傾斜した海底を有する湾における長波の湾水振動

酒　井　哲　郎*

1. まえがき

日本において津波の被害が顕著な地域として，三陸沿岸が挙げられる。特に昭和8年の三陸津波においては，遡上高として大船渡湾よりやや北の綾里湾における約30 m という記録が目につく。綾里湾は湾口幅約 3 km，湾長約 4 km という小さな湾ではあるが，湾奥に向って水深，湾幅ともに減少するV字型の湾形を有しており，上述のような高い遡上高をもたらしたものと思われる。しかしながら，実際の津波の湾内での挙動は，遡上と湾水振動の両方が組み合わされた形になっているはずである。その意味でV字型の湾の湾水振動の効果も無視しえないと考えられる。

水深および湾幅がともに減少する湾における湾水振動に関しては，これまでに杉本・西村[1]および堀川・西村[2]の研究がある。杉本・西村は水深および湾幅が直線的に変化する湾における線型長波の解を求め，特に水深のみが減少する場合の湾奥付近での重複波形を検討している。また堀川・西村は，港湾の断面変化にともなう長波の変形を，グリーンの式，断面が変化する水路での線型長波の変形に関する本間の解[3]およびノイマンの方法を用いて検討している。しかしながら，これら2つの研究では，一様な水深の湾における湾水振動理論において議論されているような増幅率および共振湾長を与えるまでにはいたっていない。

この研究は，水深，湾幅ともに減少する湾における湾水振動を明らかにするための第1段階として，水深のみが一様に減少し湾奥において有限の水深を有する長方形湾における線型長波の湾水振動をとりあげ，簡単な理論を用いて検討する。特に，湾奥における増幅率を求め，第1次の共振点における増幅率および共振湾長への湾内の海底勾配の効果を明らかにする。また，湾内の湾軸方向の波高の変化を求め，線型長波の進行波としての変形の関係（グリーンの式）との比較を行う。なお，ここで用いる手法は，Ippen-Goda[4] および合田[5]が一様水深の長方形湾および扇形湾の湾水振動に用いた手法と同様である。

* 正会員　工博　京都大学助教授　工学部土木工学教室

2. 理　　論

(1) 基礎式と境界条件

最初に次のような仮定を行う。1) 波は線型長波，2) 湾外は一様水深，3) 湾口部に防波堤なし，4) 湾内では横振動なし，5) 湾内の水深は湾軸方向に一様に減少（図—1 参照）。水深が変化する場合の 2 次元の線型長波の運動方程式および連続式は，周知のように次式で与えられる。

$$\frac{\partial u}{\partial t}+g\frac{\partial \eta}{\partial x}=0,\quad \frac{\partial v}{\partial t}+g\frac{\partial \eta}{\partial y}=0 \quad \cdots\cdots(1),\ (2)$$

$$\frac{\partial \eta}{\partial t}+\frac{\partial (hu)}{\partial x}+\frac{\partial (hv)}{\partial y}=0 \cdots\cdots(3)$$

ここで h は水深である。水位 η を次式，

$$\eta=ae^{i\sigma t}f(x,\ y) \cdots\cdots(4)$$

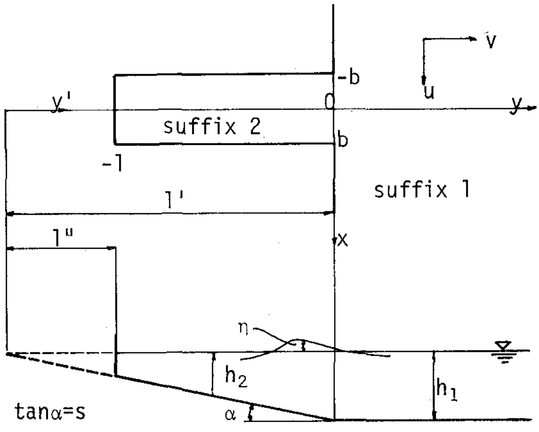
で表現すると，u, v は式 (1)，(2) より，

$$u=-\left(\frac{ag}{i\sigma}\right)e^{i\sigma t}f_x,\quad v=-\left(\frac{ag}{i\sigma}\right)e^{i\sigma t}f_y \cdots\cdots(5),\ (6)$$

