

球形繫留 Buoy に作用する波力に関する研究

河 野 二 夫*

1. 緒 言

球形繫留浮遊構造物が波によりどのように影響されるかについて検討した。このような問題については繫留索 1 本を用いた Harlemann の研究¹⁾ や 3 本のロープを用いた本間・荻原の研究²⁾ 等があるが、いずれもプレテンションの初期状態にある。解析的に複雑な問題として円盤状浮体を 1 本の繫留索により繫留した場合のロープの運動も考慮した John らの研究³⁾ 等多くの研究がなされている。

しかし、自由表面の影響とか、付加質量の問題、ロープや浮遊物体の複雑な振動の問題など理論的、実験的に検討すべき課題が多く残されているように思われる。

2. 理論的研究

(1) 鏡像および逆鏡像効果

水中や水面を運動する物体は自由表面による鏡像効果を受け、あるいは流体の圧力変化に伴う造波抵抗を受けたり、また加速度に伴う見掛けの質量効果のあることはよく知られている。図-2.1 で水中の任意点 Q の水圧 p は式 (2.1) で与えられる。

$$p = F(t) - \rho g(h - \zeta) - \frac{1}{2} \rho \{ \text{grad } \phi_Q \}^2 - \rho \frac{\partial \phi_Q}{\partial t} \quad (2.1)$$

上式で ρ : 水の密度, g : 重力の加速度, ϕ : Q 点の速度ポテンシャル, t : 時間である。また右辺第 2 項は浮力, 第 3 項は圧力抵抗 (自由表面のあるときは造波抵抗), 第 4 項は見掛け質量力を与える項である⁴⁾。図-2.1 で一様流 U と静水中を U に平行に ξ で運動する球体のまわりの流れによる速度ポテンシャルを重ね合わせるときの Q 点の速度ポテンシャル ϕ は近似的には次式になる⁵⁾。

$$\begin{aligned} \phi = & U r \cos \beta - \frac{a^3 \xi}{2r^3} \left\{ 1 \pm \frac{a^3}{16(h - \zeta)^3} \right. \\ & + \frac{1}{256} \left(\frac{a}{h - \zeta} \right)^6 \left. \right\} \cos \beta - \frac{a^4 \dot{\xi}}{16(h - \zeta)^3} \\ & \times \left\{ \pm 1 + \frac{a^3}{16(h - \zeta)^3} \pm \frac{1}{256} \left(\frac{a}{h - \zeta} \right)^6 \right\} \cos \beta \\ & \dots\dots\dots (2.2) \end{aligned}$$

上式で $\pm$ は正が鏡像効果, 負は逆鏡像効果に対応する。

図-2.1 で ξ 方向の流体力 P_ξ は式 (2.1) に式 (2.2) を代入すると,

$$\begin{aligned} P_\xi = & - \int_s (p) r = a ds \div 2m \left\{ \dot{U} - \frac{1}{2} \ddot{\xi} \cdot \varphi \left(\frac{a}{h - \zeta} \right) \right\} \\ \varphi = & 1 \pm \frac{3}{16} \left(\frac{a}{h - \zeta} \right)^3 + \frac{3}{256} \left(\frac{a}{h - \zeta} \right)^6 \\ & \pm \frac{1}{2048} \left(\frac{a}{h - \zeta} \right)^9 + \dots\dots\dots (2.3) \end{aligned}$$

上式で, $m = (2/3) \rho \pi a^3$, $ds = 2\pi a^2 \sin \beta \cdot d\beta$ である。物理的には φ は球体自体の運動による付加質量が自由表面に影響される割合を示す。 $U=0$ における球体の運動をばね定数 k なる振動の問題に応用すると振動方程式は,

$$M_s \ddot{\xi} + C \dot{\xi} + k \xi = -m \ddot{\xi} \cdot \varphi [a/(h - \zeta)] \quad \dots\dots (2.4)$$

上式で M_s : 球殻の質量, C : 減衰係数である。式 (2.4) の解で振動数 (ω : 角振動数, ω_s : 固有角振動数) のみに注目すると

$$\begin{aligned} \omega/\omega_s = & \sqrt{[1 + m/M_s] / \left[1 + \frac{m}{M_s} \cdot \varphi \right]}, \\ \omega^2 = & \frac{k}{M_s + m \cdot \varphi} \quad \dots\dots\dots (2.5) \end{aligned}$$

