

不規則波浪の周期の確率特性に関する研究

岩 垣 雄 一*・木 村 晃**

1. 緒 言

不規則波浪の波別解析法¹⁾は、不規則波の連続記録を一波ずつ切り離して取り扱う方法であるが、それには、次に示す3つの方法、1) maximum water level 法、2) crest to trough 法および 3) zero up cross 法がある。特に、このうちで従来より標準的なものとして用いられているのは zero up cross 法である。そしてこの方法により求められる不規則波浪の波高の確率分布はいずれの場合にも Rayleigh 分布にかなりよく従うことが経験的にも明らかにされている。しかしながら、同じ方法で求められる周期の確率分布に関する研究は非常に少なく、まだその一般的な特性については十分な検討が行われるまでには至っていない。一方、不規則波浪の有義波高や有義周期の概念が Sverdrup と Munk²⁾ によって提唱されて以来、海岸構造物の設計等にもばら利用されている。このうち、有義周期は波高との対応において決定されるものであり、周期の確率分布には直接関係しない。このため、周期の確率的な意義が不明確となり、設計条件が必ずしも十分な安全性を見込んだものとなっていない可能性がある。設計波の決定方法が適切で、種々の特性をもつ現地波浪の作用に対して、海岸構造物の十分な安全性を期するためには、最終的に不規則波浪の波高と周期の結合確率分布を明らかにする必要がある。しかし、現状においては前述のように周期の確率分布がまだ十分明確にされていない。したがって、まずこの点に関する十分な検討が必要であると考えられる。Bretschneider³⁾ は波長の確率分布が Rayleigh 分布をするという仮定のもとに、周期の確率分布として T²-Rayleigh 分布を提案した。しかし、この確率分布に対して、まだ十分な検討が行われてはいない。合田ら^{4),5)} は、風波に対してはこの分布がかなり成立するが、うねりと風波が重畳したような場合にはこの分布を適用することができないことを示した。一方、著者ら⁶⁾ はシミュレーション実験の結果をもとに検討して、スペクトル形状が風波のそれと相似の場合でも、T²-Rayleigh 分布は一般的な適用

性はなく、かなり異なった分布形状をもつことを見いだした。このことより、著者ら⁷⁾ は、より一般的な確率分布である Weibull 分布の適用を試みた。その結果、不規則波浪のスペクトル形がなめらかで、単一のピークをもつ場合には、いずれも Weibull 分布と非常によく一致することがわかった。

この研究は、Weibull 分布をもとにして種々の統計量を導き、実験結果と比較して、周期の確率分布に対する Weibull 分布の適用性を詳細に検討したものである。ここで用いた実験値は、著者らが先に開発したシミュレーションシステム⁸⁾ を利用し、実験水槽中に発生させた不規則波浪を解析して得たものである。期待スペクトルとしては、Pierson-Moskowitz スペクトルを選び、水深とピーク周波数を変化させ、35 ケースにわたる実験を行って解析に用いた。

2. Weibull 分布

Weibull の確率密度関数 $P(T)$ は一般的に次式で与えられる。

$$P(T)dT = A \cdot m \cdot \left(\frac{T}{T_r}\right)^{m-1} \exp\left\{-A\left(\frac{T}{T_r}\right)^m\right\} \times \frac{dT}{T_r}, \quad T \geq 0 \quad \dots\dots\dots(1)$$

ここで、 A は定数、 m および T_r はそれぞれこの確率分布の形状母数および root mean square である。この確率分布の原点に関する n 次のモーメント M_n は、

$$M_n = \int_0^\infty T^n A m \left(\frac{T}{T_r}\right)^{m-1} \times \exp\left\{-A\left(\frac{T}{T_r}\right)^m\right\} \frac{dT}{T_r} \quad \dots\dots(2)$$

とあらわされる。いま、 $A\left(\frac{T}{T_r}\right)^m = z$ とおくと、式(2)は

$$M_n = \int_0^\infty A^{-n/m} T_r^n z^{n/m} e^{-z} dz = A^{-n/m} T_r^n \Gamma\left(\frac{m+n}{m}\right) \quad \dots\dots\dots(3)$$

