間隔でサンプリングし、それぞれ $N_t = 59$ 個, $N_x = 57$ 個の読取りを行って、二次元の自己相関関数 $\rho(p, q)$ を式 (1)

* 正会員 工博 名古屋工業大学助教授 工学部土木工学科

** 正会員 工修 センtralコンサルタント

と式 (2) によって求める。

$$\rho(p, q) = \frac{1}{(N_t - p)(N_x - q)} \sum_{i=1}^{N_t - p} \sum_{j=1}^{N_x - q} \times \eta(i\Delta t, j\Delta x) \cdot \eta(i\Delta t + p\Delta t, j\Delta x + q\Delta x) \quad (1)$$

$$p = 0, 1, 2, \dots, m_t$$

$$q = 0, 1, 2, \dots, m_x$$

$$\rho(p, q) = \frac{1}{(N_t + p)(N_x - q)} \sum_{i=1}^{N_t + p} \sum_{j=1}^{N_x - q} \times \eta(i\Delta t - p\Delta t, j\Delta x) \cdot \eta(i\Delta t, j\Delta x + q\Delta x) \quad (2)$$

$$p = -m_t, -m_t + 1, \dots, -1$$

$$q = 0, 1, 2, \dots, m_x$$

上式によれば、 $\rho(p, q)$ は二次元相関平面の二つの象限で求められるわけであるが、定常ランダムプロセスであると仮定すれば、

$$\rho(p, q) = \rho(-p, -q) \quad (3)$$

となるので、4つの象限で求められたと考えてもよい。

$\rho(p, q)$ を波数と周波数について余弦変換すれば波数周波数スペクトルが得られる。いわゆる片側スペクトルを求めること、および相関平面の境界での計算を考慮して、次のような置き換えを行う。

$$\rho^*(p, q) = 2\rho(p, q) \quad (4)$$

$$p = -m_t + 1, -m_t + 2, \dots, m_t - 1$$

$$q = 1, 2, \dots, m_x - 1$$

$$\left. \begin{aligned} \rho^*(-m_t, q) &= \rho(-m_t, q) \\ \rho^*(m_t, q) &= \rho(m_t, q) \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

$$q = 1, 2, \dots, m_x - 1$$

$$\left. \begin{aligned} \rho^*(p, 0) &= \rho(p, 0) \\ \rho^*(p, m_x) &= \rho(p, m_x) \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

$$p = -m_t + 1, -m_t + 2, \dots, m_t - 1$$

$$\rho^*(-m_t, 0) = \frac{1}{2} \rho^*(-m_t, 0) \quad (7)$$

$$\rho^*(-m_t, m_x) = \frac{1}{2} \rho^*(-m_t, m_x) \quad (8)$$

$$\rho^*(m_t, 0) = \frac{1}{2} \rho^*(m_t, 0) \quad (9)$$

$$\rho^*(m_t, m_x) = \frac{1}{2} \rho^*(m_t, m_x) \quad (10)$$

滑らかにする前の“生の波数周波数スペクトル”が次式によって得られる。

$$L(r, s) = \frac{1}{2m_t m_x} \sum_{p=-m_t}^{m_t} \sum_{q=0}^{m_x} \times \rho^*(p, q) \cos \left[\frac{\pi}{m_t} r p - \frac{\pi}{m_x} s q \right] \quad (11)$$

$$r = -m_t, -m_t + 1, \dots, m_t$$

$$s = 0, 1, 2, \dots, m_x$$

ここでパワースペクトル計算で使用される Hamming フィルターを拡張した二次元のフィルターによってスペク

トルを滑らかにする。そのためにスペクトル平面 $L(r, s)$ の周囲の値を決める。

$$L(r, s) = L(-r, -s) \quad (12)$$

であるから、

$$L(r, -1) = L(-r, 1) \quad (13)$$

$$r = -m_t, -m_t + 1, \dots, m_t$$

とし、さらに次のような仮定を設ける。

$$\left. \begin{aligned} L(-m_t - 1, s) &= L(-m_t + 1, s) \\ L(m_t + 1, s) &= L(m_t - 1, s) \end{aligned} \right\} \quad (14)$$