で与えられる。境界条件は Ippen-Goda と同様であり，式 (5)，(6) を考慮すると図—1 より以下のように与えられる。

$$x=-b,\ b,\ -l\leq y\leq 0:\ f_x=0 \cdots\cdots(7)$$

$$|x|>b,\ y=0:\ f_y=0 \cdots\cdots(8)$$



図—1　記号の説明

$$|x|\leq b,\ y=-l:\ f_y=0 \quad \cdots\cdots(9)$$

$$x^2+y^2\to\infty:\ f(x,\ y)=\cos(k_1y) \quad \cdots\cdots(10)$$

$$|x|\leq b,\ y=0:\ \eta_1(x,\ 0)=\eta_2(x,\ 0),$$

$$v_1(x,\ 0)=v_2(x,\ 0) \quad \cdots(11),\ (12)$$

ここで添字1および2は湾外および湾内であることを意味する。式(10)は，湾口から無限にはなれた外海では水面形が海岸線に平行な完全重複波になることを示すものである。この場合は線型長波であり，外海の完全重複波の波数 k_1 は式(4)より $\sigma/\sqrt{gh_1}$ である。式(12)を式(6)を用いて書きかえ，さらに Ippen-Goda と同様の表現をすると次式のようになる。

$$|x|\leq b,\ y=0:\ f_{1_y}(x,\ 0)=f_{2_y}(x,\ 0)=k_1ce^{i\omega} \quad \cdots\cdots(13)$$

ここで，c（波速ではない）および ω は未知定数である。

(2) 湾外の波

式(1),(2),(3),(4)と，湾外での水深 h_1=const. を用いると，湾外の f_1 の満たすべき式は次式のようになる。

$$f_{1_{xx}}+f_{1_{yy}}+k_1^2f_1=0 \quad \cdots\cdots(14)$$

ここで f_1 を，境界条件式(10),(13)を考慮して，Ippen-Goda と同様に次式のように仮定する。

$$f_1(x,\ y)=\cos(k_1y)+k_1ce^{i\omega}f_3(x,\ y) \quad \cdots\cdots(15)$$

したがって η_1 は式(4)より，

$$\eta_1(x,\ y,\ t)=a\cos(k_1y)e^{i\sigma t}+ak_1cf_3(x,\ y)e^{i(\sigma t+\omega)} \quad \cdots\cdots(16)$$

式(15)中の $\cos(k_1y)$ は式(14)を満たすので，結局 f_3 が，式(14)を満たせばよい。f_1 が満足すべき境界条件は，式(8),(10),(11),(13)である。このうち式(11)を除くと，のこりの3つの条件は f_1 のうちの $\cos(k_1y)$ が満たすので，式(11)を除く式(8),(10),(13)は f_3 が満たせばよい。式(14),(8),(10),(13)を f_3 が満たすべき関係に書き改めると，Ippen-Goda[4] が求めた式と全く同じになる。ただしこの場合は湾口に防波堤がないので，Ippen-Goda の $d=b$ である。結局 f_3 は Ippen-Goda が求めたものと同様，次式で与えられる。

$$f_3=iI_1(x,\ y;\ k_1)-I_2(x,\ y;\ k_1) \quad \cdots\cdots(17)$$

なお I_1 および I_2 は，次式で与えられる。

$$I_1=\frac{2}{\pi}\int_0^{k_1}\frac{\sin ub}{u\sqrt{k_1^2-u^2}}\cos ux\cdot e^{-i\sqrt{k_1^2-u^2}y}du$$

$$I_2=\frac{2}{\pi}\int_{k_1}^{\infty}\frac{\sin ub}{u\sqrt{u^2-k_1^2}}\cos ux\cdot e^{-\sqrt{u^2-k_1^2}y}du$$

