3点プレテンションアンカーされた水中ブイの運動

本　間　　仁*・荻　原　国　宏**・江　森　坦　也***

1. はじめに

水中にプレテンションアンカーされた球の3点アンカーの場合の運動は，1点，2点アンカーの場合に異なり，波の進行方向の運動のみでなく，直角方向の運動，回転運動を考慮することが必要である。

そこで，まずアンカーロープの伸びと運動との関係をここではベクトルおよびマトリックスの扱いを利用することによって一般的な3点アンカーロープの関係式を求めた。このような扱いをすれば，アンカーの方法が複雑になっても比較的簡単に解を求め得ることがわかった。

実験では，別紙報告の本研究室で開発したモアレ縞の原理を利用した方法で，球の3次元の運動を8 mm撮影し，この関係式を用いて，球の中心の座標および回転を求めた。また，アンカーロープの張力の変動もばね装置で同時に測定した。

2. 運動を支配する条件

（1） 3点アンカーロープの拘束条件

図—1のような次元空間でのアンカーロープのなす座標関係をベクトル表示すると

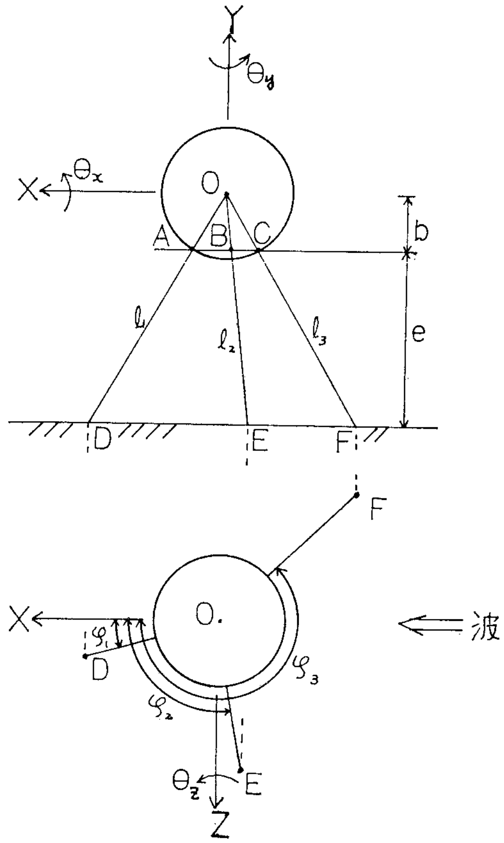
$$\left.\begin{array}{llll} \mathrm{OA}, & \boldsymbol{r}_1=(a_1,\ b_1,\ c_1) & \mathrm{AD}, & \boldsymbol{l}_1=(d_1,\ l_1,\ f_1) \\ \mathrm{OB}, & \boldsymbol{r}_2=(a_2,\ b_2,\ c_2) & \mathrm{BE}, & \boldsymbol{l}_2=(d_2,\ l_2,\ f_2) \\ \mathrm{OC}, & \boldsymbol{r}_3=(a_3,\ b_3,\ c_3) & \mathrm{CF}, & \boldsymbol{l}_3=(d_3,\ l_3,\ f_3) \end{array}\right\} \quad \cdots\cdots(1)$$

このとき

$$\left.\begin{array}{l} \boldsymbol{r}_1\cdot\boldsymbol{r}_1=\boldsymbol{r}_2\cdot\boldsymbol{r}_2=\boldsymbol{r}_3\cdot\boldsymbol{r}_3=r^2 \\ \boldsymbol{l}_1\cdot\boldsymbol{l}_1=l_1^2,\quad \boldsymbol{l}_2\cdot\boldsymbol{l}_2=l_2^2,\quad \boldsymbol{l}_3\cdot\boldsymbol{l}_3=l_3^2 \end{array}\right\} \cdots(1')$$

である。ただしこの場合は球として考えている。一般的な場合はrの条件が異なってくる。

いま球の中心が0より0′に移動し，A, B, C の各点も A′, B′, C′ に移動したとし，このとき球が，x, y, z の各軸のまわりに θ_x, θ_y, θ_z の回転をしたとする。それぞれを，次のようなベクトルと表示する。



