

矩形断面浮体の波浪動揺に関する逐次計算

木 原 力*

1. 緒 言

矩形断面浮体の波浪による動揺を理論的に取扱うには、一般に速度ポテンシャルを用いた境界値問題として、浮体運動の振幅を解析的に求める手法がとられる^{1),2)}。こうした解法では、微小振幅波のもとでの浮体往復運動の定常解が求められるため、進行波においても浮体の漂流は計算し得ない。一方、スーパータンカーのドルフィンに働く衝撃力についての永井ら³⁾の実験では、船体には水平往復運動に加え、漂流が生じることを示している。伊藤⁴⁾は矩形断面浮体を対象とし、浮体の水平・鉛直・回転各運動を時間的に逐次求める逐次計算式を示しているが、本論文に述べる計算法はその誘導仮定において伊藤の方法と若干異なる。

本論文では、まず逐次計算式を誘導し、次いで浮体変位および波の高まりを考慮した計算を行うことにより、微小振幅進行波のもとでの自由浮体の運動に漂流が生じることを明らかにする。また、矩形自由浮体に対する実験値を逐次理論および速度ポテンシャル理論による計算値と比較することにより、理論値の妥当性について検討する。

2. 式 の 誘 導

(1) 基本方程式

高次の項を無視した波の運動および連続式は次のようにある。

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} \quad (1)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \quad (2)$$

ここで、簡単のため伊藤・千葉にならって浮体周辺の減衰的定常波を無視した近似解法を取り入れ、浮体外の圧力および流速の鉛直分布を次のようにおく。

$$p(z) = \rho g \eta_A \frac{\cosh k(h+z)}{\cosh kh} \quad (3)$$

$$u(z) = u_s \frac{\cosh k(h+z)}{\cosh kh} \quad (4)$$

ただし、

η : 静水面から測った水位（鉛直上方正）

u_s : $z=0$ における水平流速

k : $2\pi/L$ L : 波長

式(1)～(4)および波の表面条件を考慮すると、浮体外の水位・流速を表わす基本式として伊藤・谷本⁵⁾が与えた次式を得る。

$$\frac{\partial u_s}{\partial t} = -g \frac{\partial \eta}{\partial x} \quad (5)$$

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} = -\frac{\tanh kh}{k} \frac{\partial u_s}{\partial x} \quad (6)$$

(2) 浮体に作用する圧力および回転モーメント

図-1 に示す座標

系において波による水位上昇および浮体変位を考慮し、浮体に作用する水位合力および浮体重心の回りの回転モーメントを求める

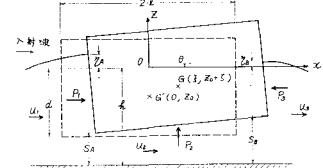


図-1 座標および浮体変位

$$P_1 = \rho g \eta_A \int_{-(h-s_A)}^{\eta_A} \frac{\cosh k(h+z)}{\cosh kh} dz \quad (7)$$

$$P_3 = \rho g \eta_B \int_{-(h-s_B)}^{\eta_B} \frac{\cosh k(h+z)}{\cosh kh} dz \quad (8)$$

$$MP_1 = \rho g \eta_A \int_{-(h-s_A)}^{\eta_A} (z - z_0 - \zeta) \frac{\cosh k(h+z)}{\cosh kh} dz \quad (9)$$

$$= \rho g \eta_A d l \cdot f_{MH}^{(A)} \quad (9)$$

$$MP_3 = \rho g \eta_B d l \cdot f_{MH}^{(B)} \quad (10)$$

ただし、

$$s_A = h - d + \zeta - l\theta, \quad s_B = h - d + \zeta + l\theta$$

$$f_H^{(A)} = \frac{\sinh k(h+\eta_A) - \sinh ks_A}{k(\eta_A + h - s_A) \cosh kh}$$

$$f_{MH}^{(A)} = \frac{1}{k d k l \cosh kh} \left\{ k(\eta_A - z_0 - \zeta) \right. \\ \times \sinh k(h+\eta_A) - \cosh k(h+\eta_A) \\ \left. + k(h+z_0 + \zeta - s_A) \sinh ks_A \right. \\ \left. + \cosh ks_A \right\} \quad (11)$$

$f_H^{(B)}$, $f_{MH}^{(B)}$ については $\eta_A \rightarrow \eta_B$, $s_A \rightarrow s_B$ に置き換えればよい。