(2) 浮体に作用する流体力

実験モデルの形態を繫留状態により 3 種類に分類する。

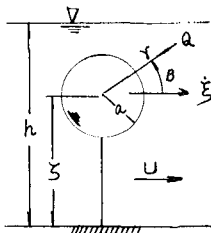


図-2.1 説明図

I 型: 図-2.2 で $h-a > \zeta$ の場合で浮体には常に浮力による張力が作用している場合。

II 型: 図-2.2 で $h-a < \zeta < h-\delta$ の場合で浮体の一部は浮上しているが、繫留索には多少張力が作用する。

III 型: $\zeta > h-\delta$ の場合で浮体の重量と浮力はつり合い、ロープには自重のみの張力が作用している場合。

図-2.2 で δ , θ_0 は浮体の吃水深および δ に対する水面と球面の交線を球心と結ぶ面が球心軸となす角である。

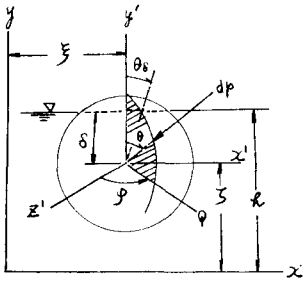


図-2.2 説明図

a) 浮力

① δ の値

δ は球心と浮遊平面との距離であり、次式で計算される。

$$\rho g \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \int_0^a r^2 \sin \theta \cdot d\theta \cdot dr \cdot d\varphi = Mg, \quad (2.6)$$

$$\delta = a \cos \theta_0 = a \left(\frac{M}{m} - 1 \right)$$

ただし M_L をロープの質量とすると $M = M_S + M_L$ である。

② I 型の浮力 (P_B)

$$P_B = (2m - M)g \quad (2.7)$$

③ II 型, III 型の浮力の増減

浮体が鉛直上向に ζ だけ変動する時の浮力の増分 ΔP_B は式 (2.6) を考慮すると

$$\Delta P_B = mg \left(1 + \frac{\delta - \zeta}{a} \right) - Mg = -mg \frac{\zeta}{a} \quad (2.8)$$

b) 波力

① II, III 型に作用する波力

波の速度ポテンシャル Φ と波形 η は次式になる。

$$\left. \begin{aligned} \Phi &= -\frac{Hg \cdot \cosh ky}{2\omega \cdot \cosh kh} \cdot \cos(kx - \omega t), \\ \eta &= \frac{H}{2} \sin(kx - \omega t) \end{aligned} \right\} \quad (2.9)$$

上式で H : 波高, ω : 波の角振動数, $k = 2\pi/L$, L : 波長である。 x, y 方向の流体力 P_ξ, P_ζ は近似的には,

$$\begin{aligned} P_\xi &= - \int_S \left\{ F(t) - \rho \frac{\partial \Phi}{\partial t} \right\} dS_\xi \\ &= \frac{\rho g H a^2}{2 \cosh kh} \int_{\theta_0}^{\theta=\pi} \int_0^{2\pi} \left[\cosh k\zeta \right. \\ &\quad \left. + \int_0^{a \cos \theta} \left\{ \frac{\partial}{\partial y} \cdot \cosh ky \right\}_{y=\zeta} \cdot dy \right] \\ &\quad \times \left[\sin(k\xi - \omega t) \right. \\ &\quad \left. + \int_0^{a \sin \theta \cdot \sin \varphi} \left\{ \frac{\partial}{\partial x} \cdot \sin(kx - \omega t) \right\}_{x=\xi} \cdot dx \right] \\ &\quad \times \sin^2 \theta \cdot \sin \varphi \cdot d\theta \cdot d\varphi = \frac{m \cdot H \cdot \omega^2 \cdot \cosh k\zeta}{2 \sinh kh} \\ &\quad \times \left\{ 1 + \frac{3}{2} \cos \theta_0 - \frac{1}{2} \cos^3 \theta_0 \right\} \cdot \cos(k\xi - \omega t) \quad (2.10) \end{aligned}$$