図—1

$$\left.\begin{array}{llll} \mathrm{OO}', & \boldsymbol{x}=(x,\ y,\ z), & \mathrm{AA}', & \boldsymbol{x}_1=(x_1,\ y_1,\ z_1) \\ \mathrm{BB}', & \boldsymbol{x}_2=(x_2,\ y_2,\ z_2), & \mathrm{CC}', & \boldsymbol{x}_3=(x_3,\ y_3,\ z_3) \\ \multicolumn{4}{c}{\mathrm{O'A'}=\boldsymbol{r}_1',\ \mathrm{O'B'}=\boldsymbol{r}_2',\ \mathrm{O'C'}=\boldsymbol{r}_3'} \end{array}\right\} \cdots\cdots(2)$$

次に最初 $\boldsymbol{r}=(a,\ b,\ c)$ の位置にあったベクトルが，それぞれ軸のまわりに反時計方向に θ_x, θ_y, θ_z だけ回転したときのベクトル $\boldsymbol{r}'$ は

$$\boldsymbol{r}_i'=\begin{pmatrix} 1 & -\theta_z & \theta_y \\ \theta_z & 1 & -\theta_x \\ -\theta_y & \theta_x & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_i \\ b_i \\ c_i \end{pmatrix},\quad \boldsymbol{r}_i'=\Theta\cdot\boldsymbol{r}_i$$

$$i=1,\ 2,\ 3 \quad \cdots\cdots(3)$$

この式の最初のマトリックスを Θ で示そう。ただしこ

* 正会員　工博　東洋大学教授　工学部土木工学科
** 正会員　工博　東洋大学助教授　工学部工木工学科
*** 学生会員　　東洋大学大学院学生

の式は，それぞれの回転が微小としている。

また移動後のベクトルの関係は

$$\left.\begin{array}{l}\boldsymbol{x}+\boldsymbol{r}_i'=\boldsymbol{r}_i+\boldsymbol{x}_i\\ \boldsymbol{l}_i=\boldsymbol{x}_i+\boldsymbol{l}_i'\end{array}\right\}\quad i=1,\ 2,\ 3 \quad\cdots\cdots\cdots\cdots(4)$$

となっている。したがって各アンカー支点の移動は

$$\boldsymbol{x}_i=\boldsymbol{x}+\boldsymbol{r}_i'-\boldsymbol{r}_i=\boldsymbol{x}+\Theta\cdot\boldsymbol{r}_i-\boldsymbol{r}_i=\boldsymbol{x}+(\Theta-1)\boldsymbol{r}_i \quad\cdots\cdots\cdots\cdots(5)$$

で示せる。

この移動後の点のアンカーロープの伸びの範囲で拘束条件が加わってくる。いまロープの伸びを Δl_i で表わすと

$$\Delta l_i=|\boldsymbol{l}_i'|-|\boldsymbol{l}_i|,\ \ \boldsymbol{l}_i'\boldsymbol{l}_i'-\boldsymbol{l}_i\boldsymbol{l}_i=(l_i+\Delta l_i)^2-(l_i)^2 \quad\cdots\cdots\cdots\cdots(6)$$

である。$\boldsymbol{l}_i'$ は式 (4) より

$$\boldsymbol{l}_i'=\boldsymbol{l}_i-\boldsymbol{x}_i=\boldsymbol{l}_i-\boldsymbol{x}-(\Theta-1)\boldsymbol{r}_i=\boldsymbol{l}_i-\boldsymbol{x}-\tilde{\Theta}\cdot\boldsymbol{r}_i \quad\cdots\cdots\cdots\cdots(7)$$

ただし

$$\tilde{\Theta}=\Theta-1$$

である。したがって

$$\begin{aligned}\boldsymbol{l}_i'\cdot\boldsymbol{l}_i'&=(\boldsymbol{l}_i-\boldsymbol{x}-\tilde{\Theta}\cdot\boldsymbol{r}_i)(\boldsymbol{l}_i-\boldsymbol{x}-\tilde{\Theta}\cdot\boldsymbol{r}_i)\\&=\boldsymbol{l}_i\cdot\boldsymbol{l}_i-2\boldsymbol{l}_i\boldsymbol{x}+\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{x}-2(\boldsymbol{l}_i-\boldsymbol{x})\tilde{\Theta}\boldsymbol{r}_i\\&\quad+\tilde{\Theta}\cdot\boldsymbol{r}_i\cdot\tilde{\Theta}\cdot\boldsymbol{r}_i \quad\cdots\cdots\cdots\cdots(8)\end{aligned}$$