次に揚圧力 P_2 および揚圧力モーメント MP_2 を算出する。まず、浮体下の余裕水深 $s(x)$ は

$$s(x) = h - d + \zeta + \theta(x - \xi) \quad \dots \dots \dots (12)$$

で表わされる。浮体の鉛直速度 V は式(12)より

$$V = ds/dt = \dot{\zeta} + \theta(x - \xi) - \theta\dot{\xi} \quad \dots \dots \dots (13)$$

また、浮体下部の断面内平均鉛直流速 \bar{w} は、浮体底面で V 、海底で 0 なる条件から

$$\frac{\partial \bar{w}}{\partial z} = \frac{V}{s} = \frac{\dot{\zeta} + \theta(x - \xi) - \theta\dot{\xi}}{h - d + \zeta + \theta(x - \xi)} \quad \dots \dots \dots (14)$$

となる。浮体下部の断面内平均水平流速 $\bar{u}_2(x)$ は θ を微小と仮定すると式(2)より

$$\begin{aligned} \bar{u}_2(x) &= - \int \frac{\partial \bar{w}}{\partial z} dx = - \frac{1}{h - d + \zeta} \\ &\times \left[\frac{\dot{\theta}}{2}(x - \xi)^2 + \dot{\zeta}(x - \xi) + \lambda \right] \end{aligned} \quad \dots \dots \dots (15)$$

で表わされる。よって、式(1)より浮体下部の断面内平均圧力強度 $\bar{p}_2(x)$ は

$$\begin{aligned} \frac{\bar{p}_2(x)}{\rho} &= - \int \frac{\partial \bar{u}_2(X)}{\partial t} dX \\ &= f_{11}(X) \cdot \ddot{\theta} + f_{12}(X) \cdot \ddot{\zeta} + f_{13}(X) \cdot \dot{\lambda} \\ &\quad + f_{14}(X) + C_1 \end{aligned} \quad \dots \dots \dots (16)$$

ただし、

$$\begin{aligned} \lambda, C_1: \text{定数}, b &= h - d + \zeta \\ X &= x - \xi, f_{11}(X) = \int \frac{X^2}{2b} dX \\ f_{12}(X) &= \int \frac{X}{b} dX, f_{13}(X) = \int \frac{1}{b} dX \\ f_{14}(X) &= - \int \frac{1}{b^2} \left\{ b(\theta\dot{\xi}X + \dot{\zeta}\xi) \right. \\ &\quad \left. + \dot{\zeta} \left(\frac{\dot{\theta}X^2}{2} + \dot{\zeta}X + \lambda \right) \right\} dX \end{aligned} \quad \dots \dots \dots (17)$$

ここで、浮体外および浮体下部の圧力の連続性から、

$$\begin{aligned} g f_B^{(A)} \eta_A &= f_{11}(-l) \cdot \ddot{\theta} + f_{12}(-l) \cdot \ddot{\zeta} \\ &\quad + f_{13}(-l) \cdot \dot{\lambda} + f_{14}(-l) + C_1 \\ g f_B^{(B)} \eta_B &= f_{11}(l) \cdot \ddot{\theta} + f_{12}(l) \cdot \ddot{\zeta} \\ &\quad + f_{13}(l) \cdot \dot{\lambda} + f_{14}(l) + C_1 \end{aligned} \quad \dots \dots \dots (18)$$

が成立し、積分定数 C_1 は

$$\begin{aligned} C_1 &= g f_B^{(A)} \eta_A - f_{11}(-l) \cdot \ddot{\theta} - f_{12}(-l) \cdot \ddot{\zeta} \\ &\quad - f_{13}(-l) \cdot \dot{\lambda} - f_{14}(-l) \end{aligned} \quad \dots \dots \dots (19)$$

となる。ただし

$$\begin{aligned} f_B^{(A)} &= \frac{1}{s_A} \int_{-h}^{-(h-s_A)} \frac{\cosh k(h+z)}{\cosh kh} dz \\ &= \sinh ks_A / ks_A \cosh kh \end{aligned} \quad \dots \dots \dots (20)$$

$f_B^{(B)}$ については $\eta_A \rightarrow \eta_B$, $s_A \rightarrow s_B$ とおけばよい。浮体底面に作用する圧力として、近似的に式(16)の平均圧力をとると、合力は底幅にわたって式(16)を積分することにより、

$$P_2/\rho = g_{21} \cdot \ddot{\theta} + g_{22} \cdot \ddot{\zeta} + g_{23} \cdot \dot{\lambda} + g_{24} + 2g l f_B^{(A)} \eta_A \quad \dots \dots \dots (21)$$

$$\left. \begin{aligned} g_{2j} &= f_{2j}(l) - f_{2j}(-l) - 2l \cdot f_{1j}(-l) \\ f_{2j}(X) &= \int f_{1j}(X) dX \quad (j=1 \sim 4) \end{aligned} \right\} \quad \dots \dots \dots (22)$$