η_1 は式(16)より次式で与えられる。

$$\eta_1=a\cos(k_1y)e^{i\sigma t}+ak_1c(iI_1-I_2)e^{i(\sigma t+\omega)} \cdots(18)$$

(3) 湾内の波

式(1),(2),(3),(4)と，仮定4) $f_2(x,\ y)\equiv f_2(y)$ および $h_2(x,\ y)=h_1+sy$（s は湾内の海底勾配）から，湾内の f_2 が満たすべき式は次式のようになる。

$$g(h_1+sy)f_{2_{yy}}+gsf_{2_y}+\sigma^2f_2=0 \quad \cdots\cdots(19)$$

$h_1+sy=sy'$ とおくと，上式は

$$y'f_{2_{y'y'}}+f_{2_{y'}}+(\sigma^2/gs)f_2=0 \quad \cdots\cdots(20)$$

となり式(20)の解として，次式を考える[3),6)]。

$$f_2(y)=C\cdot J_0(2\sigma\sqrt{y'/gs})+D\cdot N_0(2\sigma\sqrt{y'/gs}) \quad \cdots\cdots(21)$$

ここで，J_0, N_0 はそれぞれ0次のベッセルおよびノイマン関数であり，C および D は境界条件から決定される未知の定数である。f_2 の満たすべき境界条件式(7),(9),(11),(13)の中で，式(11)以外の3つの条件のうち式(7)はすでに満たされており，式(9),(13)より C, D が c, ω によって表わされ，結局式(21)は次式のようになる。

$$f_2(y)=-ce^{i\omega}\frac{N_1(2\sigma\sqrt{l''/gs})J_0(2\sigma\sqrt{(y+l')/gs})-J_1(2\sigma\sqrt{l''/gs})N_0(2\sigma\sqrt{(y+l')/gs})}{N_1(2\sigma\sqrt{l''/gs})J_1(2\sigma\sqrt{l'/gs})-J_1(2\sigma\sqrt{l''/gs})N_1(2\sigma\sqrt{l'/gs})}=-ce^{i\omega}F(y) \quad \cdots\cdots(22)$$

ここで，l' および l'' は，図―1 に示すように湾内の海底面を延長した直線と静水面との交点の，湾口および湾奥からの水平距離である。式(22)と式(4)より，湾内の η_2 は次式で与えられる。

$$\eta_2(y)=-ace^{i(\sigma t+\omega)}F(y) \quad \cdots\cdots(23)$$

(4) 未知定数 c および ω の決定

これまで考慮しなかった境界条件式(11)は，未知定数 c および ω の決定に用いる。式(11)は，湾口で湾外と湾内の波の水位が等しいことを示しているが，ここでは Ippen-Goda と同様湾口幅方向に平均して成立するものとする。式(18)で与えられる湾外の波 η_1 は，$b=d$ とおけば Ippen-Goda の場合と同じであり，湾口における $\eta_1(x,\ 0)$ の湾口幅平均 $\overline{\eta_1(x,\ 0)}$ は，次式で与えられる。

$$\overline{\eta_1(x,\ 0)}=ae^{i\sigma t}+ace^{i(\sigma t+\omega)}(i\phi_1-\phi_2) \quad \cdots\cdots(24)$$

ここで，ϕ_1 および ϕ_2 は k_1b の関数として次式で与えられる。

$$\left.\begin{aligned}\phi_1(k_1b)&=\frac{2}{\pi}k_1b\int_0^{k_1b}\frac{\sin^2\alpha}{\alpha^2\sqrt{(k_1b)^2-\alpha^2}}d\alpha\\ \phi_2(k_1b)&=\frac{2}{\pi}k_1b\int_{k_1b}^{\infty}\frac{\sin^2\alpha}{\alpha^2\sqrt{\alpha^2-(k_1b)^2}}d\alpha\end{aligned}\right\} \quad (25)$$

