

波の周期に近い固有周期を有する円柱と波との 相互作用に関する研究

本多忠夫*・光易恒**

1. 緒 言

最近、海洋構造物の設置水深が次第に増大してゆく傾向にある。その結果構造物の固有周期が次第に増大して海洋波の周期に近づいてゆく。波の基本周期には共振しないとしても波の高調波成分を考えると充分共振を生じるような場合も考えられる。このような場合の波力の問題を検討するために、波の周期と同程度の固有周期を有する单一の直立円柱の場合について水槽実験を行った。その結果、波の線型理論ならびに波力に関する Morison 公式を用いて波力を計算し、さらに円柱の系を 2 次の振動系とみなして、波力に対するその応答特性を考慮すれば現象の説明が大ざっぱには可能であることがわかった。しかしながら、細部については理論と実験とはかなりのくい違いを示した。特に注意しなければならないことは、系の固有周期の 2 倍および 3 倍周期の波によって、かなり共振が生じた点である。このような現象を説明するため理論的考察を行い、ほぼ満足すべき結果が得られた。

2. 実 験

実験はプランジャー型造波機付水槽（幅：1.5m、長さ：60 m）を使用して行われた。図-1 に示されるように、直径 6 cm、長さ約 170 cm の円柱を波力測定用アームを介して水槽の一様水深部（水深：133 cm）に鉛直に固定した。プランジャー型造波機で起こした単一周期の規則波をこの円柱に作用させて波力の測定を行った。使用した実験波の波高は大部分 2~4 cm であるが波高 8 cm の波も一部分使用した。波の周期は約 0.7 sec

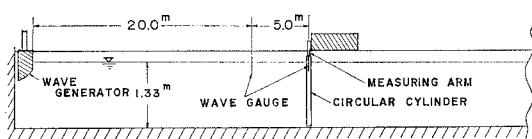


図-1 実験水槽説明図

* 正会員 九州大学助手 応用力学研究所
** 正会員 理博 九州大学教授 応用力学研究所

から 3.4 sec と広範囲に変化して実験を行った。この実験波の周期の範囲は円柱と波とが共振を起こす付近の周期から円柱の固有周期の 4 倍程度の周期に対応している。前半の実験では円柱として硬質塩化ビニールのパイプを使用し、後半の実験では鉄パイプを使用した。

円柱としてビニールパイプを使用した場合の波力測定系の固有周期は 0.856 sec であり、鉄パイプの場合は 0.850 sec である*。ビニールパイプの場合の減衰定数は 3.37×10^{-2} であり、鉄パイプの場合はそれより約 1 衍小さい 5.77×10^{-3} である。すなわち今回の実験においては減衰定数の異なる 2 種類の円柱（直径はいずれも 6 cm）について波力の測定が行われた。

円柱に作用する波力は円柱を固定しているアームに貼付した半導体ひずみゲージによって検出された。円柱に作用する波力モーメントおよび水平波力に比例するひずみ量をそれぞれ動ひずみ計を通してデーター・レコーダに記録した。この記録を再生し、その出力に 11.2 Hz の遮断周波数のローパス・フィルターをかけてペン書オッショログラフに記録した。この記録波形のうちの定常状態に達した部分を読みとて解析した。ローパス・フィルターを使用したのは高周波のノイズを除去するためである。この解析においては円柱の中心の真横に 40 cm はなれた点の波高が使用された。

この実験においては、円柱が共振を起こす円柱の固有周期および 2 倍周期付近の周期の波が円柱に作用した場合の現象を特に重点をおいて調べる。したがって、アームと円柱とで構成される波力の測定系の応答特性が極めて重要になる。そこで、この波力測定系の振動特性をまえもって調べた。円柱を空中および波力の測定状態で振動させて表-1 の結果が得られた。

測定状態における波力測定系の固有周期は実験波の周期の範囲 0.7~3.4 sec の中間にある。

3. 結 果

固定された円柱の単位長さ当たりに作用する水平波力

* 波力測定系の固有周期を小さくするために、パイプの先端に円柱の自重と同じ重さの小粒の鉛をめた。

表一 波力測定系の振動特性

	空 中		波 力 測 定 状 態 (水深: 133 cm)	
	減衰定数 β	固有周期 T_0 sec	減衰定数 β	固有周期 T_0 sec
硬質塩化ビニール・パイプ	6.05×10^{-3}	0.720	3.37×10^{-2}	0.856
鉄製パイプ	1.54×10^{-3}	0.812	5.77×10^{-3}	0.850