同様に y 方向の方向余弦 ($-\cos \theta$) を考慮すると,

$$\begin{aligned} P_\zeta &= \left[\frac{m H \omega^2 \sinh k\zeta}{2 \sinh kh} (1 + \cos^3 \theta_0) \right. \\ &\quad \left. - \frac{3 m H g}{4 a} \cdot \frac{\cosh k\zeta}{\cosh kh} (1 - \cos^2 \theta_0) \right] \\ &\quad \times \sin(k\xi - \omega t) \quad (2.11) \end{aligned}$$

ただし

$$\cos \theta_0 = \frac{\delta + \eta}{a} = \frac{\delta}{a} + \frac{H}{2a} \sin(k\xi - \omega t) \quad (2.12)$$

② I 型に作用する波力

式 (2.10), (2.11) で $\cos \theta_0 = 1$ とすると得られる。

$$\left. \begin{aligned} P_\xi &= m H \omega^2 \frac{\cosh k\zeta}{\sinh kh} \cdot \cos(k\xi - \omega t) \\ P_\zeta &= m H \omega^2 \frac{\sinh k\zeta}{\sinh kh} \cdot \sin(k\xi - \omega t) \end{aligned} \right\} \quad (2.13)$$

なお、波力は質量力が抗力に対し卓越すると仮定した。

(3) 浮体の振動方程式と解

図-2.3 で T はロープの張力, T_H, T_V は水底より l_0 の位置にある錨に作用する波や浮力等による繫索力を示す。

a) I 型の場合

自由表面の効果を無視しかつロープの変動も小さいとすれば,

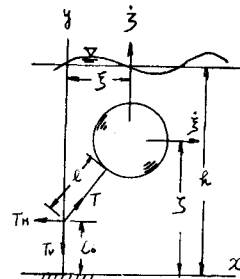


図-2.3 浮体の振動

$$\left. \begin{aligned} M_S \ddot{\xi} + C_\xi \dot{\xi} + k_\xi \xi &= -m \ddot{\xi} + P_\xi \\ m_S \ddot{\zeta} + C_\zeta \dot{\zeta} + k_\zeta \zeta &= -m \ddot{\zeta} + P_\zeta \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (2.14)$$

上式の右辺第2項は式(2.13)で与えられる。また、左辺の各係数は式(2.4)に対応するものである。左辺第3項の $k_\xi \cdot \xi$ は浮力による復元力を示すが次式になる。

$$k_\xi = (2m - M)g / (l + a) \dots\dots\dots (2.15)$$

ロープの重量を無視する場合は $M = M_S$ となる。一般に $k_\xi \ll 1$ であるので

$$\xi = \xi_0 \cos(\omega t - \gamma_1) \dots\dots\dots (2.16)$$

$$\left. \begin{aligned} \xi_0 &= \frac{\xi_0}{mH \cdot \cosh k(l + l_0 + a) / M \cdot \sinh kh} \\ &= \frac{(\omega / \omega_\xi)^2}{\sqrt{\left\{1 - \left(\frac{\omega}{\omega_\xi}\right)^2\right\}^2 + \left\{2q_\xi \frac{\omega}{\omega_\xi^2}\right\}^2}} \\ \tan \gamma_1 &= \{2q_\xi \cdot \omega / \omega_\xi^2\} / \{1 - (\omega / \omega_\xi)^2\} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (2.17)$$

同様に

$$\zeta = \zeta_0 \sin(\omega t + \gamma_2) \dots\dots\dots (2.18)$$

$$\left. \begin{aligned} \zeta_0 &= \frac{\zeta_0}{m \cdot H \cdot \sinh k(l + l_0 + a) / M \cdot \sinh kh} \\ &= \frac{1}{\sqrt{\{1 + (2q_\zeta / \omega)^2\}}} \\ \tan \gamma_2 &= \{2q_\zeta / \omega\} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (2.19)$$

ただし、

$$\omega_\xi^2 = \frac{k_\xi}{M}, \quad 2q_\xi = \frac{C_\xi}{M}, \quad 2q_\zeta = \frac{C_\zeta}{M} \dots\dots\dots (2.20)$$