で与えられる。

また、揚圧力による回転モーメントは

$$\begin{aligned} \frac{MP_2}{\rho} &= \int_{\xi-l}^{\xi+l} (x - \xi) \frac{\bar{p}_2(x)}{\rho} dx \\ &= g_{31} \cdot \ddot{\theta} + g_{32} \cdot \ddot{\zeta} + g_{33} \cdot \dot{\lambda} + g_{34} \end{aligned} \quad \dots \dots \dots (23)$$

ただし

$$\left. \begin{aligned} g_{3j} &= f_{3j}(l) - f_{3j}(-l) \\ f_{3j}(X) &= \int X \cdot f_{1j}(X) dX \quad (j=1 \sim 4) \end{aligned} \right\} \quad \dots \dots \dots (24)$$

となる。

(3) 浮体の運動方程式

浮体の水平・鉛直・回転の各運動方程式は

$$\left. \begin{aligned} M\xi &= P_1 - P_3 + R_H \\ M\zeta &= P_2 - 2\rho g l \zeta + R_V \\ I\ddot{\theta} &= MP_1 + MP_2 + MP_3 - 2\rho g d l \bar{G} \bar{M} \cdot \theta + R_M \end{aligned} \right\} \quad \dots \dots \dots (25)$$

ここに

$$M: \text{浮体の質量} (=2\rho l d)$$

$$I: \text{重心の回りの慣性モーメント}$$

$$\bar{G} \bar{M}: \text{メタセンター高} (=l^2/3d - d/2 - z_0)$$

$$R: \text{浮体に作用する拘束力}$$

いま、拘束力のない自由浮体を考えると、式(25)において R_H , R_V , R_M を 0 と置き、かつ、上式で導かれた水平・揚圧力およびそれらによる回転モーメントを同式に代入して整理すると以下の諸式を得る。

$$\ddot{\xi} = \frac{\rho g}{M} (\eta_A(\gamma_A + h - s_A) \cdot f_H^{(A)} - \eta_B(\gamma_B + h - s_B) \cdot f_H^{(B)}) \quad \dots \dots \dots (26)$$

$$\begin{aligned} \ddot{\zeta} &+ (\ddot{g}_{21} - M/\rho) \ddot{\zeta} + g_{23} \cdot \dot{\lambda} \\ &= -g_{24} - 2g l f_H^{(A)} \eta_A + 2g l \zeta \end{aligned} \quad \dots \dots \dots (27)$$

$$\begin{aligned} (\ddot{g}_{31} - I/\rho) \ddot{\theta} &+ g_{32} \cdot \ddot{\zeta} + g_{33} \cdot \dot{\lambda} \\ &= -g_{34} + g d l (\eta_A \cdot f_{M_H}^{(A)} - \eta_B \cdot f_{M_H}^{(B)}) + 2g d l \bar{G} \bar{M} \cdot \theta \end{aligned} \quad \dots \dots \dots (28)$$

また、式(18)より

$$f_{11} \cdot \ddot{\theta} + f_{12} \cdot \ddot{\zeta} + g_{13} \cdot \dot{\lambda} = -g_{14} + g (f_B^{(B)} \eta_B - f_B^{(A)} \eta_A) \quad \dots \dots \dots (29)$$

$$g_{1j} = f_{1j}(l) - f_{1j}(-l) \quad (j=1 \sim 4) \quad \dots \dots \dots (30)$$

式(26)より $\ddot{\xi}$ が、式(27)～(30)より $\ddot{\theta}$, $\ddot{\zeta}$, $\ddot{\lambda}$ がそれぞれ

$$\ddot{\xi}, \ddot{\theta}, \ddot{\zeta}, \ddot{\lambda} = F(\theta, \dot{\theta}, \zeta, \dot{\zeta}, \xi, \dot{\xi}, \lambda, \eta_A, \eta_B) \quad \dots \dots \dots (31)$$

の関数として求まる。表-1 は $\ddot{\theta}$, $\ddot{\zeta}$, $\ddot{\lambda}$ を解くための連立方程式の係数である。