となる。ここに Γ はガンマ関数であることを示す。い

* 正員 工博 京都大学教授 工学部土木工学教室
 ** 正員 工修 京都大学助手 工学部土木工学教室

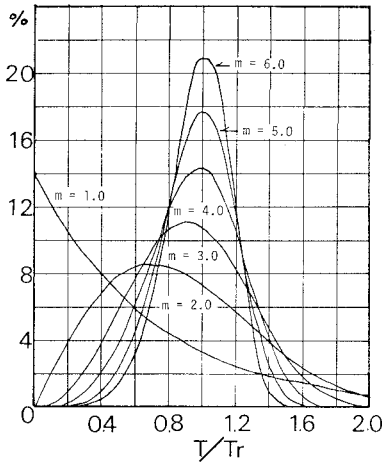


図-1 Weibull 分布

ま、 T_r^2 は M_2 に等しいことより、

$$A = \Gamma\left(\frac{m+2}{m}\right)^{m/2} \dots\dots\dots (4)$$

となり、式(3)は最終的に次のように示される。

$$\text{skewness: } T_s = \frac{\Gamma\left(\frac{m+3}{m}\right) - 3\Gamma\left(\frac{m+1}{m}\right)\Gamma\left(\frac{m+2}{m}\right) + 2\Gamma\left(\frac{m+1}{m}\right)^3}{\left\{\Gamma\left(\frac{m+2}{m}\right) - \Gamma\left(\frac{m+1}{m}\right)^2\right\}^{3/2}} \dots\dots\dots (8)$$

$$\text{kurtosis: } T_k = \frac{\Gamma\left(\frac{m+4}{m}\right) - 4\Gamma\left(\frac{m+1}{m}\right)\Gamma\left(\frac{m+3}{m}\right) + 6\Gamma\left(\frac{m+1}{m}\right)^2\Gamma\left(\frac{m+2}{m}\right) - 3\Gamma\left(\frac{m+1}{m}\right)^4}{\left\{\Gamma\left(\frac{m+2}{m}\right) - \Gamma\left(\frac{m+1}{m}\right)^2\right\}^2} \dots\dots\dots (9)$$

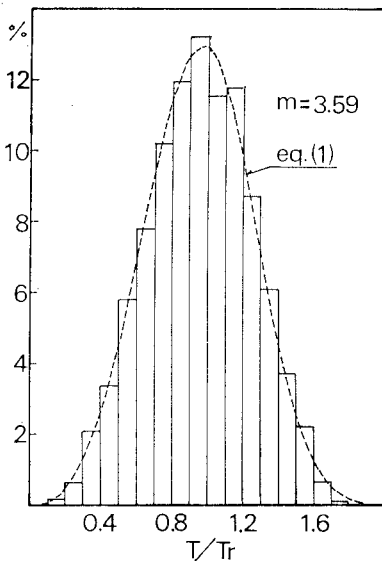


図-2 Weibull 分布の実験値の対応

$$M_n = T_r^n \Gamma\left(\frac{m+n}{m}\right) \Gamma\left(\frac{m+2}{m}\right)^{-n/2} \dots\dots\dots (5)$$

以上の各式より明らかなように、式(1)は m と T_r によりその形が決定され、さらに T_r を用いて式を正規化すれば、 m のみにより決定される。図-1 は m を変化させた場合の、式(1)の形状変化を示したもので、 $m=1$ の場合が指数分布、 $m=2$ の場合が Rayleigh 分布、 $m=4$ の場合が Bretschneider の提案した T^2 -Rayleigh 分布となる。図より、 m の値が大きくなるにつれて、しだいに急峻な分布形状をもつようになることがわかる。図-2 は実験結果の1例を示したものであり、図には実験値をもとに最小2乗法により m の値を決定し、式(1)を計算した結果もあわせて示した。図より、両者は非常によく一致していることがわかる。その他、式(1)に基づく代表的なモーメントを示すと、

$$\text{mode: } T_{\text{mode}} = \left(\frac{m-1}{m}\right)^{1/m} \Gamma\left(\frac{m+2}{m}\right)^{-1/2} T_r \dots (6)$$

$$\text{標準偏差: } T_\sigma = \Gamma\left(\frac{m+2}{m}\right)^{-1/2} \times \left\{ \Gamma\left(\frac{m+2}{m}\right) - \Gamma\left(\frac{m+1}{m}\right)^2 \right\}^{1/2} T_r \quad (7)$$