一方，湾内の波の水位 η_2 の湾口における湾口幅平均 $\overline{\eta_2(x,\ 0)}$ は式(23)より次式で与えられる。

$$\overline{\eta_2(x,\ 0)}=\eta_2(0)=-ace^{i(\sigma t+\omega)}\frac{N_1(2\sigma\sqrt{l''/gs})J_0(2\sigma\sqrt{l'/gs})-J_1(2\sigma\sqrt{l''/gs})N_0(2\sigma\sqrt{l'/gs})}{N_1(2\sigma\sqrt{l''/gs})J_1(2\sigma\sqrt{l'/gs})-J_1(2\sigma\sqrt{l''/gs})N_1(2\sigma\sqrt{l'/gs})} \quad \cdots\cdots(26)$$

結局式(11)が湾口幅方向を平均して成立するとすると，式 (24), (26) より次式が成立する。

$$a+ace^{i\omega}\{i\phi_1(\sigma/\sqrt{gh_1}\cdot b)-\phi_2(\sigma/\sqrt{gh_1}\cdot b)\}=-ace^{i\omega}Z(2\sigma\sqrt{l''/gs},\ 2\sigma\sqrt{l'/gs}) \quad \cdots\cdots(27)$$

ここで $Z(2\sigma\sqrt{l''/gs},\ 2\sigma\sqrt{l'/gs})$ は次式で与えられる。

$$Z\left(2\sigma\sqrt{\frac{l''}{gs}},\ 2\sigma\sqrt{\frac{l'}{gs}}\right)=\frac{N_1(2\sigma\sqrt{l''/gs})J_0(2\sigma\sqrt{l'/gs})-J_1(2\sigma\sqrt{l''/gs})N_0(2\sigma\sqrt{l'/gs})}{N_1(2\sigma\sqrt{l''/gs})J_1(2\sigma\sqrt{l'/gs})-J_1(2\sigma\sqrt{l''/gs})N_1(2\sigma\sqrt{l'/gs})} \quad \cdots\cdots(28)$$

式(27)を実数部分と虚数部分に分けると，次式が成立する。

$$\cos\omega+c\{Z(2\sigma\sqrt{l''/gs},\ 2\sigma\sqrt{l'/gs})-\phi_2(\sigma/\sqrt{gh_1}\cdot b)\}=0 \quad \cdots\cdots(29)$$

$$-\sin\omega+c\cdot\phi_1(\sigma/\sqrt{gh_1}\cdot b)=0 \quad \cdots\cdots(30)$$

式 (29), (30) から，未知定数 c および ω は次式のように与えられる。

$$c=1/\sqrt{(Z-\phi_2)^2+\phi_1^2},\quad \omega=-\tan^{-1}\{\phi_1/(Z-\phi_2)\} \quad \cdots\cdots(31),\ (32)$$

(5) 湾奥での増幅率と湾軸に沿う波高の変化

式(23)より湾奥での水位の振幅（半波高）は，次式で与えられる。

$$|\eta_2(-l)|=ac\left|\frac{N_1(2\sigma\sqrt{l''/gs})J_0(2\sigma\sqrt{l''/gs})-J_1(2\sigma\sqrt{l''/gs})N_0(2\sigma\sqrt{l''/gs})}{N_1(2\sigma\sqrt{l''/gs})J_1(2\sigma\sqrt{l'/gs})-J_1(2\sigma\sqrt{l''/gs})N_1(2\sigma\sqrt{l'/gs})}\right|$$
$$=ac|Z'(2\sigma\sqrt{l''/gs},\ 2\sigma\sqrt{l'/gs})| \quad \cdots\cdots(33)$$