$$s = 0, 1, 2, \dots, m_x$$

$$L(r, m_x + 1) = L(r, m_x - 1) \quad (15)$$

$$r = -m_t, -m_t + 1, \dots, m_t$$

$$L(-m_t - 1, -1) = L(-m_t + 1, 1) \quad (16)$$

$$L(m_t + 1, -1) = L(m_t - 1, 1) \quad (17)$$

$$\left. \begin{aligned} L(-m_t - 1, m_x + 1) &= L(-m_t + 1, m_x - 1) \\ &\dots \dots \dots \end{aligned} \right\} \quad (18)$$

$$L(m_t + 1, m_x + 1) = L(m_t - 1, m_x - 1) \quad (19)$$

したがって $L(r, s)$ は r が $(-m_t - 1)$ から $(m_t + 1)$ まで、 s が -1 から $m_x + 1$ までの範囲で得られる。この $L(r, s)$ の値に次のようなフィルターを乗じて平均化し、波数周波数スペクトル密度を式 (20) によって求める。

$r \backslash s$	$r-1$	r	$r+1$	計
$s-1$	0.053	0.124	0.053	0.230
s	0.124	0.292	0.124	0.540
$s+1$	0.053	0.124	0.053	0.230
計	0.230	0.540	0.230	1.000

$$E(r, s) = (2m_t \Delta t)(2m_x \Delta x) [0.053 \{L(r+1, s+1) + L(r+1, s-1) + L(r-1, s+1) + L(r-1, s-1)\} + 0.124 \{L(r, s+1) + L(r, s-1) + L(r+1, s) + L(r-1, s)\} + 0.292 L(r, s)] \quad (20)$$

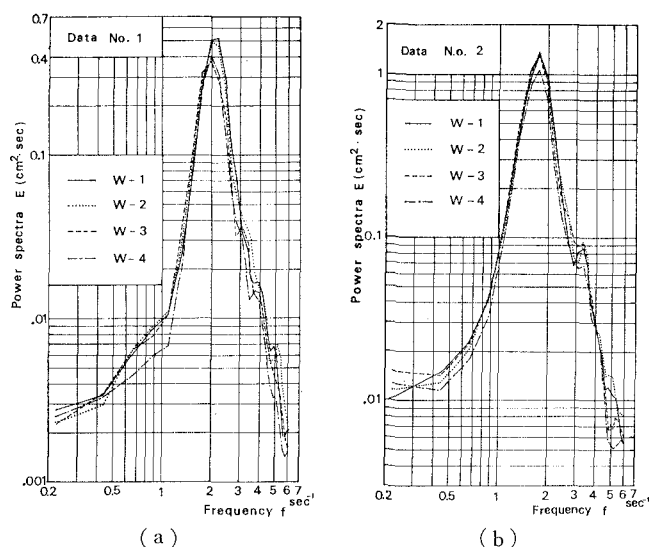
$$r = -m_t, -m_t + 1, \dots, m_t$$

$$s = 0, 1, 2, \dots, m_x$$

ここで、 r と s はそれぞれ周波数 f と波数 k に対応しており、 $f = r/(2m_t \Delta t)$ 、 $k = 2\pi s/(2m_x \Delta x)$ である。解析の自由度は次式によって計算する。

$$n = 1.58 \left[\frac{N_x}{m_x} - \frac{1}{2} \right] \left[\frac{N_t}{m_t} - \frac{1}{2} \right] \quad (21)$$

SWOP の観測例では $N_x = 60$ 、 $N_y = 90$ 、 $m_x = m_y = 20$ 、自由度 15.8 で計画されていたが、実際には $N_x = 50$ 、 $N_y = 70$ 、 $m_x = m_y = 20$ 、自由度 9.48 で解析されている。著者らの計算では $N_x = 57$ 、 $N_t = 59$ 、 $m_x = 20$ 、 $m_t = 15$ であり、自由度は 12.75 である。なお、分解能は $\Delta f = 0.222$ cps、 $\Delta k/2\pi = 0.005$ cpc (cycle/cm) で示される。