また球の半径は不変であるので

$$|\boldsymbol{r}_i|=|\boldsymbol{r}_i'|=r^2 \quad\text{または}\quad \boldsymbol{r}_i\cdot\boldsymbol{r}_i=\boldsymbol{r}_i'\cdot\boldsymbol{r}_i'$$

である。これは式 (3) を考えると

$$\boldsymbol{r}_i'\cdot\boldsymbol{r}_i'=\Theta\boldsymbol{r}_i\cdot\Theta\boldsymbol{r}_i=\boldsymbol{r}_i\cdot\boldsymbol{r}_i \quad\cdots\cdots\cdots\cdots(9)$$

となる。この計算をマトリックス表示して計算すると次の条件式を得る

$$(\tilde{\Theta}\cdot\boldsymbol{r}_i)\cdot(\tilde{\Theta}\cdot\boldsymbol{r}_i)=0$$

したがって式 (6) はこれからの関係を使うことによって次の式に帰着される。

$$2\boldsymbol{l}_i\Delta l=-2\boldsymbol{l}_i\boldsymbol{x}+\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{x}-2(\boldsymbol{l}_i-\boldsymbol{x})\cdot\tilde{\Theta}\boldsymbol{r}_i \qquad i=1,\ 2,\ 3 \quad\cdots\cdots\cdots\cdots(10)$$

ここでさらに $\boldsymbol{l}_i\cdot\tilde{\Theta}\cdot\boldsymbol{r}_i$ の積を考えてみる。これをマトリックス表示すれば

$$\begin{aligned}(d_i,\ e_i,\ f_i)\begin{pmatrix}0 & \theta_z & \theta_y\\ -\theta_z & 0 & \theta_x\\ \theta_y & -\theta_x & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a_i\\ b_i\\ c_i\end{pmatrix}\\=(c_il_i-b_if_i)\theta_x+(a_if_i-c_id_i)\theta_y\\+(b_id_i-a_ie)_i\theta_z \quad\cdots\cdots\cdots\cdots(11)\end{aligned}$$

となる。ここで $\boldsymbol{r}_i$ と $\boldsymbol{l}_i$ のベクトル積を考えると

$$\begin{aligned}\boldsymbol{r}_i\times\boldsymbol{l}_i=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k}\\ a_i & b_i & c_i\\ d_i & e_i & f_i\end{vmatrix}&=\boldsymbol{i}(b_if_i-c_ie_i)\\&+\boldsymbol{j}(c_id_i-a_if_i)+\boldsymbol{k}(a_ie_i-b_id_i) \quad\cdots(12)\end{aligned}$$

となる。式 (11) の $\theta_x,\ \theta_y,\ \theta_z$ の各係数は式 (12) の各係数に一致している。アンカーの状態を考えると $\boldsymbol{r}_i$ のベクトルと $\boldsymbol{l}_i$ のベクトルとは同一方向を向いているはずである。したがってベクトル積は $\boldsymbol{r}_i\times\boldsymbol{l}_i=|\boldsymbol{r}_i|\cdot|\boldsymbol{l}_i|\cdot\sin\theta$ と表わせるので，$\theta=0$ を考えると式 (11), (12) の各係数は 0 となっているはずである。したがって $\boldsymbol{l}_i\tilde{\Theta}\boldsymbol{r}_i=0$ となる。式 (10) は

$$2l_i\Delta l_i=2\boldsymbol{l}_i\cdot\boldsymbol{x}+\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{x}+2\boldsymbol{x}\cdot\tilde{\Theta}\cdot\boldsymbol{r}_i$$

この式でさらに $\boldsymbol{x}\ll\boldsymbol{l}_i$ を考えると

$$l_i\Delta l_i=-\boldsymbol{x}\boldsymbol{l}_i+\boldsymbol{x}\tilde{\Theta}\boldsymbol{r}_i \quad\cdots\cdots\cdots\cdots(13)$$

を得る。この展開式を書くと

$$\begin{aligned}l_i\Delta l_i=&-(xd_i+ye_i+zf_i)+[(c_iy-b_iz)\theta_x\\&+(a_iz-c_ix)\theta_y+(b_ix-a_iy)\theta_z]\\&i=1,\ 2,\ 3 \quad\cdots\cdots\cdots\cdots(14)\end{aligned}$$