のようになる。

3. Weibull 分布の超過確率

周期 T がある値 T_0 を超える確率 $\phi(T_0)$ は次式で示される。

$$\phi(T_0) = \int_{T_0}^{\infty} P(T) dT = \exp\left\{-A\left(\frac{T_0}{T_r}\right)^m\right\} \dots\dots\dots (10)$$

ここで、 $\phi(T_0)$ を ρ とおくと、

$$\rho = \exp\left\{-A\left(\frac{T_0}{T_r}\right)^m\right\}, \quad \frac{T_0}{T_r} = (\ln \rho^{-A})^{1/m} \dots\dots\dots (11)$$

となる。ここで確率変数 T が N 個のサンプルよりなると考える。このサンプルのうち、大きなものより順に ρN 個をえらび出してその平均値を $T^{(\rho)}$ とする。 T_0 に対応する $T^{(\rho)}$ の値は、式(1)の原点に対するモーメントの釣合式より、

$$\begin{aligned} \varphi(T_0)T^{(\rho)} &= \int_{T_0}^{\infty} TP(T)dT \\ &= - \int_{T_0}^{\infty} Td \left[\exp \left\{ -A \left(\frac{T}{T_r} \right)^m \right\} \right] \\ &= T_0 \exp \left\{ -A \left(\frac{T_0}{T_r} \right)^m \right\} \\ &\quad + \int_{T_0}^{\infty} \exp \left\{ -A \left(\frac{T}{T_r} \right)^m \right\} dT \dots\dots\dots(12) \end{aligned}$$

いま、 $T/T_r = \theta$ とおけば式 (10), (11) より

$$\begin{aligned} \frac{T^{(\rho)}}{T_r} &= \frac{T_0}{T_r} + \exp \left\{ A \left(\frac{T_0}{T_r} \right)^m \right\} \\ &\quad \times \int_{\theta T_r}^{\infty} \exp \{-A\theta^m\} d\theta = (\ln \rho^{-A})^{1/m} \\ &\quad + \frac{1}{\rho} \int_{(\ln \rho^{-A})^{1/m}}^{\infty} \exp \{-A\theta^m\} d\theta \dots(13) \end{aligned}$$

図-3 は $T^{(\rho)}/T_r$ の ρ による変化の様子を m の値をパラメーターとして示したものである。また、図-4, 5, 6 はそれぞれ $T^{(1.0)}/T_r$, $T^{(1/3)}/T_r$ および $T^{(1/10)}/T_r$ の m による変化を示したものである。図中には実験結果を白丸で同時に示した。これらを図より明らかなように、 $T^{(1.0)}/T_r$ は実験値と理論式との対応はきわめて良好である。一方、 $T^{(1/3)}/T_r$ は 2%, $T^{(1/10)}/T_r$ は 5%