図—1 波高計より求めたパワースペクトル

4. 解析結果

(1) 周波数スペクトル

図—1 (a), (b) および 図—2 (a), (b) は写真観測の範囲内に設置した4台の波高計から得られたパワースペクトルおよびクロススペクトル解析の結果を示したものである。解析方法は Blackman-Tukey の方法であり、読取り間隔 $\Delta t = 0.05$ sec, 読取り個数 1000 個, 最大ラグ数

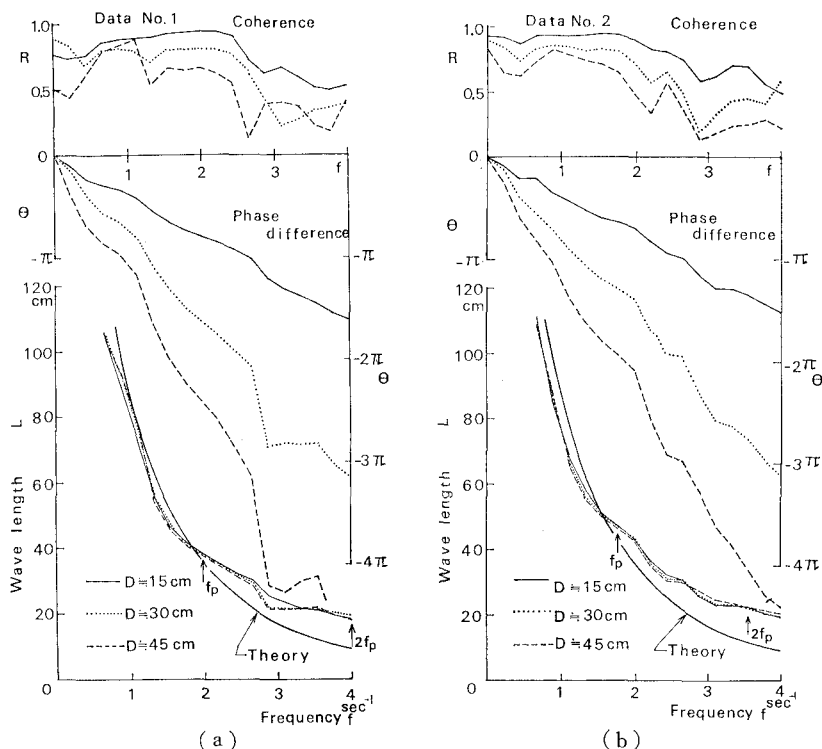
45, したがって自由度約 44, 分解能 $\Delta f = 0.222$ cps である。図—1 のパワースペクトルをみると, Data No. 1 (風速 9.3 m/sec) では沖側の2点 (W-1, W-2) のエネルギーが岸側の2点 (W-3, W-4) のエネルギーよりピーク付近で若干大きくなっており, 減衰のあることを示唆しているが, スペクトル構造はそれほど顕著な変化がないので, homogeneous な水面と考えてよいだろう。Data No. 2 (風速 14.9 m/sec) についても岸側の W-4 だけが若干小さくなっている。またスペクトルの高周波側は f^{-4} 則から f^{-6} 則の間であるが, 二次的なエネルギーピークがいくつか存在し, 特に波高の大きい Data No. 2 では基本波の2倍周波数のピークが顕著に現われている。図—2 (a), (b) は, ほぼ等間隔に設置した4台の波高計から得られる6通りの

のクロススペクトル解析の結果を示したもので, Coherence $R(f)$, 位相差 $\theta(f)$ および波長 $L(f)$ を示してある。それぞれ次式によって計算したものである。

$$R(f) = \sqrt{\frac{C_{xy}(f)^2 + Q_{xy}(f)^2}{C_{xx}(f) \cdot C_{yy}(f)}} \quad (22)$$