増幅率を，湾内の波の水位の振幅と，式(18)の右辺で与えられる湾外の波のうちの完全重複波の振幅の比と定義すれば，湾奥の増幅率 $R(-l)$ は式(33)を a で割り，式(31)を用いて次式のように与えられる。

$$R(-l)=|Z'|/\sqrt{(Z-\phi_2)^2+\phi_1^2} \quad \cdots\cdots(34)$$

湾奥の増幅率 $R(-l)$ を決定する4つの量 ϕ_1, ϕ_2, Z, Z' の変数 k_1b, $2\sigma\sqrt{l'/gs}$, $2\sigma\sqrt{l''/gs}$ はそれぞれ次式のように与えられる。

$$k_1b=0.5k_1l(2b/l) \quad \cdots\cdots(35)$$

$$2\sigma\sqrt{l'/gs}=2k_1h_1/s \quad \cdots\cdots(36)$$

$$2\sigma\sqrt{l''/gs}=2/s\cdot\sqrt{k_1h_1}\sqrt{k_1h_1-s\cdot k_1l} \quad \cdots(37)$$

式 (35)～(37) からわかるように，湾奥の増幅率 $R(-l)$ は，一様水深の長方形湾に関するパラメーター $2b/l$ 以外に，湾内の海底勾配 s および湾外の長波の比水深 k_1h_1 をもパラメーターとして，湾長 k_1l の関数として与えられることを示している。式(37)中の $k_1h_1-s\cdot k_1l$ は正の値をとる必要があるので，k_1l の値のとりうる範囲は次式で与えられる。

$$k_1l\leq k_1h_1/s \quad \cdots\cdots(38)$$

一方湾軸に沿う波高の変化を湾口における波高との比として表わすと，式(23)から次式のように与えられる。

$$\left|\frac{\eta_2(y)}{\eta_2(0)}\right|=\left|\frac{N_1(2\sigma\sqrt{l''/gs})J_0(2\sigma\sqrt{(y+l')/gs})-J_1(2\sigma\sqrt{l''/gs})N_0(2\sigma\sqrt{(y+l')/gs})}{N_1(2\sigma\sqrt{l''/gs})J_0(2\sigma\sqrt{l'/gs})-J_1(2\sigma\sqrt{l''/gs})N_0(2\sigma\sqrt{l'/gs})}\right| \quad \cdots\cdots(39)$$

式 (39) 中の $2\sigma\sqrt{(y+l')/gs}$ は，次式のように水深比 h_2/h_1 を用いて表現できる。

$$2\sigma\sqrt{(y+l')/gs}=2/s\cdot k_1h_1\sqrt{h_2/h_1} \quad \cdots\cdots(40)$$

なお，$y\geq -l$ であることから h_2/h_1 の値のとりうる範囲が次式で与えられる。

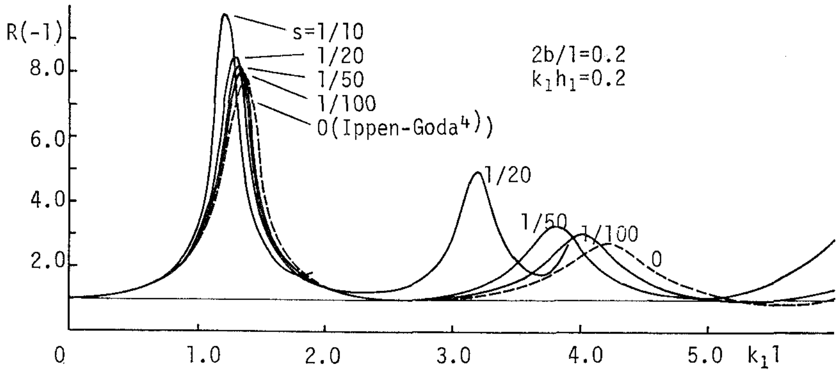
$$h_2h_1\geq 1-s\cdot k_1l/k_1h_1 \quad \cdots\cdots(41)$$