Magnification factor を M_f とすると

$$M_f = \xi_0 / \lim_{\omega \rightarrow 0} \xi_0 = \frac{1}{\sqrt{\left\{1 - \left(\frac{\omega}{\omega_\xi}\right)^2\right\}^2 + \left\{2q_\xi \frac{\omega}{\omega_\xi^2}\right\}^2}} \dots\dots\dots (2.21)$$

b) II型の場合

$$\left. \begin{aligned} M_S \ddot{\xi} + C_\xi \dot{\xi} + k_\xi \xi &= -m_\xi' \ddot{\xi} + P_\xi \\ M_S \ddot{\zeta} + C_\zeta \dot{\zeta} + k_\zeta \zeta &= -m_\zeta' \ddot{\zeta} + \frac{mg}{a} \cdot \Delta\delta + P_\zeta \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (2.22)$$

$$k_\xi' = \frac{\Delta\delta \cdot mg}{a(l + a)}, \quad k_\zeta' = \frac{mg}{a}, \quad \Delta\delta = h - l_0 - l - a \frac{M}{m} \dots\dots\dots (2.23)$$

式(2.22)の $mg \cdot \Delta\delta / a$ は式(2.8)による。 $\Delta\delta$ の物理的意味は浮力と重量の差に対応する水深を示す。また P_ξ, P_ζ に式(2.10), (2.11)を代入すると解は次のようになる。

$$\left. \begin{aligned} \xi &= \xi_1 \cos(\omega t - \gamma_3) + \xi_2 \sin(2\omega t + \gamma_4) \\ \zeta &= \zeta_0 + \zeta_1 \sin(\omega t + \gamma_5) + \zeta_2 \cos(2\omega t - \gamma_6) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (2.24)$$

ξ_1 のみを示すと、

$$\begin{aligned} \xi_1 &= \frac{\xi_1}{\{m \cdot H \cdot \cosh k(l + l_0 + a) / 2(M_S + m_\xi') \cdot \sinh kh\}} \\ &= \frac{\left\{1 + \frac{3}{2} \frac{\delta}{a} - \frac{1}{2} \left(\frac{\delta}{a}\right)^3 - \frac{3}{16} \frac{\delta H^2}{a^3}\right\} (\omega / \omega_\xi')^2}{\sqrt{\left\{1 - \left(\frac{\omega}{\omega_\xi'}\right)^2\right\}^2 + \{2q_\xi' \omega / \omega_\xi'^2\}^2}} \end{aligned} \dots\dots\dots (2.25)$$

ここに

$$\left. \begin{aligned} \omega_\xi' &= \sqrt{k_\xi' / (M_S + m_\xi')}, \quad 2q_\xi' = C_\xi' / (M_S + m_\xi'), \\ \tan \gamma_3 &= \frac{2q_\xi' \omega / \omega_\xi'^2}{1 - (\omega / \omega_\xi')^2} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (2.26)$$

以下は省略した。

(4) 錨に作用する流体力(ロープの張力)

図-2.3の T_H, T_V は近似的には次のようになる(動的張力)。

a) I型の場合は式(2.13)により、

$$\left. \begin{aligned} \bar{T}_H &= \frac{T_H}{mH\omega^2 \cosh k(l + l_0 + a)} = \frac{1}{\sinh kh} \\ \bar{T}_V &= \frac{T_V}{mH\omega^2 \sinh k(l + l_0 + a)} = \frac{1}{\sinh kh} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (2.27)$$

b) II型の場合は式(2.10), 式(2.11)により、

$$\begin{aligned} \bar{T}_H &= \frac{T_H}{mH\omega^2 \cdot \cosh k(l + l_0 + a)} \\ &= \frac{1}{2 \sinh kh} \left[\left\{1 + \frac{3}{2} \frac{\delta}{a} - \frac{1}{2} \left(\frac{\delta}{a}\right)^3 - \frac{3}{16} \frac{\delta H^2}{a^3}\right\} \right. \\ &\quad \times \cos \omega t - \frac{3}{8} \left\{ \frac{H}{a} - \frac{\delta^2 H}{a^3} - \frac{1}{16} \left(\frac{H}{a}\right)^3 \right\} \sin 2\omega t \left. \right] \end{aligned} \dots\dots\dots (2.28)$$