$$\theta(f) = \tan^{-1} \frac{Q_{xy}(f)}{C_{xy}(f)} \quad (23)$$

$$L(f) = \frac{2\pi D}{\theta(f) + 2\pi n} \quad (24)$$



図—2 周波数クロススペクトル解析による結果

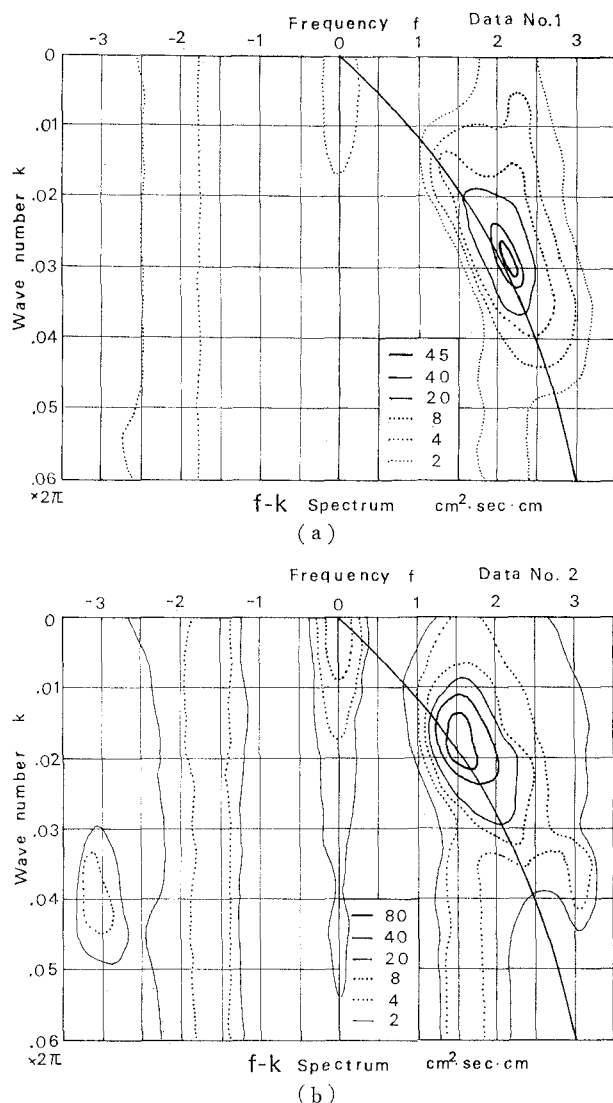
ここで, C_{xx} , C_{yy} は x 点と y 点でのパワースペクトル, C_{xy} , Q_{xy} は Co スペクトルと Quadrature スペクトルである。 D は波高計間隔であり, $L(f)$ より短い場合には n の値は 0 である。図中の実線は間隔が約 15 cm の場で, W-1 と W-2, W-2 と W-3, W-3 と W-4 の 3 ケースを平均したものであり, 点線は間隔が約 30 cm の場合で W-1 と W-3, W-2 と W-4 の 2 ケースを平均したもので, 破線は約 45 cm の場合で W-1 と W-4 から得たものである。Coherence をみると波高計間隔が広くなるにつれてその値が小さくなり, 時間波形の変形が強くなることを示している。位相差は $\theta(f) + 2n\pi$ の値で示してある。位相差の変化が滑らかであれば n の値の判定は容易であるが, 変化がはげしい場合 (たとえば No. 1 $f=3$ cps 付近) には容易でない。この場合は波高計間隔が最小となる組合せの位相差から判断した。

波長 $L(f)$ はどの組合せで計算しても比較的よく一致し, ピーク周波数付近およびそれより高周波数側は微小振幅波理論より長くなる傾向がみられ, 逆に低周波数側は短くなる傾向がある。興味深いことは基本波の波長 $L(f_p)$ と 2 倍波の波長 $L(2f_p)$ の比が 2 : 1 であることで, このことはストークス波の第 2 項のように波速が等しいことを示している。