浮体前後の水位 η_A , η_B の時間的な変動が与えられれば式(31)を数値積分することにより、浮体運動を時間的に逐次求めることができる。ここで、浮体前後の水位は

となる。式(38)を波の一周期間にわたって時間的に積分した値が正となれば、浮体は波の進行方向に移動（すなわち漂流）を生じることになる。

いま、簡単のため浮体前後の水位および浮体の鉛直・回転運動が時間に関し正弦的に変動するものと仮定し、浮体前後の水位差および浮体の鉛直変位を次のように置く。

$$\left. \begin{aligned} \eta_A - \eta_B &= \eta^* \sin 2\pi t/T \\ \zeta &= \zeta^* \sin (2\pi t/T + \epsilon) \end{aligned} \right\} \quad \dots \dots \dots \quad (39)$$

式(39)を(38)に代入し積分すると、右辺第1項は、

$$\eta^* \int_0^T \sin \frac{2\pi t}{T} dt = 0 \quad \dots \dots \dots \quad (40)$$

となり、浮体に漂流力を生ぜしめない。第2項は、

$$\begin{aligned} -k\eta^*\zeta^* \int_0^T \sin \frac{2\pi t}{T} \sin (2\pi t/T + \epsilon) dt \\ = -k\eta^*\zeta^*\pi \cos \epsilon \end{aligned} \quad \dots \dots \dots \quad (41)$$

なる関係式より、 $\pi/2 < \epsilon < 3\pi/2$ の範囲で正となり、 $\epsilon = \pi$ のとき最大値をとる。すなわち、浮体前後の水位差、(前面の水位)-(後面の水位)、が最大となるとき、浮体が鉛直下方に変位していれば浮体は漂流を生じる。式(38)の右辺第3項についても同様な計算を施すことにより、浮体前後の水位の和が最大となるとき浮体が回転の正(反時計)方向に変位していれば漂流を生じることになる。

図-3(a), (b) は入射波周期 2 秒の波のもとでの実験および計算値における浮体各運動の時間的変動をそれぞれ示したものである。計算値には浮体前後の時間的な水位変動をも示しているが、この図からもわかるように、水位差が最大のとき浮体は鉛直下方に最も変位しており、水位の和が最大となる時刻の近傍で回転変位(正)が最大となっている。なお、浮体運動の振幅および各運

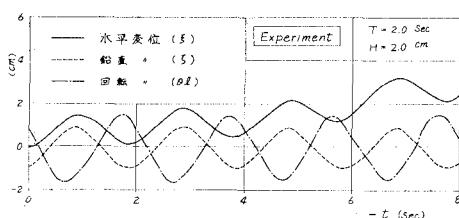


図-3(a) 浮体各運動の時間的変動(実験値)

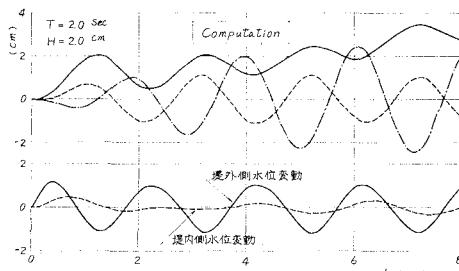


図-3(b) 浮体各運動の時間的変動(計算値)

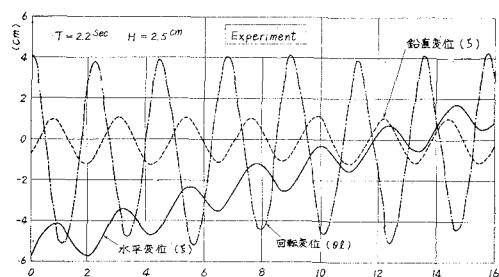


図-4(a) 浮体各運動の時間的変動(実験値)

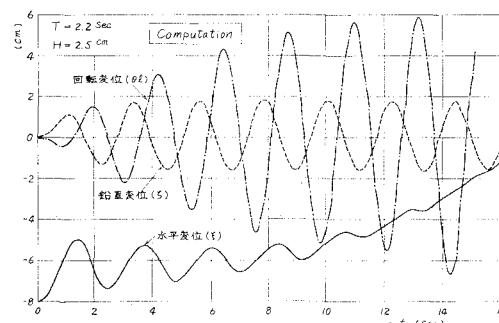


図-4(b) 浮体各運動の時間的変動(計算値)

動間の位相の関係については、実験および計算値の間で類似している。

図-4(a), (b) は周期 2.2 秒の波のもとでの浮体運動を示したものである。このケースにおいては、実験および計算値の間で水位および回転振幅の大きさのみならず、各運動間の位相の関係も異なっている。