を抗力と慣性力の和として Morison の式を使用して表わすと次のようになる。

$$dF = \frac{1}{2} \rho D C_D |u| u + \rho \frac{\pi D^2}{4} C_M \ddot{u} \quad \dots \dots \dots (1)$$

ρ : 水の密度, C_D : 抗力係数, C_M : 慣性係数, D : 円柱の直径, u : 水粒子の水平方向の速度, \ddot{u} : 水粒子の水平方向の加速度

まず最初に、微小振幅波理論を適用して解析を進める。すなわち、次のような水面波形を考える。

$$\eta(t) = a \cos(kx - \omega t), \quad k = \frac{2\pi}{L}, \quad \omega = 2\pi/T$$

a は実験波の振幅, L は波長および T は周期である。この波による水粒子の水平速度 u および加速度 \ddot{u} を微小振幅波理論に基づいて計算し式(1)に代入し、抗力係数 C_D および慣性係数 C_M を一定と仮定して水底から水面 $\eta(t)$ まで積分すると全水平波力 F が次のように求まる。

$$F = F_D + F_I$$

$$F_D = C_D \cdot \frac{\rho g D a^2}{2} \cdot \frac{k h}{\sinh 2k h} \times \left[\frac{\sinh \{2k h(1+\eta/h)\}}{2k h} + 1 + \eta/h \right] \times |\cos \omega t| |\cos \omega t|$$

$$F_I = -C_M \cdot \frac{\rho g \pi D^2 a}{4} \times \frac{\sinh \{k h(1+\eta/h)\}}{\cosh k h} \sin \omega t$$

ここで、 h は円柱の設置水深および g は重力加速度である。この実験条件においては $\eta/h = 0.0075 \sim 0.015$ であるので、 $\eta/h \approx 0$ と考え、さらに $a = H/2$ (H : 波高), $C_D = 1$ および $C_M = 2$ と仮定すると抗力 F_D および慣性力 F_I は次のようになる。

$$F_D = \rho g \frac{D H^2}{16} \left(1 + \frac{2k h}{\sinh 2k h} \right) |\cos \omega t| |\cos \omega t|$$

$$F_I = -\rho g \frac{\pi D^2 H}{4} \cdot \tanh k h \sin \omega t$$

この実験における抗力の最大値 $|F_D|_{\max}$ と慣性力 $|F_I|_{\max}$ との比を見ると次のようになる。

$$\frac{|F_D|_{\max}}{|F_I|_{\max}} = \frac{1}{4\pi} \cdot \frac{H}{D} \cdot \frac{1}{\tanh k h} \left(1 + \frac{2k h}{\sinh 2k h} \right) \approx 0.0265 \sim 0.146$$

したがって、この実験においては $F_I \gg F_D$ と考えることができる。そこで、測定された波力の極大値 F_m を慣性力 F_I の極大値で割って次のような形に無次元化して検討することにした。

$$\hat{F}_m = |F_m| / \rho g (\pi/4) D^2 H \tanh k h \quad \dots \dots \dots (2)$$

微小振幅波近似が適切で、かつ慣性力が抗力に卓越し、さらに質量係数 C_M が 2 であるならばこの形に無次元化された波力 \hat{F}_m は常に 1 に等しい定数となる。 F_m の測定値としては波の進行方向の測定された波力の極大値 F_m^+ と逆向きの波力の極大値 F_m^- との平均値を使用した。この実験において測定された F_m^+ と F_m^- の値はほぼ同程度であった。無次元波力 \hat{F}_m の測定値の無次元周期 T/T_0 (T : 波の周期, T_0 : 円柱の固有周期) に対する変化が図-2 および図-3 に示されている。図-4 には実験波と測定された波力の波形が示されている。