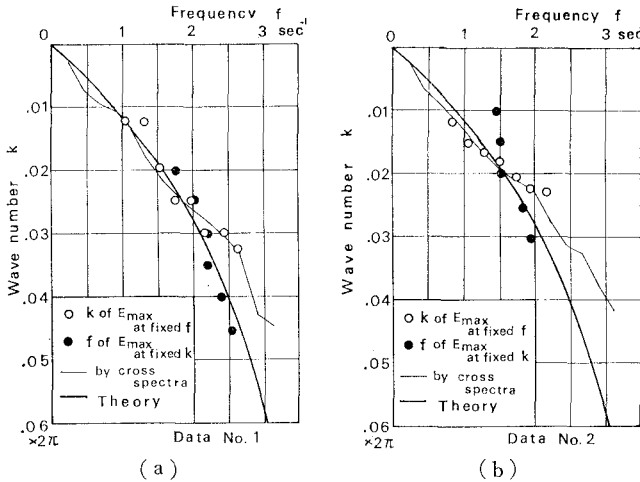
(2) 波数周波数スペクトル

図—3 (a), (b) は式 (20) によって解析した波数周波数スペクトル $E(f, k)$ を示したもので, $E(f, k)$ の等値線で表わしてある。この図は片側スペクトルであるので波数が負の部分は示していない。また周波数が負の部分は反射波などの後退波を意味する。さて, この図をみると Data No. 1, No. 2 とともに最大エネルギーを持つ成分波 (卓越波) は微小振幅波理論の $f-k$ 関係を示す曲線 (図

中実線で示す) より低波数側にあり, 波長が若干長くなることを示している。またエネルギーは波数周波数平面上のかなり広い範囲に分布していること, とくに全体のエネルギーが大きい Data No. 2 では微小振幅波理論の $f-k$ 関係曲線 (自由波を意味する) に沿って分布する傾向と, これから離れて卓越波と同じ波速を持つような拘束波の $f-k$ 関係, すなわち原点と卓越波を結ぶ延長上 (波速は σ/k であるから) に分布する傾向とがあることがわかる。後者の傾向は No. 2 の周波数スペクトルにおいて基本波の 2 倍モード付近に二次的ピークがあること, そしてその波長をクロススペクトルから計算すると基本波の半分になるという前述の結果と一致する。さて, 波数方向の分解能は $\Delta k/2\pi = 0.005$ cpc であるので, Data No. 1 では卓越波の波数までを 5 点ないし 6 点で分解し, No. 2 では 3 点ないし 4 点で分解したことになる。SWOP の計算例では卓越波長までを 3 点で分解しているので, 相対的な分解能は SWOP よりもよくなっている。また $E(f, k)$ の分布形からみて Aliasing の効果はそれほど大きなものではないと思われる。しかしながら, $f = \pm f_p$ 付近の全波数帯に小さな値ながらエネルギーが分布すること, および全エネルギーは $E(f, k)$ を積分した方が周波数スペクトルを積分するより多いことなどに疑問が残る。この原因として写真観測の範囲が $\Delta x(N_x - 1) = 280$ cm しかなくて狭いこと, そしてこの長さが卓越波長の整数倍になっていないために周期的に平均水位, およびその勾配が変動するような解析となっていることが



図—3 波数周波数スペクトル $E(f, k)$



図—4 クロススペクトルと波数周波数スペクトルの関係

考えられるので、今後解析を改良する必要がある。

(3) 周波数スペクトルと波数スペクトルの相違

図—4 (a), (b) は周波数クロススペクトルと波数周波数スペクトルの比較を試みたものである。太い実線は微小振幅波理論の $f-k$ 関係を示したもので、細い実線は6組のクロススペクトルから波長の平均を求めて、波数に直したものである。さて図中の白丸は $E(f, k)$ を波数軸に平行に切断してできる波数上のエネルギー分布が最大となる波数をプロットしたもので、黒丸は逆に $E(f, k)$ を周波数軸に平行に切断してできる周波数上のエネルギー分布が最大値となる周波数をプロットしたものである。前者を直線で近似すると原点を通る直線に近いが、後者を直線で近似すると f 軸上に交点を持ち、両者は一般に一致しない。また前者はクロススペクトルによる結果と一致する傾向がある。このことから考えると、周波数クロススペクトル解析は周波数を同じくするいくつかの波を平均操作して一つの平均波（最大エネルギーを持つ波に近い）を持つ波数を検出するものであり、一方波数クロススペクトル解析を行えば、波数を同じくするいくつかの波を平均操作するので、図中の黒丸に近い周波数を検出することになると思われる。局所的な面を重視する問題（たとえば杭に働く波力など）では周波数クロススペクトルの情報（白丸に相当）が必要であり、空間的な面を重視する問題（たとえば海浜変形、巨大構造物に働く波力など）には波数クロススペクトルの情報（黒丸に相当）が必要である。波数クロススペクトルを求めることは困難であるが、 $E(f, k)$ を数式で表示して、パワースペクトル $E(f)$ との関係を明らかにしておけば、波数クロススペクトルを求める必要はない。