$$\begin{aligned} \bar{T}_V &= \frac{T_V}{mH\omega^2 \sinh k(l + l_0 + a)} = \frac{1}{2 \sinh kh} \\ &\times \left[\left\{ \frac{3}{4} \frac{\delta^2 H}{a^3} - \left(1 + \frac{\delta^3}{a^3} + \frac{9}{8} \frac{\delta H^2}{a^3}\right) \sin \omega t \right\} \right. \\ &\quad + \frac{3}{2ak \tanh k(l + l_0 + a)} \\ &\quad \times \left\{ \frac{\delta H}{2a^2} - \left(\frac{\delta^2}{a^2} - 1 + \frac{3}{16} \frac{H^2}{a^2}\right) \sin \omega t \right\} \left. \right] + \dots \end{aligned} \dots\dots\dots (2.29)$$

c) III型の場合

図-2.4のようにロープの線密度を $w_l (M_l \cdot g / l)$ とす

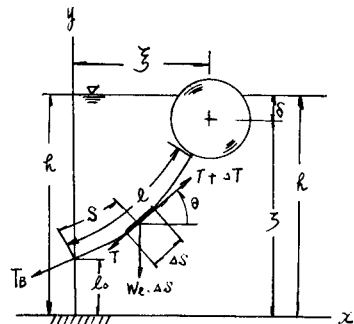


図-2.4 III型の振動

ると初期条件に対しロープの形状は Catenary 曲線になり、その解は与えられている⁶⁾。彼らの理論を応用すると、

$$\left. \begin{aligned} T &= T_B \cos \theta_B \left[1 + \sinh^2 h^2 \left\{ \frac{\xi \cdot \omega_l}{T_B \cos \theta_B} \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \sinh^{-1} (\tan \theta_B) \right\} \right]^{1/2} \\ S &= \frac{T_B \cos \theta_B}{\omega_l} \left[\sinh \left\{ \frac{\omega_l \cdot \xi}{T_B \cos \theta_B} \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \sinh^{-1} (\tan \theta_B) \right\} - \tan \theta_B \right] \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (2.30)$$

本論文では波動に対しロープの条件を無視した場合につき式 (2.30) を単純化して実験値と比較した。

3. 実験的研究と理論値の比較

(1) 鏡像効果

図-3.1 に示すように板ばねによる球体倒立振子を球心が水面下 $h-\xi$ の位置にくるように固定し、初期振幅 ξ_0 が一定の状態で振動させた場合の振幅 (ξ) や角振動数 (ω) が減少する実験結果が 図-3.2, 図-3.3 に示してある。 ω_0 は $a/(h-\xi)=0.4$ の場合の初期角振動数であり、 ξ_0 は初期振幅である。 n は振動回数である。これらの図は $m/M=3.03$ の場合であるが、 $m/M=0.51$ の場合と比較したものが 図-3.1 である。また 図-3.4 には理論値式 (2.5) が示してある。以上の結果から水面近傍の球体は逆鏡像効果を有することがわかる。