ここで注意しなければならないことは、今回波力の測定値として取扱っている量 $F(t)$ が波により円柱に作用する実際の流体力ではないことである。円柱を支持している系の周波数応答は実験に使用した波の周波数範囲で一様ではなく、その範囲内のある周波数の所で共振点を有するような特殊な特性を有している。したがって、測定ひずみ量は波力に対する系の応答に対応するものである。円柱を弾性的なアームで支持したこの波力測定系は、近似的に 1 自由度の振動系と考えができるので、入力 $F(t)$ と出力 $x(t)$ との関係は、次の定数系の 2 次の線型微分方程式で表わされるものと考えられる。

$$x(t) + 2\beta\omega_0 \dot{x}(t) + \omega_0^2 x(t) = \omega_0^2 F(t) \quad \dots \dots \dots (3)$$

β : 測定系の減衰定数, ω_0 : 測定系の固有角

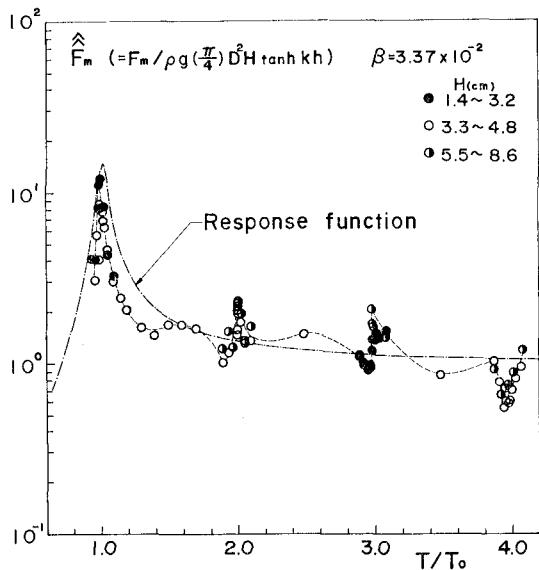


図-2 無次元波力 \hat{F}_m と無次元周期 T/T_0 との関係
減衰定数 $\beta = 3.37 \times 10^{-2}$

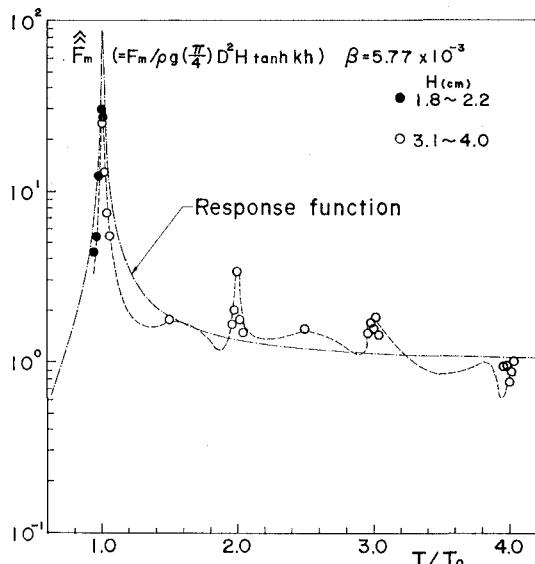
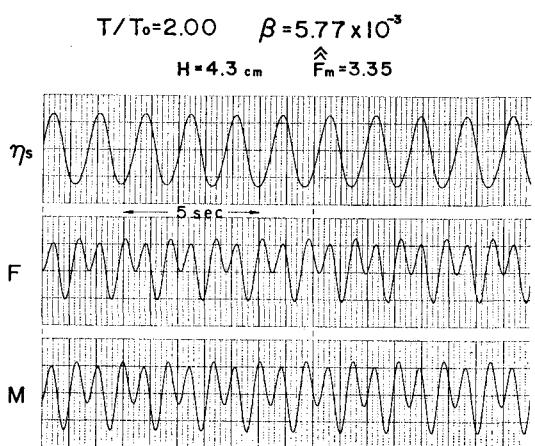
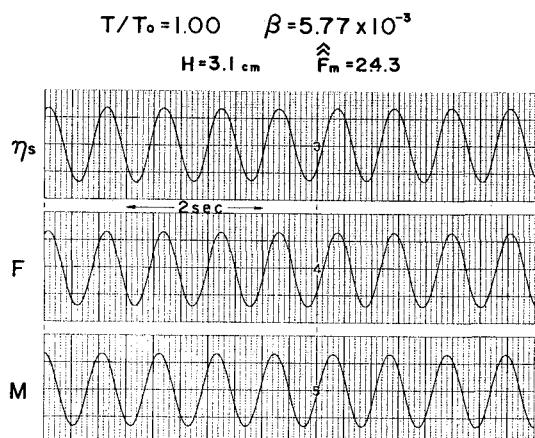