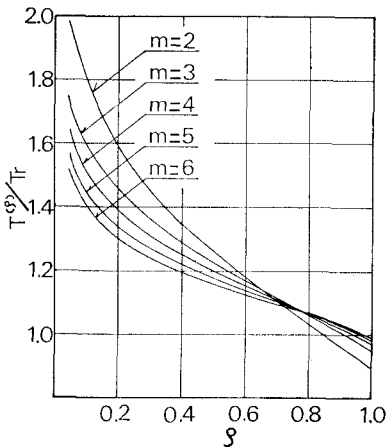


図-3 $T^{(\rho)}/T_r$ と ρ の関係

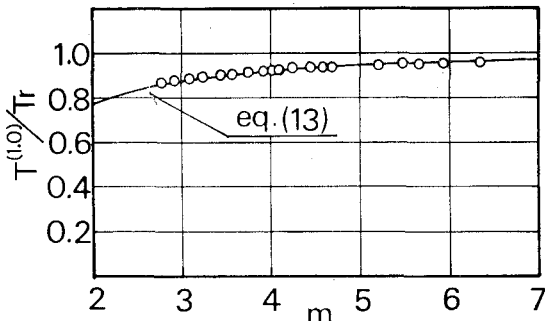


図-4 $T^{(1.0)}/T_r$ と m の関係

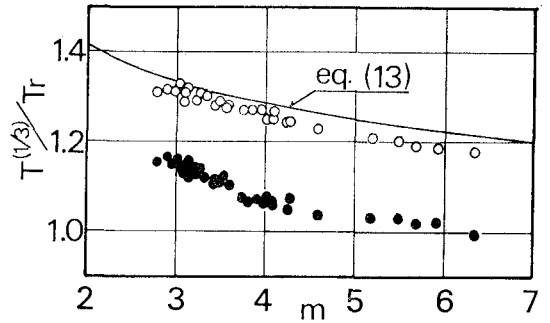


図-5 $T^{(1/3)}/T_r$ と m の関係

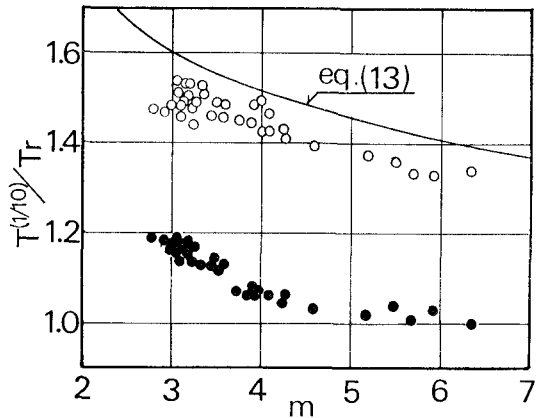


図-6 $T^{(1/10)}/T_r$ と m の関係

程度実験値が理論式より小さくなってはいるが、ほぼ良好な対応を示している。図-5, 6 には同時に従来の方法による波高との対応において決定した $T_{1/3}/T_r$ および $T_{1/10}/T_r$ を黒丸で示した。黒丸で示した実験値は、すべて理論式よりかなり小さく、 $T_{1/3}/T_r$ で約 20%, $T_{1/10}/T_r$ で約 30% 小さい値を示している。しかし、この2つの図について、ともにいえることであるが、黒丸の値は理論式よりかなり小さい値を示しているとはいえ、ほとんどばらつきはなく、その傾向は理論式とよく一致している。

4. 周期の最大値の推定

前節において、実験値が理論式とよく一致することを示した。ここでは、Weibull 分布に従う確率変数における T_{max} の推定を試みよう。いま Weibull 分布に従う T がある値 T_0 をこえない確率は式 (10) より

$$\int_0^{T_0} P(T)dT = 1 - \varphi(T_0) \dots\dots\dots(14)$$

で与えられる。ここで、その最大値を推定しようとする確率変動量が N 個のサンプルよりなるとすれば、すべてのサンプルがある値 T_0 をこえない確率は $\{1 - \varphi(T_0)\}^N$ となる。したがって少なくとも1個以上のサンプルが T_0 をこえる確率は、現象として $\{1 - \varphi(T_0)\}^N$ の余事象で