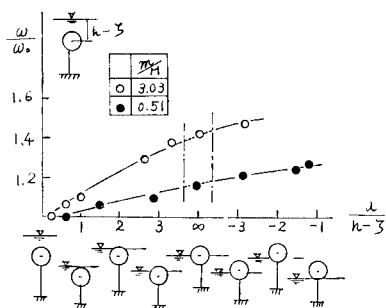


図-3.1 水表面条件の実験値

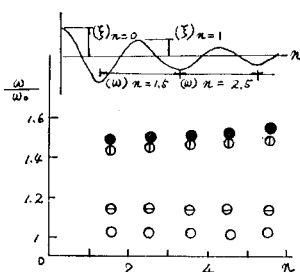


図-3.2 振動数の変化

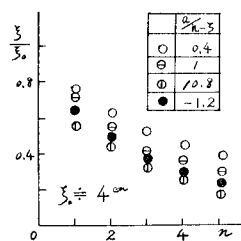


図-3.3 振幅の変化

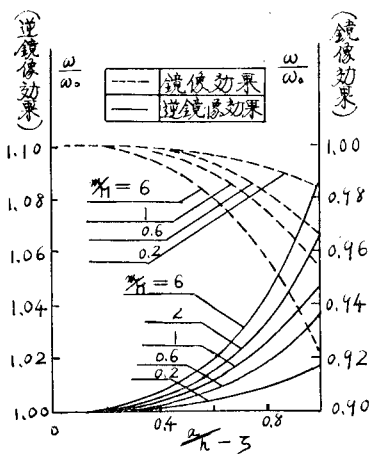


図-3.4 鏡像効果の理論値

(2) 繫留装置

図-3.5 に示すように2個の板ばね（長さ 5 cm、幅 0.8 cm、厚さ 0.2 mm）を水平、垂直に交差（ハンダー付け）させ、その1端を水路側壁に固定し、他端にロープ（水中重量 0.04 g/cm、直径 1.8 mm）を取り付け、ロープの先端に球体を固定した。

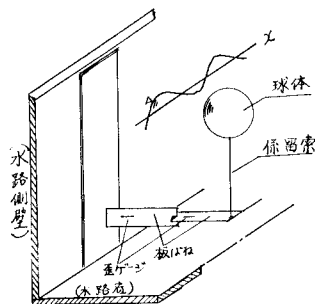


図-3.5 繫留実験装置

(3) 球の振動

水面上からポイントゲージで球の振幅を計測した結果を理論値式 (2.17) と比較した。本文では I 型の場合の結果を 図-3.6 に示した。

(4) ロープの張力

ロープの張力は水平方向 (T_H)、鉛直方向 (T_V) を同

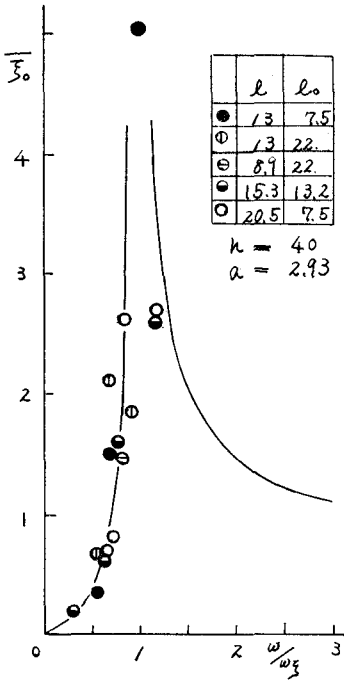


図-3.6 水平振幅 (I 型)

時に計測した。図-3.5, 図-3.7 からわかるようにロープ張力 P と P_H , P_V の関係は $P_H = P \sin \theta$, $P_V = P \cos \theta$ である。他方 P_H , P_V による板ばねの変位は P が板ばねに直角に作用した時の P の値 (P_{H0} , P_{V0}) による変位に等しくなければならぬ。そこで、変位を一致させたときの P による計算値 (P_H , P_V) と P_{H0} , P_{V0} を比較したものが 図-3.7 である。 θ により多少の Torsion の影響は見られるが、本論文では P_{H0} , P_{V0} を実測値とした。

I 型の場合の実測値と理論値の比較が 図-3.8, 図-3.9 に示してある。実験条件は a : 1.88, 2.93 cm; l_0 : 5, 7.5, 13.2, 22 cm; $T=0.67 \sim 3$ 秒; $H=1 \sim 12.5$ cm; $h=40, 45$ cm である。

理論値は式 (2.27) で与えたが、この時の増幅率は式

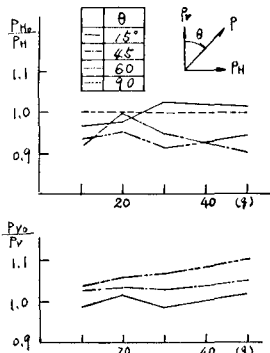


図-3.7 板ばねの Torsion の実験

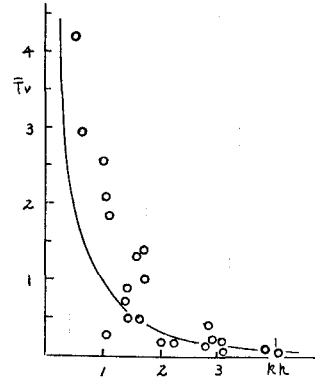


図-3.8 T_V の実験値と理論値の比較 (I 型)