図-3 無次元波力 \hat{F}_m と無次元周期 T/T_0 との関係
減衰定数 $\beta = 5.77 \times 10^{-3}$



振動数 ($\omega_0 = 2\pi/T_0$, T_0 : 測定系の固有周期)
固有周期が T_0 で減衰定数が β の系に正弦的に変化する単位外力が作用した時の定常状態における応答 $x(t)$ は次式で与えられる¹⁾。

$$x(t) = R e^{j(\omega t - \theta)}$$

$$R(T/T_0) = \frac{1}{[1 - (T_0/T)^2 + 4\beta(T_0/T)]^{1/2}} \quad \dots \dots \dots (4)$$

$$\theta(T_0/T) = \tan^{-1} \frac{2\beta(T_0/T)}{1 - (T_0/T)^2}$$

したがって、われわれが測定した波力として取扱っている量 F は波による流体力としての波力にこの応答関数がかかったものである。ところが先に述べたように実際の波力が、もし近似理論が適切であるならば、1となるような形に無次元化して取扱っているので、測定波力の無次元値は、もし波力に対する近似理論が正しくかつ系に対するモデルが適切であるならば応答関数に一致するはずである。このような考え方で系の応答を一種の理論的推定値として 図-2 および 図-3 に一点鎖線で示した。

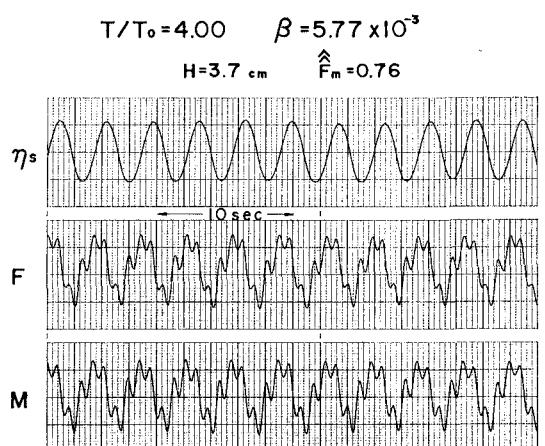
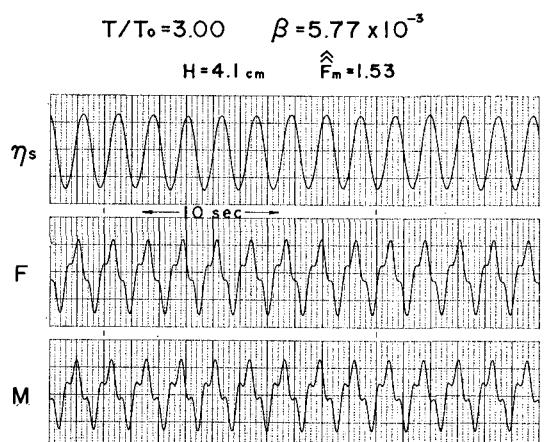


図-4 波および波力の記録(鉄パイプの場合) 波の無次元周期 T/T_0 : 1, 2, 3, 4 の場合の例
(η_s : 波形, F : 波力, M : 波力のモーメント)

これらの図から次のようなことがわかる。

(i) 実測値の無次元周期に対する変化は大局的には理論的推定値と同様な傾向を示す。

(ii) 系の固有周期と同じ周期に対しては予測されるように円柱は共振を生じ非常に大きな応答を示している。塩化ビニールパイプの場合には実測値と理論的推定値とは良好な一致を示しているが、減衰定数の小さな鉄パイプの場合はこの理論的推定値と実測値とはかなりのくい違いを示している。これは減衰定数が小さければ無次元周期(T/T_0)に対する系の応答は共振周期付近で非常に鋭い応答を示すため、正確な共振周期での計測が行われなかったことに原因するものと考えられる。

(iii) 円柱の固有周期の2倍および3倍の周期の波に対しても円柱は一種の共振特性を示し、実測値は理論的推定値よりかなり大きな値をとる。このような理論的推定値と実測値とのくい違いの主な原因是、波の非線型性に原因する高調波成分による共振効果によるものと考えられる。この点に関して若干の考察を次節で試みる。