あることより、 $1 - \{1 - \varphi(T_0)\}^N$ となる。したがって N 個のサンプルのうち最大の T が、 T_0 と $T_0 + dT$ の間に存在する確率は、少くとも1つのサンプルが T_0 をこえる確率から、少くとも1つのサンプルが $T_0 + dT$ をこえる確率を差し引けばよい。いまそれらを、

$$f(T_0) = [1 - \{1 - \varphi(T_0)\}^N]$$

$$f(T_0 + dT) = [1 - \{1 - \varphi(T_0 + dT)\}^N]$$

とすれば、第2の式を Taylor 展開し、その第2項目までとることにより、

$$f(T_0) - f(T_0 + dT) = -dTf'(T_0)$$

$$= -d[1 - \{1 - \varphi(T_0)\}^N]$$

$$= -N[1 - \varphi(T_0)]^{N-1} \frac{d\varphi(T_0)}{dT} dT \dots (15)$$

のように与えられる。最終的に、 T_{max} の確率密度関数 $P_{max}(T)$ は、

$$P_{max}(T)dT = AmN \left(\frac{T}{T_r}\right)^{m-1}$$

$$\times \left[1 - \exp\left\{-A\left(\frac{T}{T_r}\right)^m\right\}\right]^{N-1}$$

$$\times \exp\left\{-A\left(\frac{T}{T_r}\right)^m\right\} dT \dots (16)$$

となる。また、式 (15) より T_{max} の平均値 $E[T_{max}]$ はつぎのように導くことができる。

$$E[T_{max}] = -\int_0^\infty Td[1 - \{1 - \varphi(T)\}^N]$$

$$= -\int_0^\infty T[1 - \{1 - \varphi(T)\}^N]_0^\infty$$

$$+ \int_0^\infty [1 - \{1 - \varphi(T)\}^N]dT \dots (17)$$

ここで、式 (17) の右辺第1項は0となり、式 (10) を考慮して、

$$E[T_{max}] = \int_0^\infty \left(1 - \left\{1 - \exp\left[-A\left(\frac{T}{T_r}\right)^m\right]\right\}\right)^N dT$$

.....(18)

いま $X = A\left(\frac{T}{T_r}\right)^m$ とおけば、式 (18) は、

$$\frac{E[T_{max}]}{T_r} = \frac{1}{mA^{1/m}} \int_0^\infty X^{(1-m)/m}$$

$$\times [1 - \{1 - \exp(-X)\}^N] dX \dots (19)$$

となる。いま、式 (19) の右辺の { } の中を2項定理により展開すれば、

$$\frac{E[T_{max}]}{T_r} = \frac{1}{mA^{1/m}} \sum_{i=1}^N \int_0^\infty (-1)^{i+1} {}_N C_i X^{(1-m)/m}$$

$$\times \exp(-iX) dX$$

$$= \frac{\Gamma\left(\frac{1+m}{m}\right)}{A^{1/m}} \sum_{i=1}^N i^{-1/m} (-1)^{i+1} {}_N C_i$$

.....(20)

のように与えられる。ところが式 (20) は N が大きな数になれば、きわめて煩雑な計算を要する。そこで Longuet-Higgins⁹⁾ にならって $E[T_{max}]/T_r$ の近似的な計算を行うことにする。いま、 $X_0 = \ln N$ とおくと $\exp(-X_0) = 1/N$ となる。ここで N に十分近い数の自然対数を $X (= X_0 + X')$ で表わすと、式 (19) の右辺の { } の中は、

$$[1 - \exp(-X)]^N = [1 - \exp(-X_0 - X')]^N$$

$$= \left\{1 - \frac{\exp(-X')}{N}\right\}^N \dots (21)$$

したがって、

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \left\{1 - \frac{\exp(-X')}{N}\right\}^N = e^{-\exp(-X')} \dots (22)$$

であるから、 N が十分大きな数であれば

$$[1 - \{1 - \exp(-X)\}^N] \approx 1 - e^{-\exp(-X')} \dots (23)$$

とおいてよい。式 (23) を式 (19) に代入し $X = X_0 + X'$ の関係を用いてかきかえると、

$$\frac{E[T_{max}]}{T_r} = \frac{1}{mA^{1/m}} \int_{-X_0}^\infty (X_0 + X')^{(1-m)/m}$$

$$\times [1 - e^{-\exp(-X')}] dX'$$

$$= \frac{1}{mA^{1/m}} \left[\int_{-X_0}^0 (X_0 + X')^{(1-m)/m} dX' \right.$$

$$- \int_{-X_0}^0 (X_0 + X')^{(1-m)/m} e^{-\exp(-X')} dX'$$

$$\left. + \int_0^\infty (X_0 + X')^{(1-m)/m} \times [1 - e^{-\exp(-X')}] dX' \right] \dots (24)$$