式 (36), (37), (39), (40) から，湾口での波高との比で示した湾軸に沿う波高の変化は，s, k_1h_1, k_1l をパラメーターとして水深比 h_2/h_1 の関数として与えられる。

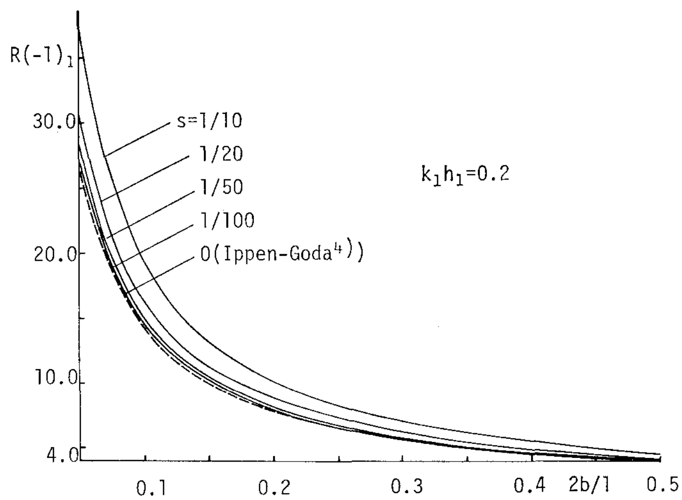
3. 湾奥の増幅率と湾内の水位変化

(1) 湾奥の増幅率

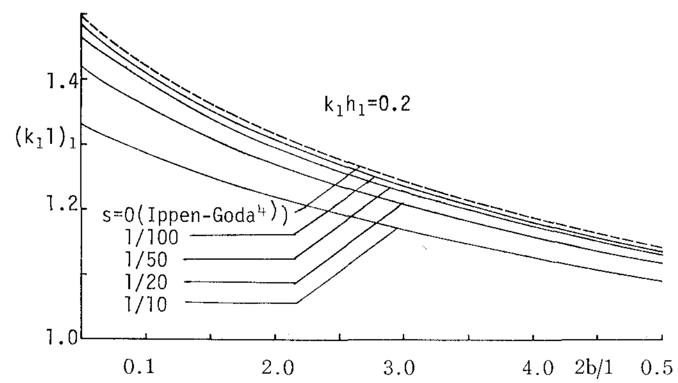
図―2 は，式 (25), (33)～(37) を用いて求めた湾奥の増幅率の例である。パラメーターとして $2b/l=0.2$, $k_1h_1=0.2$ にとり，底勾配 s が 1/10, 1/20, 1/50, 1/100 の場合について示している。図には比較のために $2b/l=0.2$ の場合の Ippen-Goda の一様水深の長方形湾の湾奥の増幅率をも示している。曲線が途中で終っているのは式(38)の制限によるものである。図から湾内の底勾配が急になるほど，一様水深の場合にくらべて，第1次および第2次共振点の共振湾長が減少しその増幅率は増加することがわかる。特に，第1次共振点に関して，湾幅湾長比 $2b/l$ と湾奥の増幅率の関係におよぼす湾内の底勾配の影響を示したのが **図―3** である。この場合は $k_1h_1=0.2$ である。この図から，一般的に，第1次共振点の湾奥での増幅率は，底勾配が大きくなるほど一様水深の場合の値に比べて増加することが明らかである。一方，**図―4** は $2b/l$ と第1次共振湾長との関係を示したもので，一般的に底勾配が急になるほど一様水深の場合に比べて第1次共振湾長は減少することがわかる。