4. 考 察

前節で述べたように今回計測された無次元波力 \hat{F}_m は実測された波力(みかけの)を单一周期の微小振幅波が円柱に及ぼす波力で割って無次元化したものである。したがって、流体力としての無次元波力に系の応答関数がかかったものに対応する。これに対応する理論的推定値は、この測定系を1自由度の振動モデルにおきかえ、正弦的に変化する単位入力がこの測定系に作用した時の応答として計算されたものである。しかしながら、波の非線型性に基づく高調波成分によると考えられる一種の共振特性が実験結果に明瞭に現われている(図-2および図-3)。造波機で单一周期の波をおこしたとしても、その波には、波自身の非線型性による高調波成分および造波板の運動等に原因する高調波成分が必ず含まれる。今回使用した実験波のパワースペクトルをみると、基本周波数成分に大部分のエネルギーが集中しているが、2倍および3倍の周波数成分の波にも明らかにエネルギーの集中がみられた。これらの高調波成分は基本周波数成分に比較してかなり小さいけれども、これらの高調波の周波数が丁度円柱の周波数と一致すれば円柱は共振を生じ、みかけの波力は非常に大きく増幅されることになる。この場合、測定される波力は基本波による波力と2倍周波数の成分波による波力との位相を考慮した和になると考えることができる。そこで、パーマネントタイプの有限振幅波として Stokes 波を仮定し検討を試みた。

3次近似の Stokes 波の速度ポテンシャル ϕ は次のようにかける²⁾。

$$\begin{aligned}\phi(x, z; t) = & \frac{\omega}{k^2} \left[F_1 \cosh k(z+h) \sin \theta \right. \\ & + \frac{F_2}{2} \cosh 2k(z+h) \sin 2\theta \\ & \left. + \frac{F_3}{3} \cosh 3k(z+h) \sin 3\theta \right]\end{aligned}$$

ここに

$$\theta = kx - \omega t,$$

$$F_1 = ak\varphi_1, \quad \varphi_1 = \frac{1}{\sinh kh}$$

$$F_2 = (ak)^2 \varphi_2, \quad \varphi_2 = \frac{3}{4(\sinh kh)^4}$$

$$F_3 = (ak)^3 \varphi_3, \quad \varphi_3 = \frac{3(11 - 2 \cosh 2kh)}{64(\sinh kh)^7}$$

これより加速度は、次のように求まる。

$$\begin{aligned}\ddot{u}_{x=0} = & -\frac{\omega^2}{k} [F_1 \cosh ks \sin \omega t + 2F_2 \cosh 2ks \sin 2\omega t \\ & + 3F_3 \cosh 3ks \sin 3\omega t]\end{aligned}$$

ここに

$$z+h=s$$

まえにも検討したように今回の実験条件においては波力は大部分慣性力による寄与であるので、上式の加速度を用いた慣性力で円柱に作用する全水平波力を計算する。慣性係数 C_M を一定と仮定して、Morison の式を水底から波面まで積分すると次式を得る。

$$\begin{aligned}F = & -C_M \rho \left(\frac{\pi D^2}{4} \right) a \cdot \left(\frac{\omega^2}{k} \right) \\ & \times [\varphi_1 \sinh kh(1+\eta/h) \sin \omega t \\ & + (ak)\varphi_2 \sinh 2kh(1+\eta/h) \sin 2\omega t \\ & + (ak)^2 \varphi_3 \sinh 3kh(1+\eta/h) \sin 3\omega t]\end{aligned}$$

波の分散関係式

$$\omega^2 = gk \tanh kh \left[1 + \frac{(ak)^2}{8} \frac{\cosh 4kh + 1/8}{(\cosh kh)^4} \right]$$

を考慮すると今回定義した無次元波力

$$\hat{F} = F / \left(-C_M \cdot \rho g \cdot \frac{\pi D^2}{4} \cdot a \cdot \tanh kh \right)$$

は結局次式のようになる。

$$\begin{aligned}\hat{F} = & \frac{\sinh kh(1+\eta/h)}{\sinh kh} \left[1 + \frac{(ak)^2}{8} B_0 \right] \\ & \times \left[\sin \omega t + \frac{3}{4}(ak) C_2 \sin 2\omega t \right. \\ & \left. + \frac{3}{64}(ak)^2 C_3 \sin 3\omega t \right] \dots \dots \dots \quad (5)\end{aligned}$$