となる。この 3 つの式が中心の移動に伴う拘束条件を与えている。この式を使用して球の中心が $(x,\ y,\ z)$ 移動したときの，球の回転 $(\theta_x,\ \theta_y,\ \theta_z)$ は式 (14) を連立してとけば良い。

すなわち

$$\left.\begin{array}{l}\boldsymbol{M}=\begin{bmatrix}b_1z-c_1y, & c_1x-a_1z, & a_1y-b_1x\\ b_2z-c_2y, & c_2x-a_2z, & a_2y-b_2x\\ b_3z-c_3y, & c_3x-a_3z, & a_3y-b_3x\end{bmatrix}\\ \boldsymbol{N}=\begin{bmatrix}l_1\Delta l_1+xd_1+ye_1+zf_1\\ l_2\Delta l_2+xd_2+ye_2+zf_2\\ l_3\Delta l_3+xd_3+ye_3+zf_3\end{bmatrix}\end{array}\right\} \quad\cdots\cdots\cdots\cdots(15)$$

とおけば

$$\begin{pmatrix}\theta_x\\ \theta_y\\ \theta_z\end{pmatrix}=\frac{1}{|\boldsymbol{M}|}\times\begin{bmatrix}|\boldsymbol{M}_1|\\ |\boldsymbol{M}_2|\\ |\boldsymbol{M}_3|\end{bmatrix} \quad\cdots\cdots\cdots\cdots(16)$$

となる。ただし $\boldsymbol{M}_1,\ \boldsymbol{M}_2,\ \boldsymbol{M}_3$ はそれぞれ $\boldsymbol{M}$ のマトリックスの第 1, 2, 3 の各列を $\boldsymbol{N}$ のマトリックスでおきかえたものである。

(2)　3 点アンカーの場合の復元力

アンカーロープのばね定数を k_i とするとき，波力 $(F_x,\ F_y,\ F_z)$ が作用したときのロープの伸びを求める式を出そう。

ロープに働く張力の増減力 ΔT_i は

$$\Delta T_i=k_i\cdot\Delta l_i \quad\cdots\cdots\cdots\cdots(17)$$

である。

図―1 のようなアンカー方法を考えると

$$\left.\begin{array}{ll}\boldsymbol{r}_i=(a_i,\ b_i,\ c_i) & \\ \boldsymbol{l}_i=(d_i,\ e_i,\ f_i) & i=1,\ 2,\ 3\end{array}\right\}\cdots\cdots\cdots\cdots(18)$$

で与えられ，さらに

$$\left.\begin{array}{l}a_i=r\cos\varphi\cdot\cos\varphi_i,\\ \quad -b_i=r\sin\varphi,\quad c_i=r\cos\varphi\cdot\sin\varphi_i\\ d_i=l\cos\varphi\cdot\cos\varphi_i,\\ \quad -e_i=l\sin\varphi,\quad f_i=l\cos\varphi\cdot\sin\varphi_i\end{array}\right\}\cdots\cdots(19)$$

で与えられる。

いま，球の中心に $(F_x,\ F_y,\ F_z)$ の波力が作用していると考えると，力のつり合いより

$$\left.\begin{array}{l}F_x=-(\sum T_i\cos\varphi_i)\cos\varphi\\ F_y=-(\sum T_i)\sin\varphi\\ F_z=-(\sum T_i\sin\varphi_i)\cos\varphi\end{array}\right\}\cdots\cdots\cdots\cdots(20)$$

T_i が ΔT_i になると F_x は ΔF_x のように示すことにする。

球の中心が x 方向のみに移動したときの各ロープの変化は式 (14) より

$$l_i\Delta l_i=-xd_i$$

となる。いまロープ長は等しい場合を考えているので式 (19) の結果を使うと

$$\Delta l_i=-x\cos\varphi\cdot\cos\varphi_i\cdots\cdots\cdots\cdots(21)$$

したがって ΔT_i は式 (17) より

$$\Delta T_i=-k_ix\cos\varphi\cos\varphi_i$$

を得る。これを式 (20) に代入すると

$$\left.\begin{array}{l}\Delta F_x=(\sum\Delta T_i\cos\varphi_i)\cos\varphi\\ \qquad =x\cos^2\varphi\cdot\sum k_i\cos^2\varphi_i\\ \Delta F_y=x\cos\varphi\cdot\sin\varphi\sum k_i\cdot\cos\varphi_i\\ \Delta F_z=x\cos^2\varphi\sum k_i\cos\varphi\cdot\sin\varphi_i\end{array}\right\}\cdots(22)$$