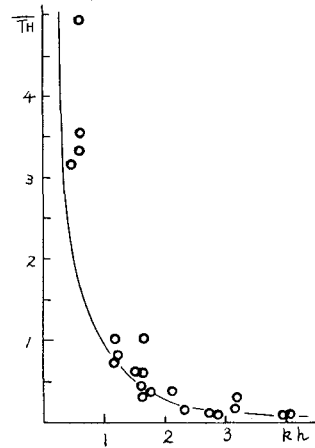


図-3.9 T_H の実験値と理論値の比較 (I 型)

(2.21) を用いた。ただし $\bar{T}_V$ に対しては式 (2.19) から増幅率は計算されるべきだが減衰係数は充分小さいと見做した。

II 型の場合の実験値と理論値式 (2.28), 式 (2.29) の比較を 図-3.10, 図-3.11 に示した。ただし理論値は

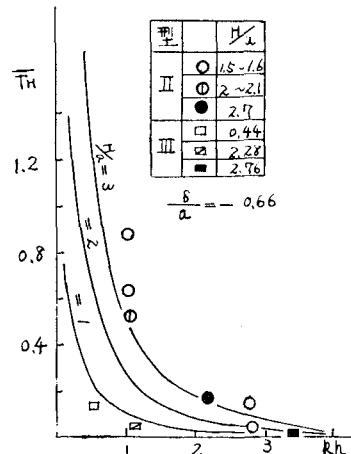
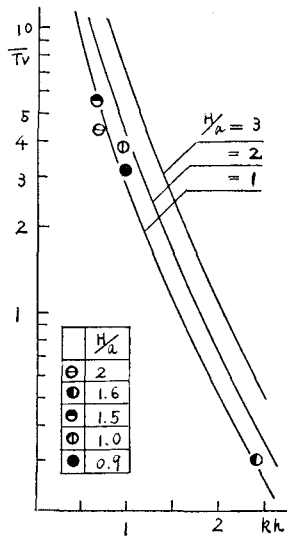


図-3.10 T_H の実験値と理論値の比較 (II, III 型)



図—3.11 T_V の実験値と理論値の比較 (Ⅱ型)

波と球の振動数が同一のものにつき計算した。増幅率は式 (2.25) による計算値を使用した。この時の固有周期 ω'_ξ の計算で付加質量 m'_ξ を計算する必要があるが、これには 図—3.1 の実測値を利用した。すなわち、与えられた $a/(h-\zeta)$, m/M に対する 図—3.1 の ω/ω_0 の値は式 (2.5) の ω/ω_ξ に等しい。ゆえに式 (2.5) から逆算して付加質量 $m \cdot \phi$ を知る。もちろん $m \cdot \phi$ には自由表面の圧力抵抗 (造波抵抗) に関する項も含まれた見掛け

の質量である。

Ⅲ型の場合、理論的には式 (2.30) の T に波力を与えて得られるが、ロープの振動の影響等の解析はまだ行っていないので、ロープの条件を無視するとⅡ型と同一になるので 図—3.10 に実験値 T_H を示した。Ⅲ型の場合、本実験での張力の発生するのは少ない。Ⅱ型では複雑な非線型振動が多く、これらは解析から除外した。

参 考 文 献

- 1) Harlemann, D.R.F. and W.C. Shapiro: The dynamics of a submerged moored sphere in oscillatory waves, Proc. of 7th Conf. on Coastal Eng., 1960.
- 2) 本間 仁・荻原國宏・江森坦也: 3点プレテンションアンカーされた水中ブイの運動, 第22回海岸工学講演会論文集, pp. 403~407, 1975.
- 3) John, H. Nath. and P.F. Michael: Dynamics of single point mooring in deep water, Proc. A.S.C.E. WW 4, pp. 815~833, 1970.
- 4) 元良誠三: 船体運動力学, 応力講座, 2-C, 共立出版.
- 5) 河野二夫: 波の進行に直角水平方向の球の振動, 土木学会論文報告集, 第 179 号, pp. 49~58, 1970.
- 6) 前出 3)。または渡辺恵弘: 繫留 buoy の条件, 九州大学応用力学研究所所報, 第 37 号, pp. 21~35, 1972.