ここに

$$\begin{aligned}\eta = a & \left[\cos \omega t + \left(\frac{ak}{2} \right) f_2 \cos 2\omega t \right. \\ & \left. + \left(\frac{ak}{2} \right)^2 f_3 \cos 3\omega t \right]\end{aligned}$$

$$B_0 = \frac{\cosh 4kh + 1}{(\cosh kh)^4},$$

式(5)における高調波成分の大きさは、 kh が非常に大きな場合には、 $B_0 \rightarrow 1$ 、 $f_2 \rightarrow 1/2$ および $f_3 \rightarrow 3/2$ であるが C_2 および C_3 が項 $\{1/(\sinh kh)^2\}$ を含むため非常に小さくなり、しかも (ak) あるいは $(ak)^2$ がかかっているので極端に小さくなる。したがって、 kh が大きい場合には波の非線形性による水粒子加速度場に含まれる高調波成分による波力への寄与は無視できることになる。今回の実験において、代表的波高 4 cm で無次元周期 $T/T_0=2$ の場合について式(5)の各項を具体的に見積もると次のようになる。

$$\left. \begin{aligned} \frac{(ak)^2}{8} B_0 &\approx 10^{-4}, \quad \frac{3}{4}(ak) C_2 \approx 10^{-3}, \\ \frac{3}{64}(ak)^2 B_3 &\approx 10^{-5} \end{aligned} \right\} \dots\dots(7)$$

ここで、 $\eta/h \approx 10^{-2}$ であるので $\sinh kh(1+\eta/h) \approx \sinh kh$ と仮定する。 $T/T_0=2$ の場合を考えているので 2 倍周波数の成分波が円柱に共振を生じさせる。しかしながら、この測定系の周波数応答関数 (4) による増幅率は $R(T/T_0) \approx 10 \sim 10^2$ であるので、この測定系の増幅率を考慮に入れたとしても、この 2 倍周波数成分波による波力への寄与は高々数 % 程度にすぎない。 $T/T_0=3$ の場合には $(ak)^2$ の項がかかるてくるので、円柱を共振させる周波数成分波の波力への寄与は $T/T_0=2$ の場合よりもさらに小さくなる。 T/T_0 が大きくなれば (ak) の高次の項を考えなければならないで、共振による波力への寄与はますます小さくなる。

以上のことから、波の非線型性より水粒子の加速度場に含まれる高調波成分による円柱の共振現象としてはこの実験結果は説明困難であることがわかった。

そこで、波の非線型性により、水粒子の加速度場に生じた高調波成分による波力である式(5)の高調波成分の項を無視した。その代わりに、以上の議論で無視した式(5)に含まれる η の効果を考慮に入れて式(5)を展開した。 $k\eta \ll 1$ であるので

$$\sinh kh(1+\eta/h) = \sinh(kh+k\eta)$$

$$= \left\{ 1 + \frac{1}{2}(k\eta)^2 + \dots \right\} \sinh kh \\ + \left\{ k\eta + \frac{1}{3!}(k\eta)^3 + \dots \right\} \cosh kh \quad \dots(9)$$

$k\eta \approx 10^{-1}$, $(k\eta)^2 \approx 10^{-2}$, $(k\eta)^3 \approx 10^{-3}$ ……であることを考慮して, $(k\eta)^3$ 以上の高次の項を無視し, 式(6)の η を代入し計算すると次式を得る。

$$\begin{aligned} & \frac{\sinh kh(1+\eta/h)}{\sinh kh} \sin \omega t = \left\{ 1 + \left(\frac{ak}{2} \right)^2 \right\} \sin \omega t \\ & + \left(\frac{ak}{2} \right) \left\{ \tanh kh + \left(\frac{ak}{2} \right)^2 f_2 \right\} \cdot 2 \sin \omega t \cos \omega t \\ & + \left(\frac{ak}{2} \right)^2 \{ f_2 \tanh kh + 1/2 \} \cdot 2 \sin \omega t \cos 2\omega t \\ & + \left(\frac{ak}{2} \right)^3 \{ f_3 \tanh kh + f_2 \} \cdot 2 \sin \omega t \cos 3\omega t \end{aligned}$$