を得る。したがって水平方向のばね定数 k_x は

$$k_x=\frac{\Delta F_x}{x}=\cos^2\varphi\sum k_i\cos^2\varphi_i\quad\cdots\cdots\cdots\cdots(23)$$

を得る。ここで注目すべきは $\Delta F_y,\ \Delta F_z$ も生じてくることである。以下同様な扱いにより $k_y,\ k_z$ は

$$k_y=3k\sin^2\varphi\quad\cdots\cdots\cdots\cdots(24)$$

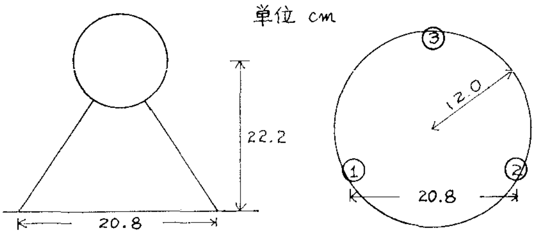
$$k_z=k\cos^2\varphi\sum\sin^2\varphi_i\quad\cdots\cdots\cdots\cdots(25)$$

を得る。これらの関係式を使うことによって球の移動より，波力を推定することができる。

3. 模型実験

(1) 実験条件

直径 3.75 cm，重量 2.6 g の球を，3点のプレテンションアンカーするために，**図—2** のごとく支間 20.8 cm の間隔で固定した，このときの水深は 35.0 cm であった。

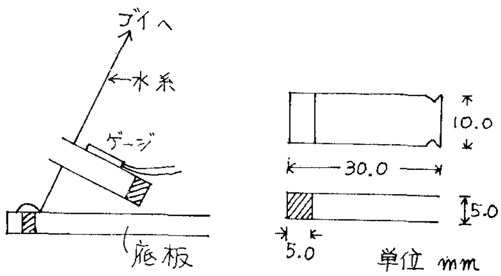


図—2

波の条件は波高 4.5～11.0 cm の間で周期 0.7～1.6 秒のものを 6 case 考慮した。

(2) 張力の測定

張力の測定は，この実験のために考慮した，**図—3** のような板ばねの装置を利用した。この板ばねにストレインゲージをはりつけて，この変位より張力の測定をする



図—3

ことにした。この際キャリブレーションは球の浮力を利用して行った。

(3) 球体の運動の測定

球を白くぬり，表面にマーカーを3点つけ，8ミリ撮影し，モアレ縞の原理を利用した方法で，マーカーの空間座標を決定した。

このマーカーの座標より，球の中心の移動および回転を求めた。その方法を以下に述べる。

この関係はちょうどアンカーロープの支点の移動と球の中心の移動，回転に同じである。したがって式 (5) と同様な式で与えられる。

いまマーカーをとりつけたときのベクトル $\boldsymbol{r}_i=(a_i,\ b_i,\ c_i)$ がわかっており，さらに，移動後の A′, B′, C′ 点の O に関するベクトル OB′, OC′, OA′ がモアレ縞の原理より求まることになる。このベクトルを $\tilde{\boldsymbol{r}}_i=(\tilde{a}_i,\ \tilde{b}_i,\ \tilde{c}_i)$ とする。

これらには

$$\mathrm{OB'}=\mathrm{OB}+\mathrm{BB'},\quad \tilde{\boldsymbol{r}}_i=\boldsymbol{r}_i+\boldsymbol{x}_i\quad\cdots\cdots\cdots\cdots(26)$$

また $\boldsymbol{x}_i$ は式 (4) より

$$\boldsymbol{x}_i=\boldsymbol{x}+\boldsymbol{r}_i'-\boldsymbol{r}_i$$

$$\therefore\quad \tilde{\boldsymbol{r}}_i=\boldsymbol{x}+\boldsymbol{r}_i'\quad\cdots\cdots\cdots\cdots(27)$$

となる。$\boldsymbol{r}_i'=\Theta\boldsymbol{r}_i$ を考えて，これをマトリックス表示す

れば，

$$
\begin{pmatrix}\tilde{a}_i\\ \tilde{b}_i\\ \tilde{c}_i\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1 & -\theta_z & \theta_y\\ \theta_z & 1 & -\theta_x\\ -\theta_y & \theta_x & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a_i\\ b_i\\ c_i\end{pmatrix} \quad\cdots\cdots(28)
$$