(4) 波数周波数スペクトルの表示方法

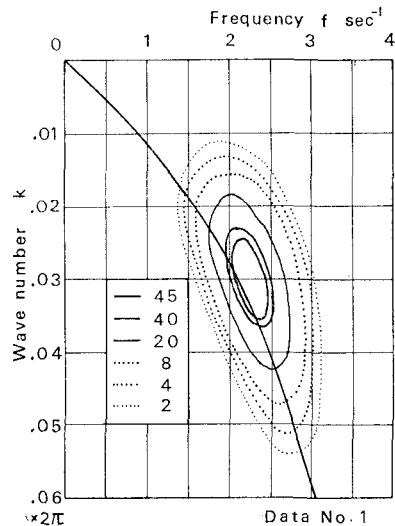
一般には三次元構造を持った $E(f, k_x, k_y)$ を表示する必要があるが、そのための基礎資料として $E(f, k)$ を表示することを試みた。図—4 において白丸を結ぶ線を

$k=Af+B$ の直線で近似し、この直線上にあるピーク値が波数方向に誤差関数的に低減するものと仮定する。さらに直線上のピーク値も f_p を中心に誤差関数的に低減するものと仮定し、 $f=f_p$ で波数について0から ∞ まで積分した値が $\gamma E(f_p)$ に等しくなるようにすると、波数周波数スペクトルを次式のように表示することができる。

$$E(f, k) = \gamma E(f_p) \sqrt{\frac{\alpha}{\pi}} \frac{1}{Af_p + B} \times \exp \left[\beta \left(\frac{f}{f_p} - 1 \right)^2 \right] + \alpha \left(\frac{k}{Af_p + 1} - 1 \right)^2 \quad (25)$$

係数 $A, B, \alpha, \beta, \gamma$ は Data No. 1 では

$A=0.0125, B=0, \alpha=-17.33, \beta=-21.87, \gamma=1.6$ となる。図—5 はこれらの値を使って式(25)を示したものである。図—3 (a) と比較すると、概略の分布は似ているが、最大エネルギー付近が若干平坦となっているので低減係数を大きくする必要があり、今後、係数の特性を調べる必要がある。


図—5 波数周波数スペクトル $E(f, k)$ の表示

5. 結 言

本研究は実験水槽内の風波が二次元構造を持つという前提の下で、その波数周波数スペクトルを解析したものである。その結果風波の波数周波数スペクトルは $f-k$ 平面上にかなり広がりを持っていること、そのために周波数クロススペクトルによって得られる情報と波数クロススペクトルによって得られると予想される情報とは異なることが明らかになった。本研究では $E(f, k)$ を表

示する一つの試みを行ったが、これを三次元的に拡張していけば、空間的な面を重視する問題を適切に扱うことができるものと期待される。

最後に本研究に際して御激励を賜った名古屋工業大学細井正延教授に感謝の意を表するとともに、実験および解析にあたって助力を戴いた井本久仁吉助手、ならびに盛岡市役所平野耕一郎氏、佐藤道路(株)、藤井尚之氏に感謝の意を表します。

参 考 文 献

- 1) 石田 昭・石田和生: 浅水領域における波形の分裂現象 —二次波峯現象と Soliton について—, 第20回海講論文集, pp. 403-409, 1973.
 - 2) 石田 昭: 浅水領域での分裂波 Soliton の特性について, 第22回海講論文集, pp. 41-46, 1975.
 - 3) Cote, L.J. et al.: The directional spectrum of a wind generated sea as determined from data obtained by the Stereo Wave Observation Project, papers, N.Y.U., Coll. Eng. Vol. 2, No. 6, p. 88, 1960.
-