図—2 傾斜した海底を有する湾の共振曲線の例



図—3 第1次共振点での増幅率におよぼす底勾配の効果



図—4 第1次共振湾長におよぼす底勾配の効果

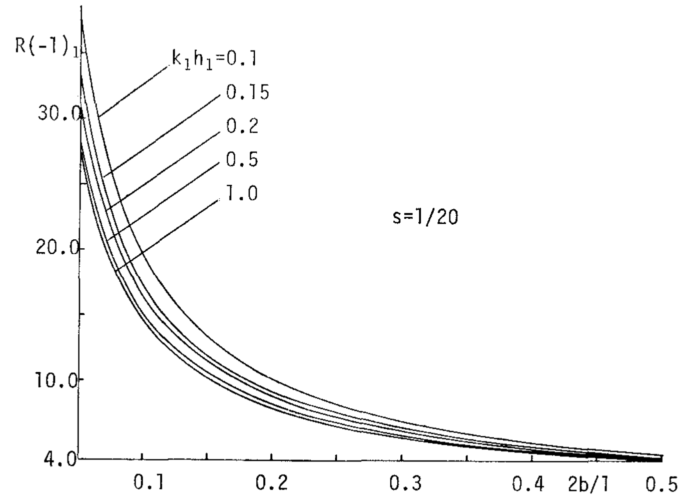
この理論にはパラメーターとして湾内の底勾配以外に湾外の比水深 k_1h_1 がある。**図—5, 6** は，**図—3, 4** と逆に，底勾配を一定（この場合は 1/20）にし，k_1h_1 を 0.1～1.0 まで5種類の値をとった場合の，$2b/l$ と増幅率の関係を示したものである。これらの図から，湾外の比水深 k_1h_1 が小さくなるほど，第1次共振点の湾奥の増幅率は増加し共振湾長は減少することがわかる。

（2） 湾内の水位変化

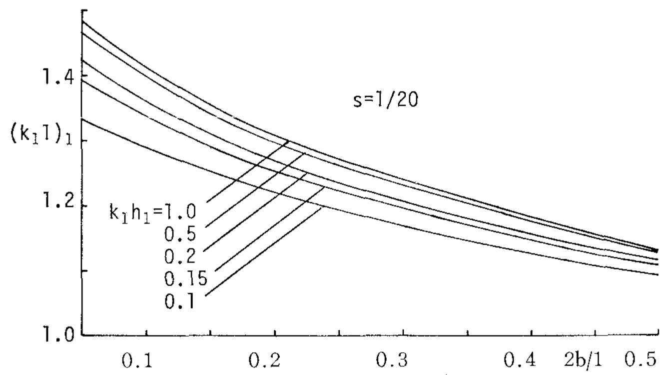
津波の湾内での変形を論じる場合，進行する長波の遡上として取扱うことも多い。特に汀線付近に達するまでの変形においては，これまで線型長波の変形法則としてのグリーンの式

$$\eta_2/\eta_1=(B_2/B_1)^{-1/2}(h_2/h_1)^{-1/4} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots(42)$$