この式の中で a_i, b_i, c_i, $\tilde{a}_i$, $\tilde{b}_i$, $\tilde{c}_i$ は既知であり，x, y, z, θ_x, θ_y, θ_z が未知である。したがって式 (28) の連立方程式をとけばよいことになる。

式 (28) を書きなおすと

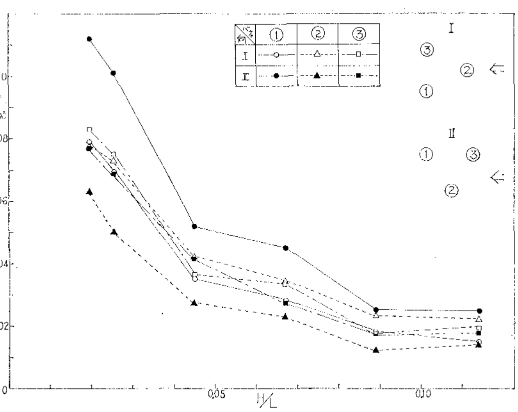
$$
\left.\begin{array}{llll}
x & & \theta_y c_i-\theta_z b_i & =\tilde{a}_i-a_i\\
& y & -\theta_x c_i \quad \theta_z a_i & =\tilde{b}_i-b_i\\
& z & \theta_x b_i-\theta_y a_i & =\tilde{c}_i-c_i
\end{array}\right\}\cdots(29)
$$

未知数が 6 個であるので，i は 2 点あれば式 (29) を使うことによって求めることができる。本実験では 3 点のマーカーをつけて，マーカーの組合わせによって，3 回 x, y, z, θ_x, θ_y, θ_z を求めて，3 回平均値を求めた。

この球の中心の座標および回転変形を 8 mm フィルムの各コマごとに求め，時間の経過との関係を求めた。

(4) 実験結果

張力の測定結果を **図—4** に示してある。このグラフは

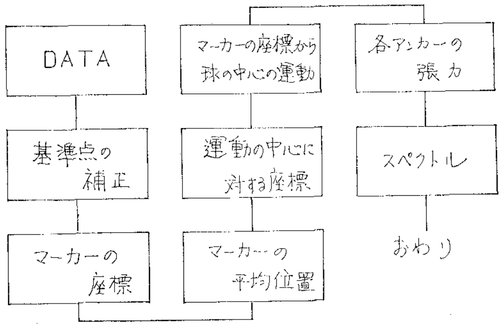


図—4

波形勾配と張力を角周波数 σ の自乗と，波高 H で割ったものとの関係で示してある。I, II はグラフの中に示してあるごとく波の進入方向に対するアンカーの向きを示している。I 型については，3 点にあまり差がなく，II 型では①が卓越している。

球の運動の測定は，モアレ縞の原理を利用し，球の表面につけたマーカーの座標を求め，式 (29) に代入し，球の中心での移動および回転を求めた。さらに，あらかじめ求めておいたバネ定数と式 (14), (17) を用いて，張力を求めた。

この作業を 8 mm フィルムの各コマごとに行い，時間の経過との関係を求め，それをフーリエ級数に展開し，各係数を求め，各周期成分の振幅を求めた。この計算を

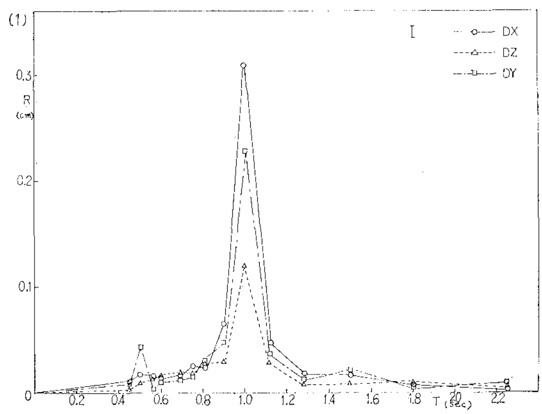


図—5

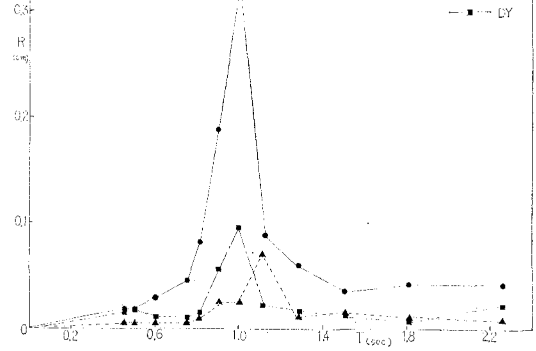
電算機で行った。この作業図を **図—5** に示す。

周期と振幅の関係を **図—6** に示す。これは，波が周期 1.05 秒，波高 10.5 cm の場合である。移動はこの図では I, II の差がないが，全体としては I が大きくなっている。回転は全体に相当 I が大きくなっている。張力も同様である。