これから波力の表現式として次式が得られる。

$$\begin{aligned}\hat{F} = & \left\{ 1 + \left(\frac{ak}{2} \right)^2 (1/2 - f_2 \tanh kh) \right\} \sin \omega t \\ & + \left(\frac{ak}{2} \right) \tanh kh \left\{ 1 - \left(\frac{ak}{2} \right)^2 f_3 \right\} \sin 2\omega t \\ & + \left(\frac{ak}{2} \right)^2 \{ f_2 \tanh kh + 1/2 \} \sin 3\omega t \\ & + \left(\frac{ak}{2} \right)^3 \{ f_2 + f_3 \tanh kh \} \sin 4\omega t\end{aligned}$$

(ak)² ≪ 1 および式(4)の周波数応答関数を考慮に入れると、無次元周期 $T/T_0 = \omega_0/\omega = n$ の波が円柱に作用した時にこの測定系によって測定されるみかけの波力の無次元値は結局次式で与えられる。

$$\begin{aligned}\hat{\vec{F}} = & R(n) \sin \omega t + \left(\frac{ak}{2}\right) R(n/2) K_2 \sin 2\omega t \\ & + \left(\frac{ak}{2}\right)^2 R(n/3) K_3 \sin 3\omega t \\ & + \left(\frac{ak}{2}\right)^3 R(n/4) K_4 \sin 4\omega t \dots \dots \dots (10)\end{aligned}$$

いま、簡単のため位相を無視して、単純に各項の振幅の和を求め、これを $\hat{\hat{F}}_m$ とする。この $\hat{\hat{F}}_m$ の値を無次元周期 $T/T_0=2$ の場合について実測値と比較した。塩ビパイプおよび鉄パイプの実測値は 2 および 3 程度である。これに対して計算値はそれぞれ 1.5 および 2.5 である。式(9)の第2項以下を無視した計算値は 1.33 である。この実験結果をかなりよく説明している。しかしながら、 $T/T_0=3$ および 4 の場合については、 $(ak)^2$ および $(ak)^3$ が非常に小さいために式(10)の第2項以下の寄与が小さくなり、実験結果を充分説明できない。この原因としては次のことが考えられる。実験波に対し、Stokes 波近似を使用し表面波形 η として式(6)の最初の式を用いた。しかしながら、実験波を Fourier 解析して、基本波に対する 2 倍および 3 倍周波数の成分波の振

幅比を求め、これらを Stokes 波近似の値と比較した結果、実測値の方が Stokes 波近似の値よりもかなり大きいことがわかった。そこで、表面波形 η における高調波の振幅比として $(ak/2)f_2$ および $(ak/2)^2f_3$ のかわりに実測値をそのまま用いて、 $T/T_0=2$ および 3 の場合について無次元波力 \hat{F}_m を計算した。結果は表-2 の通りである。

表-2

T/T_0	堀 ビ バ イ プ		鉄 バ イ プ	
	実 測 値	計 算 値	実 測 値	計 算 値
2	2	2.0	3	5.4
3	1.5	1.2	1.8	1.7

これより、上記のような手順で求めた波力の推定値が波力の実測値に極めて近い値を与えることがわかる*。

以上の結果をとりまとめてみると次のようなことがいえる。相対水深が比較的大きい場所にある直立円柱に作用する波力では、波の非線型性に原因する波力における高調波成分は、波による水中の速度場あるいは加速場に

含まれる高調波成分に起因するものよりも、水位の時間的変動のため波力の作用範囲が時間的に変化することに起因するものの方が支配的である。このような機構によると、 η に高調波成分が含まれなくても波力に高調波の変動が生じることになる。この間の事情は、波の運動に関しては線型近似を使用しても、波面の水位の変動を考慮すると質量輸送が生じることに類似したものである。

謝辞 本実験の逐行およびデータ整理に際しては、本研究所の江藤賢次技官および田中道芳技官の協力を得た。データ整理の過程においては、本研究所の増田章助手より有益な討論および示唆を得た。ここに記して謝意を表する次第である。

この研究は文部省科学研究費を使用して行われたものである。

参 考 文 献

- 1) 合田良実: 衝撃荷重の測定について, 港湾技研資料 No. 33, 1967.
- 2) 井島武士: 海岸工学, 朝倉書店, 昭和 45 年

* 最密には位相を考慮して合成しなければならないので若干値が異なることがある。