式 (24) の右辺第2、第3項の被積分関数はともに X' が0に非常に近い時のみ値をもち、 X' が大きくなるにつれて急速に0に近づく性質をもつ。したがって第2、第3項の $X_0 + X'$ を X_0 とおき、第2項の積分の下限を $-\infty$ とおいても、その誤差は非常に小さい。これらの近似により式(24)は最終的に次のようになる。

$$\frac{E[T_{max}]}{T_r} \approx \frac{1}{mA^{1/m}} \left[X_0^{1/m} - \int_{-\infty}^0 X_0^{(1-m)/m} \right.$$

$$\times e^{-\exp(-X')} dX' + \int_0^\infty X_0^{(1-m)/m}$$

$$\times [1 - e^{-\exp(-X')}] dX' \left. \right]$$

$$= \Gamma\left(\frac{m+2}{m}\right)^{-1/2} \left\{ (\ln N)^{1/m} + \frac{\gamma}{m} (\ln N)^{(1-m)/m} \right\}$$

.....(25)

ここで、 γ は Euler の常数で 0.5772... である。図-7 は周期の最大値の分布を示したもので、約 3,500 の連続した波を 50 波ごとに区切り、それぞれのうちの周期の最大値 70 個を、 $T_r/10$ ごとのランクにわけて示したものである。この解析に用いた記録は 図-2 に示したものと同じで、その Weibull 分布の形状母数 m は

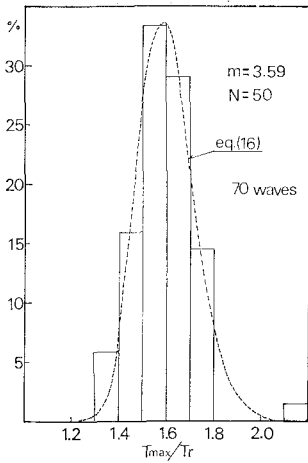


図-7 周期の最大値の分布

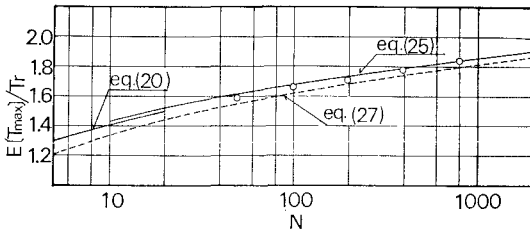


図-8 周期の最大値の平均と N の関係

3.59 である。図より両者はよく一致していることがわかる。図-8 は、やはり同じ記録を用いて周期の最大値の N による変化を示したものである。図中には式 (20) および式 (25) をあわせて示したが、実験値との対応は非常に良好であることがわかる。また図の破線は式 (16) の mode を示したものであるが、この確率分布の mode はつぎのように求められる。すなわち、式 (16) において $Y = \left(\frac{T}{T_r}\right)^m$ とおき、その極大値を与える Y を計算すると、

$$Y = \frac{\ln N}{A} - \frac{1}{A} \ln \left[1 - \frac{m-1}{AmY} \{1 - \exp(-AY)\} \right] \quad \dots\dots\dots (26)$$

となる。式 (26) の右辺第 2 項は十分小さく無視できるので、最終的に周期の最大値の確率分布の mode は、

$$\frac{[P_{\max}(T)]_{\text{mode}}}{T_r} = \Gamma \left(\frac{m+2}{m} \right)^{-1/2} (\ln N)^{1/m} \quad \dots\dots\dots (27)$$

のように与えられる。

5. 結 言

この研究は、zero up cross 法により決定した不規則波浪の周期の確率特性を検討したものである。特に、この研究では、単にその分布形状を論議するのみでなく、