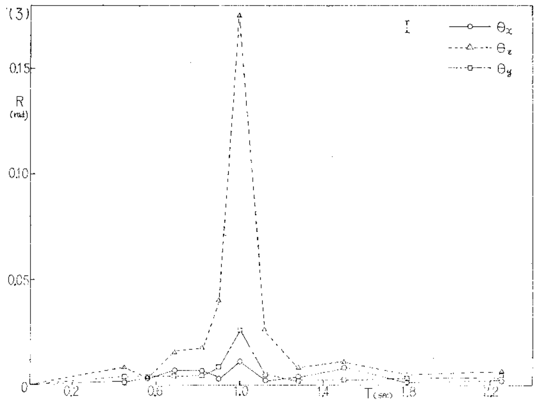
張力の測定値と計算値を比較すると，計算値が相当大きくなったが，これは計算に用いた，φ, φ_i が静止状態



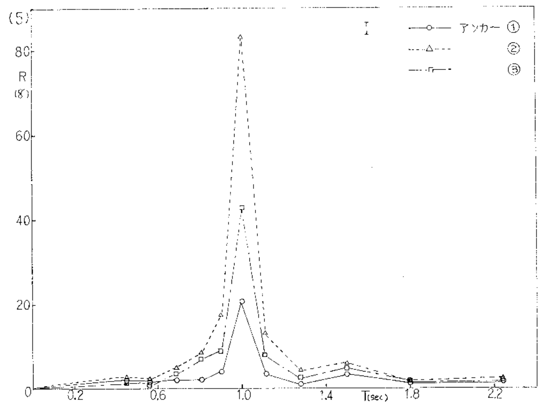
図—6 (1)



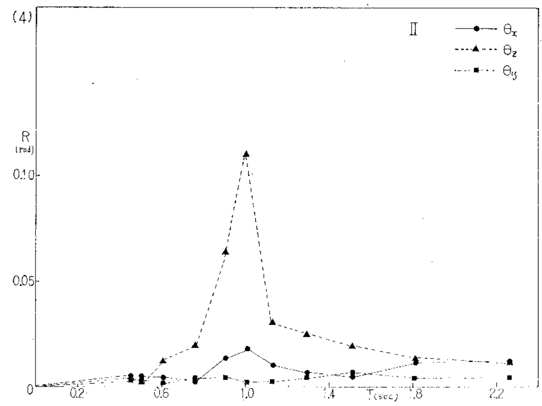
図—6 (2)



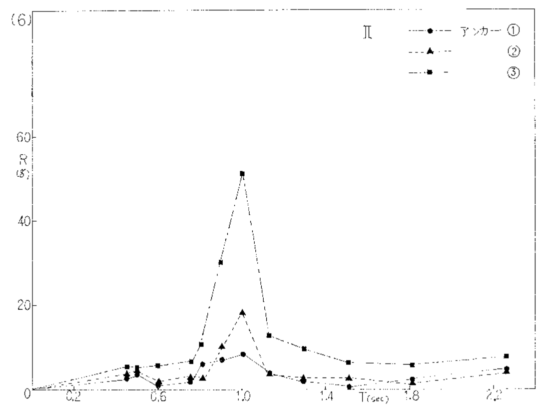
図—6（3）



図—6（5）



図—6（4）



図—6（6）

のものであり，また実際の運動は，ある程度，球が流された点での振動であるからではないかと思われる。

4. おわりに

モアレ縞を利用した運動の測定方法についてのデーター整理は，資料が非常に多く，コンピューター処理をするにしても，相当時間がかかるが，さらに追加実験を行い，完全なものとしたい。

参考文献

1) 荻原国宏・江森坦也：プレテンションアンカーされた海洋構造物の運動について，東洋大学工学部研究報告，昭 49 年.