浮体の漂流による変位について実験値と計算値を比較すると、一般に、計算値は永井³⁾が指摘しているように時間 t の 2 乗に比例して増大する傾向が見られたが、実験では必ずしもこの傾向は現われなかった。この主な原因として、計算においては慣性項や損失等を無視した近似的取扱いを施していること、また、実験では水路末端側壁からの反射の影響があるが、計算ではこれを無視していること等が考えられる。

このうち、後者について反射の影響を考慮した計算を行ったところ、特に入射波周期が長いケースでは漂流による浮体変位がかなり変わり得る結果が得られた。なお、計算結果については文献 6) を参照されたい。

(3) 浮体動搖振幅

図-5 は横軸に入射波周期、縦軸に入射波半波高 a に対する水平、鉛直、回転各往復運動の半振幅の比をとり、実験と計算値を比較したものである。ただし、計算値として、速度ボテンシャルを用いた厳密理論および近似理論による解析解もあわせ示してある。

実験値と解析解をも含めた計算値を比較すると、一般に $2.2 \leq T \leq 2.5$ 秒の間で両者の隔たりが大きい。この間の入射波周期は浮体の回転固有周期にほぼ一致してお

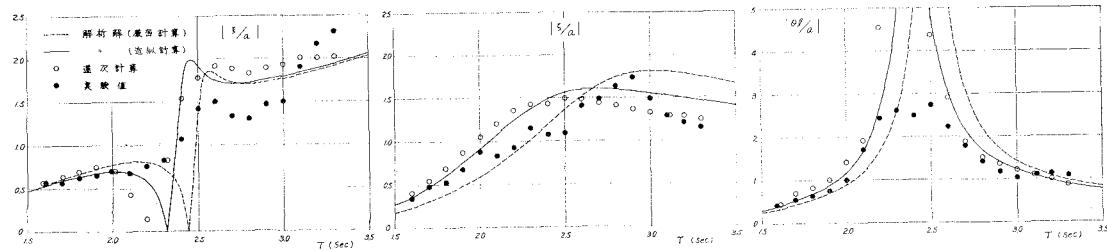


図-5 浮体動揺振幅の比較

り、実験と計算値のこの相異は、計算式を導く際に浮体の回転が小さいと仮定していること、および慣性項、損失項等を無視していることなどに起因するものと思われる。

5. 結 語

矩形断面自由浮体の波浪動揺に関する計算値を実験値と比較することにより以下のようなことが明らかとなつた。

(1) 波による水面変動および浮体変位を考慮した逐次計算を行うことにより、漂流まで含めた浮体運動が計算できる。

(2) 浮体の回転振幅が大きい入射波周期のもとでは、浮体運動の振幅についての計算値は実験値とかなり異なる。これは、理論において浮体の回転振幅を微小と仮定していることや、慣性項、損失抵抗等を無視していることに起因するものと思われ、これらを含めて理論をより精密化する必要がある。

なお、本論文では自由浮体を対象として計算を行ったが、繫留浮体の波浪動揺の問題に対しても逐次計算式を用いて適当な拘束力を与えることにより簡単に計算でき

ることを付記しておく。

謝 辞: 本研究は筆者が運輸省港湾技術研究所在職中に行ったもので、その詳細については、同研究所報告⁶⁾を参照されたい。なお、実験の遂行に当って、同所水工部 藤技官の協力を得た。ここに記して感謝の意を表します。

参 考 文 献

- 1) 中鳥武士ほか: 矩形断面を持つ浮体の浅海波による自由運動—1. 理論—, 第18回海岸工学講演会論文集, 1971.
- 2) 伊藤喜行・千葉繁: 浮防波堤の水理に関する近似理論と応用, 港湾技術研究所報告, 第11巻, 第2号, 1972.
- 3) 永井莊七郎ほか: 横波を受けるスーパータンカーのdrifting, swaying およびrollingによってドルフィンに働く衝撃力に関する研究, 第16回海岸工学講演会論文集, 1969.
- 4) 伊藤喜行: 浮防波堤の水理, 昭和47年度港湾技術研究所講演会講演概要, 1972.
- 5) 伊藤喜行・谷本勝利: 数値波動解析法とその応用—構造物周辺の波—, 第18回海岸工学講演会論文集, 1971.
- 6) 木原 力・藤 正彦: 矩形断面浮体の波浪動揺に関する研究, 港湾技術研究所報告, 第14巻, 第2号, 1975.