実験値と理論式との対応について詳細な検討を加えるため、Weibull 分布をもとにして、以下に示すような統計的代表値を導き、実験値と比較検討した。

- 1) Weibull 分布の一般的なモーメント
- 2) N 個のサンプルのうち、大きい方より選んだ ρN 個の周期の平均値
- 3) N 個のサンプルのうち最大の確率分布、平均値および mode

比較に用いた実験値は、各ケースとも 1 200 波から最大 3 500 波という巨大サンプルを用いて処理解析を行ったものである。その結果、前節までの各図でも明らかなように、実験値と理論式とは細部にいたるまで非常に良好な対応を示している。このことより、不規則波の周期の確率分布には Weibull 分布が十分な精度で近似できることがわかった。しかし Weibull 分布は現象に対応して理論的に導かれたものではなく、今後も種々の不規則波浪を用いて、この分布の適合性を検討してゆく必要がある。今回の研究では明らかにすることができなかったが、Weibull 分布の形状母数 m とスペクトル形との間にはかなり強い相関が存在するものと考えられる。例えば、狭帯域スペクトルの場合には m の値は大きくなるであろうし、逆に広帯域スペクトルの場合には、 m の値は小さくなることが予測される。この関係を明らかにしてゆくことも今後に残された大きな課題である。今回の研究に用いた不規則波浪のスペクトル形は、2, 3 のケースを除いて期待スペクトルをほぼ再現していると考えられるが、わずかなスペクトル形の歪み、水槽底面の影響により生ずる水面形の非線型特性、あるいは砕波の影響などにより、 m の値はかなりの幅で変化していることが、ここで示した図よりよくわかる。

すでに Battjes¹⁰⁾ により不規則波浪の波高、周期の結合確率密度関数が与えられているが、これは周期の確率分布が T^2 -Rayleigh 分布であるとして、Rice¹¹⁾ の理論をもとにして導かれたものであり、再考を要すると思われる。

最後に、この研究を行うにあたり、京都大学大学院学生岸田典史君に実験の一部を協力していただいたことを付記し感謝の意を表す。

参 考 文 献

- 1) 合田良実：波の不規則性を考慮した設計法について、昭和 46 年度港湾技術研究所講演会概要, pp. 1-1~1-33, 1971.
- 2) Sverdrup, H.V. and W.H. Munk: Wind, sea, and swell; Theory of relations for forecasting, U.S. Navy Hydrographic Office, Report No. 601, 44 p., 1947.
- 3) Bretschneider, C.L.: Wave variability and wave spectra for wind generated gravity waves, U.S. Army Corps of Engineers, B.E.B. Tech. Memo, No. 113, 192 p., 1959.

- 4) Goda, Y: Numerical experiments on wave statistics with spectral simulation, Rept. Port and Harbour Res. Inst., Vol. 9, No. 3, pp. 3~57, 1970.
 - 5) 合田良実・永井康平・伊藤正彦: 名古屋港における波浪観測第3報, 港湾技研資料 No. 120, 24 p., 1971.
 - 6) 岩垣雄一・木村 晃: 不規則波浪の確率特性に関する一考察, 第29回土木学会年次学術講演会概要集第2部, pp. 21~22, 1974.
 - 7) 岩垣雄一・木村 晃: 不規則波の周期の確率特性について, 昭和50年度土木学会関西支部年次学術講演会講演概要, II-51-1~II-51-2, 1975.
 - 8) 岩垣雄一・木村 晃: 不規則波発生機による現地波浪のシミュレーションシステム, 第21回海岸工学講演会論文集, pp. 231~235, 1974.
 - 9) Longuet-Higgins, M.S.: On the statistical distributions of the heights of sea waves, Jour. Marine Res., Vol. IX, No. 3, pp. 245~266, 1952.
 - 10) Battjes, J. A.: Run-up distributions of waves breaking on slopes, Proc. A.S.C.E. WW1, pp. 91~114, 1971.
 - 11) たとえば, 宮脇一男: 雑音理論, 電気書院, 206 p., 1955.
-