あるいは最低次の浅水理論から導いた岸[7]の非線型長波

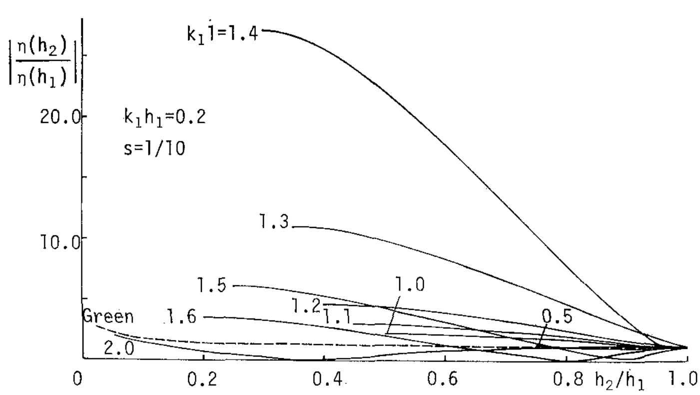


図—5　第1次共振点での増幅率におよぼす湾外比水深の効果



図—6　第1次共振湾長におよぼす湾外比水深の効果

および段波の変形理論が適用されてきた。最近首藤[8]は，Ursell 数の広い範囲にわたって成立する波頂曲率，水深変化および水路幅の変化の効果をも考慮した非線型長波の式から，グリーンの式を一般化した非線型長波の浅水変形法則を示している。ここでは，湾内での長波の変形を進行波として扱う場合と，湾水振動として扱う場合との相違を見るために，とりあえずグリーンの式(42)式とこの理論による水位変化を比較する。湾口の波高を基準とした湾内の波高変化の式 (39) を用いて，湾内の底勾配，湾外の比水深を一定 ($s=1/10$, $k_1h_1=0.2$) とし，湾長 k_1l を 0.5〜2.0 の範囲で変化させた場合の，湾内波高比 $|\eta(y)/\eta(0)|=|\eta(h_2)/\eta(h_1)|$ と水深比 h_2/h_1 の関係を示したのが **図—7** である。図中には，水深のみが変化する場合のグリーンの式の関係をも示している。**図—7**



図—7　湾軸に沿う水深減少にともなう波高変化

の波高変化では，湾口の波高を基準としており，湾外の完全重複波の波高 $2a$ を基準とした増幅率とはかならずしも傾向は一致しないと思われるが，図からわかるように，$k_1h_1=0.2$，$s=1/10$ の場合の第1次共振湾長に近い $k_1l=1.3$ および 1.4 などの場合には，湾内の波高はグリーンの式で与えられる波高よりはるかに大きくなっていることがわかる。

4. あとがき

以上，この研究は，一様に水深が減少し，かつ湾奥で有限の水深を有する長方形湾における長波の湾水振動を理論的に論じた。その結果，湾内の底勾配が急になるほど第1次および第2次共振点の共振湾長は減少し，湾奥の増幅率は増加することがわかった。また共振湾長付近では，湾軸に沿う水深減少にともなう波高増加は，グリーンの式によるよりもはるかに大きいことがわかった。なお水深とともに湾幅も減少する湾における長波の湾水振動については，別の機会に発表したい。

最後に，この研究に当って終始熱心に御指導頂いた京都大学工学部　岩垣雄一教授に感謝するとともに，この研究は文部省科学研究費自然災害特別研究 (1)（東北大学工学部　岩崎敏夫教授代表）によることを付記する。また，この科学研究費の研究グループのメンバー諸氏から頂いた有益なコメントに対して謝意を表する。

参考文献

1) 杉本修一・西村益夫：底面および側壁が直線的に変化する湾における長波の波高変化，第14回海岸工学講演会講演集，pp. 95～97，1967.
2) 堀川清司・西村仁嗣：港湾の屈曲および断面変化に伴う長波の変形，第20回海岸工学講演会論文集，pp. 173～177，1973.
3) 本間　仁：長波の変形に就て，土木学会誌，第19巻，第9号，pp. 741～763，1933.
4) Ippen, A.T. and Y. Goda: Wave-induced oscillation in harbors: The solution for a rectangular harbor connected to the open-sea, M.I.T. Hydrodynamics Lab. Rep. No. 59, 1963.
5) 合田良実：長方形および扇形の港の副振動について，―フーリェ変換を用いた解法―，第10回海岸工学講演会講演集，pp. 53～58，1963.
6) 岩垣雄一・酒井哲郎：一様勾配面上の有限振幅長波について，土木学会論文報告集，第196号，pp. 65～74，1971.
7) Kishi, T.: Transformation, breaking and run-up of a long wave of finite height, Proc. 8th Conf. Coastal Eng., pp. 60～76, 1963.
8) 首藤伸夫：非線型長波の変形，―水路幅，水深の変化する場合―，第21回海岸工学講演会論文集，pp. 57～63，1974.